

Feuille de TD # 9
Transformée de Fourier

Cadre

1. Nous travaillons dans \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue.
2. « \cdot » est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n : x \cdot \xi := \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$.
3. « $|\cdot|$ » est la norme euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n : |x| := \left(\sum_{j=1}^n (x_j)^2 \right)^{1/2}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice # 1.

- a) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Soit $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
 - (i) Montrer que $f_\varepsilon \in L^1$.
 - (ii) Montrer que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon \xi)$.
 - (iii) Montrer que $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}, \forall \varepsilon > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.
- b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x - h), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
 - (i) Montrer que $\tau_h f \in L^1$.
 - (ii) Montrer que $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-ih \cdot \xi} \widehat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.
- c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
 - (i) Montrer que $\bar{f} \in L^1$.
 - (ii) Montrer que $\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.
- d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\check{f}(x) := f(-x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
 - (i) Montrer que $\check{f} \in L^1$.
 - (ii) Montrer que $\widehat{\check{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Exercice # 2.

- a) Soit $a > 0$. Soit $g^a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g^a(x) := e^{-ax^2}, x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer $h^a := \widehat{g^a}$.
Rappelons que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}$.
 - (i) Montrer que $g^a \in L^1$ et calculer $h^a(0)$.
 - (ii) Montrer que $h^a \in C^1$ et donner la formule de $(h^a)'$.
 - (iii) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(h^a)'(\xi) = -\frac{\xi h^a(\xi)}{2a}$. Indication : $x e^{-x^2/a} = -1/(2a) \left(e^{-ax^2} \right)'$.
 - (iv) Obtenir la formule $\widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = (\pi/a)^{1/2} e^{-\xi^2/(4a)}$.
Sous une forme plus compacte, nous avons $\widehat{g^a}(\xi) = (\pi/a)^{1/2} g^{1/(4a)}(\xi)$.
- b) Plus généralement, soit $g^a(x) := e^{-a|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\widehat{g^a}(\xi) = (\pi/a)^{n/2} g^{1/(4a)}(\xi), \forall a > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.
- c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive. Soit $f(x) := e^{-(Ax) \cdot x}, \forall x \in \mathbb{R}^n$. En utilisant la question précédente et un changement linéaire de variables, calculer \widehat{f} .

Exercice # 3. Voici une autre méthode pour calculer la transformée de Fourier des gaussiennes. Elle est inspirée par l'analyse complexe (attendre le prochain semestre).

$$\text{Soit } F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, F(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+is)^2} dx.$$

- Montrer que F est bien définie et de classe C^1 .
- Montrer que F est constante.
- En déduire la formule de la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2}$.

Exercice # 4. Dans \mathbb{R} , soit $f := \chi_{[0,1]}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ mais que $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1$. En déduire que la formule d'inversion de Fourier ne s'applique pas à toutes les fonctions de \mathcal{L}^1 .

Exercice # 5. Rappelons que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$. (Il s'agit d'une intégrale généralisée.)

Soit f la question de l'exercice précédent.

- Montrer que

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

- Voyez-vous un lien entre la formule ci-dessus et le fait que $f \in \mathcal{L}^2$?

Exercice # 6.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$. Calculer \hat{f} .
- Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Calculer \hat{g} .

Exercice # 7. Soit $\lambda > 0$. Soit

$$f(x) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)} dt, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
- Calculer \hat{f} .

Exercice # 8. (Résolution de l'équation de Helmholtz) Soit f la fonction de l'exercice précédent. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

- Montrer que $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
- Soit Δ le laplacien, c'est-à-dire $\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial(x_1)^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial(x_2)^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial(x_n)^2}(x), \forall u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.
Calculer $\mathcal{F}[(f * (\lambda g - \Delta g))]$.
- Trouver une solution $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de l'équation de Helmholtz $\lambda h - \Delta h = g$.

Exercice # 9. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := (\text{sgn } x) e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, g(x) := \frac{1}{x+i}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 10.

- Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction « radiale », c'est-à-dire de la forme $f(x) = g(|x|)$ pour une fonction Lebesgue mesurable $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que \hat{f} est radiale.
- Même propriété si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 11.

- a) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := \begin{cases} (1 - t^2)^{-1/2}, & \text{si } |t| < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1$.
- b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} |x|, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$. Calculer $\widehat{f}(\xi)$ en fonction de \widehat{g} , $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$. On pourra utiliser l'exercice précédent et calculer uniquement $\widehat{f}(t, 0)$, avec $t \geq 0$.

