

Feuille de TD # 8  
Séries de Fourier

**Notations**

a) Si  $f : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{C}$  est Lebesgue intégrable, nous posons

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}, \forall N \in \mathbb{N},$$

$$Sf(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) \text{ (si cette limite existe).}$$

b) La série formelle  $Sf := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$  est le développement en série de Fourier de  $f$  ou la série de Fourier de  $f$ .

**Exercice # 1.**

a) Montrer que  $\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$  définit un produit scalaire sur  $L^2$ .

b) Posons  $e_n(x) := e^{inx}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in ]0, 2\pi[$ . Montrer que la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée.

c) Exprimer  $c_n(f)$  à l'aide de  $e_n$  et du produit scalaire ci-dessus, et retrouver l'inégalité de Bessel.

**Exercice # 2.** Soit  $f$   $2\pi$ -périodique et intégrable sur  $]0, 2\pi[$ . Alors :

a)  $f$  est intégrable sur tout intervalle borné.

b)  $\int_0^{2\pi} f(y) dy = \int_a^{a+2\pi} f(y) dy, \forall a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice # 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{pour } x \in ]\pi, 2\pi[ \end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .

b) Déterminer  $Sf$ .

c) Calculer, en fonction de  $x \in \mathbb{R}$ , la valeur de la somme  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$ .

**Exercice # 4.** Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique donnée par  $f(x) := x$  pour  $x \in ]0, 2\pi[$ . Que donne l'égalité de Parseval?

**Exercice # 5.** Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f(x) := |\sin x|$ . En déduire la valeur de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$ .

**Exercice # 6.** Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $] -\pi, \pi]$  par  $f(x) := |x|$ . En déduire la valeur de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice # 7.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $] -\pi, \pi]$  par  $f(x) := x^2$ .

a) Déterminer  $Sf$  et  $Sf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

b) En déduire les valeurs des séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ,  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice # 8.** Soit  $\alpha \in ]0, \pi[$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $]-\pi, \pi]$  par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .

b) Calculer  $Sf$  et  $Sf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

c) En déduire la somme de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}$ .

**Exercice # 9.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique, impaire et telle que  $f(x) = (\pi - x)/2$  sur  $]0, \pi[$ .

a) Dessiner le graphe de  $f$  sur une période.

b) Calculer  $Sf$  et  $Sf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

c) En déduire la valeur des sommes suivantes :  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice # 10.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique, paire et telle que  $f(x) = 2x - \pi$  sur  $[0, \pi]$ .

a) Dessiner le graphe de  $f$  sur  $[-3\pi, 3\pi]$  et exprimer  $f(x)$  sur  $[\pi, 2\pi]$ .

b) Déterminer  $Sf$  et  $Sf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

c) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**Exercice # 11.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique et vérifiant  $f(x) = x$  sur  $[-\pi, \pi[$ .

a) Dessiner le graphe de  $f$  sur  $[-3\pi, 3\pi]$ .

b) Déterminer  $Sf$  et  $Sf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

c) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

**Exercice # 12.** Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique impaire définie sur  $[0, \pi]$  par

$f(x) = x(\pi - x)$ . En déduire les valeurs des séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^6}$ .

**Exercice # 13.** (Noyau de Dirichlet) Soit  $f$   $2\pi$ -périodique et intégrable sur  $]0, 2\pi[$ . Soit

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^N e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$D_N$  est le noyau de Dirichlet.

a) Montrer que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) D_N(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$D_N(y) = \begin{cases} \frac{\sin((N + 1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2N + 1, & \text{si } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin(Ny) \cotan(y/2) + \cos(Ny), & \text{si } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2N + 1, & \text{si } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

c) Montrer que  $\int_0^\pi D_N(y) dy = \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy = \pi$ .

**Exercice # 14.** (Noyau de Fejér) Soit

$$F_N := \frac{D_0 + D_1 + \dots + D_N}{N + 1}, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

où  $D_j$  est le noyau de Dirichlet ( $F_N$  est le *noyau de Fejér*). Soit

$$T_N(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_N(f)}{N + 1}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Montrer les propriétés suivantes.

a) Si  $f$  est  $2\pi$ -périodique et intégrable sur  $]0, 2\pi[$ , alors

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - y) F_N(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x - y) F_N(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) 
$$F_N(y) = \begin{cases} \frac{\sin^2[(N + 1)y/2]}{(N + 1) \sin^2(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ N + 1, & \text{si } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

En particulier,  $F_N(y) \geq 0, \forall y, \forall N$ .