Exercice # 12. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-a|x|}$, où $a > 0$.

- a) À partir de la transformée de Fourier de $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1/(1 + x^2)$ et de l'identité

$$\frac{1}{1 + x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)t} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

montrer que

$$e^{-r} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1/2}} e^{-r^2/(4t)} dt, \quad \forall r > 0. \quad (1)$$

- b) En utilisant (1) et la transformée de Fourier des fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-ax^2}$, $a > 0$, montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = 2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2) \frac{a}{(a^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}},$$

avec $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ la fonction d'Euler.

Exercice # 13.

- a) Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $f * g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. (On pourra commencer par $f \in L^1 \cap L^2$.)
- b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, montrer que

$$f * g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi, \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

- c) Montrer que (2) est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- d) De même si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 14. Rappelons le résultat suivant du cours. Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et si $f^{(j)} \in L^1, \forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, alors

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3)$$

Nous nous proposons ici de montrer que, pour $k \geq 2$, il y a trop d'hypothèses dans ce résultat, et qu'il suffit de supposer que $f \in L^1$ et $f^{(k)} \in L^1$.

Plus spécifiquement, nous allons montrer que

$$[f \in L^1(\mathbb{R}), f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})] \implies [f' \in L^1(\mathbb{R}), \dots, f^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R})].$$

Ceci fait écho à l'inégalité de Landau (exercice # 19 de la feuille # 7), qui donne

$$[f \in L^1(\mathbb{R}), f'' \in L^\infty(\mathbb{R})] \implies f' \in L^2(\mathbb{R}).$$

- a) Prenons d'abord $k = 2$. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$.

- (i) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et f'' en utilisant la formule de Taylor à l'ordre deux sous forme intégrale au point x . En déduire une formule pour $f'(x)$.
 - (ii) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_{L^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f''\|_{L^1})$.
 - (iii) En déduire que, pour $k = 2, (3)$ peut s'obtenir sous les hypothèses plus faibles $f \in C^2, f, f'' \in L^1$.
- b) Soit maintenant $k \geq 3$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$.
- (i) Exprimer $f(x+1), f(x+2), \dots, f(x+k-1)$ en fonction de $f(x), f'(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$ et $f^{(k)}$ en utilisant la formule de Taylor à l'ordre k sous forme intégrale au point x . En déduire des formules pour $f'(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$.
 - (ii) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_{L^1} + \dots + \|f^{(k-1)}\|_{L^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f^{(k)}\|_{L^1})$.
 - (iii) En déduire que, pour tout $k \geq 2, (3)$ peut s'obtenir sous les hypothèses plus faibles $f \in C^k, f, f^{(k)} \in L^1$.

Exercice # 15. (La fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire détermine sa loi) Si μ est une mesure borélienne finie dans \mathbb{R}^n , nous définissons sa *transformée de Fourier* par la formule

$$\hat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- a) Montrer que $\hat{\mu}$ est bien définie, et que c'est une fonction continue et bornée.

Nous nous proposons d'établir l'analogie suivant de l'injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Soient μ_1, \dots, μ_k des mesures boréliennes finies dans \mathbb{R}^n , et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{\mu}_j = 0 \implies \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu_j = 0. \tag{4}$$

- b) Soit μ une borélienne finie dans \mathbb{R}^n . Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact, et soit $f := \chi_{-K}$. Soit $g := f * \mu$ (voir l'exercice #29 de la feuille # 7).

Montrer que :

- (i) g est continue et bornée.
- (ii) $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) $\hat{g} = \hat{f} \hat{\mu}$.

- c) Soient μ_1, \dots, μ_k des mesures boréliennes finies dans \mathbb{R}^n et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{\mu}_j = 0$.

Montrer que $\sum_{j=1}^k \alpha_j g_j(0) = 0$.

- d) En déduire que $\sum_{j=1}^k \alpha_j \mu_j(K) = 0$.

- e) En déduire que $\sum_{j=1}^k \alpha_j \mu_j = 0$. Indication : séparer les j tels que $\alpha_j \geq 0$ des j tels que $\alpha_j < 0$.

- f) Établir la conséquence suivante de (4) : si deux vecteurs aléatoires (avec le même nombre de coordonnées) ont la même fonction caractéristique, alors ils ont la même loi. (Voir l'exercice # 33 c) de la feuille # 3).