c) 
$$\int_{-\pi}^\pi F_N(y) dy = 2\pi.$$

d) Pour tout  $0 < \delta < \pi$ ,  $F_N \rightarrow 0$  uniformément sur  $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

En particulier, pour tout  $0 < \delta < \pi$ ,

$$\int_{[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} F_N(y) dy \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty.$$

**Exercice # 15.** (Produit de convolution de fonctions périodiques) Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions  $2\pi$ -périodiques, avec  $f$  intégrable sur  $]0, 2\pi[$  et  $g$  continue. Nous définissons

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t)g(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que le produit de convolution  $f * g(x)$  est bien défini,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $f * g$  est  $2\pi$ -périodique.

c) Calculer les coefficients de Fourier de  $x \mapsto f(x - t)$  en fonction de  $t$  et de ceux de  $f$ .

d) En déduire les coefficients de Fourier de  $f * g$  en fonction de ceux de  $f$  et  $g$ .

**Exercice # 16.** Cet exercice est une suite des deux exercices précédents, et nous reprenons les notations de ces exercices. Nous munissons  $I = ]0, 2\pi[$  de la mesure  $(1/2\pi) \lambda_1$  (avec  $\lambda_1$  la mesure de Lebesgue sur  $]0, 2\pi[$ ).

- a) Montrer que  $T_N(f) = f * F_N, \forall 1 \leq p \leq \infty, \forall f \in L^p(I), f$   $2\pi$ -périodique.
- b) Avec  $p$  et  $f$  comme dans la question précédente, montrer que  $T_N(f)$  est  $2\pi$ -périodique,  $T_N(f) \in L^p(I)$  et  $\|T_N(f)\|_{L^p(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)}$ .
- c) Soit  $1 \leq p < \infty$ . Si  $f \in C_c^\infty(I)$  et  $f$  est prolongée par  $2\pi$ -périodicité à  $\mathbb{R}$ , montrer que  $\|T_N(f) - f\|_{L^p(I)} \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Indication : utiliser le théorème de Fejér.
- d) Soit  $1 \leq p < \infty$ . Si  $f \in L^p(I)$  et  $f$  est  $2\pi$ -périodique, montrer que  $\|T_N(f) - f\|_{L^p(I)} \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ . Indication : utiliser la question précédente et la densité de  $C_c^\infty(I)$  dans  $L^p(I)$ .
- e) Calculer  $c_n(T_N(f)), \forall N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- f) En déduire que « les coefficients de Fourier d'une fonction déterminent la fonction » : si  $f \in L^1(I)$  et  $f$  est  $2\pi$ -périodique, alors  $[c_n(f) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}] \implies f = 0$ .

**Exercice # 17.** (Inégalités faibles de Bernstein (I)) Commençons par la fin de l'histoire, qui dépasse le cadre de cet enseignement. En général, l'ordre de grandeur d'une fonction ne donne aucune information sur l'ordre de grandeur de sa dérivée. Par exemple, les fonctions  $x \mapsto f_n(x) := \sin(nx)$  satisfont toutes  $|f_n| \leq 1$ , mais leurs dérivées peuvent être arbitrairement grandes quand  $n \rightarrow \infty$ . Le *théorème de Bernstein* donne une inégalité entre  $f'$  et  $f$  si  $f$  est un polynôme trigonométrique de degré fixé. Il affirme que, si  $f$  est un polynôme trigonométrique de degré  $\leq n$ , alors

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq n \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|. \quad (1)$$

Nous allons montrer une forme plus faible, avec un facteur supplémentaire 3, de cette inégalité, et une version  $L^p$  de celle-ci :

$$\|f'\|_{L^p} \leq 3n \|f\|_{L^p}, \forall 1 \leq p \leq \infty, \forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n. \quad (2)$$

Le cadre de la preuve est celui des trois exercices précédents.

- a) Soit  $g(x) := e^{inx} f(x)$ . Si  $f$  est un polynôme trigonométrique de degré  $\leq n$ , montrer l'identité suivante (avec  $F_n$  le polynôme de Fejér, et  $T_n$  comme dans l'exercice précédent) :

$$f'(x) = in f(x) - 2in e^{-inx} (g * F_n)(x) = in f(x) - 2in e^{-inx} (T_n(g))(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

- b) En déduire (??).

**Exercice # 18.** Soit  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $f(0) = f(2\pi)$  et  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ .

- a) Exprimer  $c_n(f')$  en fonction de  $c_n(f), \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , et calculer  $c_0(f')$ .
- b) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

- c) Dans quel cas a-t-on égalité?