Contrôle terminal (5 janvier 2023)

Durée : 2 heures. Aucun document n'est autorisé, calculatrice non autorisée

Rappels et notations.

- *On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble X. Si $E \in \mathcal{P}(X)$, on note χ_E la fonction indicatrice de E (c-est-à-dire $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$, et 0 sinon).*
- *On notera λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^n}$. On notera aussi souvent simplement dx pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda_1(dx)$ sur $\mathbf{R}$, et $dxdy$ pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de lebesgue $\lambda_2(dx, dy)$ sur $\mathbf{R}^2$.*
- *Si E est une partie de l'espace produit $X \times Y$, on note $E_x := \{y \in Y, (x, y) \in E\}$ la coupe en x de l'ensemble E.*
- *On rappelle que pour tout réel x : $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$.*

Partie I : questions de cours et d'application du cours

1. Enoncer le lemme de Fatou et le théorème de convergence monotone.

   Applications :

   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n}{\sin^2(n) + nx^2} dx$

   (b) Montrer que $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{1+n}\right)^2$.

*****

2. Soit X un ensemble. Donner la définition d'une tribu sur X.

   Application : soient X et Y deux ensembles et $f : X \mapsto Y$ une fonction de X dans Y. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur X alors $\{B \subset Y,\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur Y.

*****

Partie II : exercices

3. Soit a et b deux réels dans $]0, 1[$ et $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine donné par

$$D = \{(x, y) \in]0, \infty[^2,\ a < \frac{y}{x} < \frac{1}{a},\ b < xy < \frac{1}{b}\}.$$

   En introduisant les nouvelles coordonnées $u = xy$ et $v = y/x$ sur un domaine bien choisi, calculer

$$\int_D \frac{y}{x} dxdy.$$

4. Soit $I = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$.
   (a) En faisant un changement de coordonnées polaires, calculer I.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

*****

5. Soit $G\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt.$$

   (a) Montrer que G est bien définie sur $]0,\infty[$.
   (b) Montrer G est deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et exprimer G' et G'' sous la forme d'une intégrale. Montrer que $G''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.
   (c) Calculer $\lim_{x\to\infty} G'(x)$ et en déduire la valeur de la fonction G'.
   (d) Montrer que pour $x > 0$,

$$G(x) = x\ln(x) - x\ln\sqrt{1+x^2} - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

   (e) Montrer que $\lim_{x\to 0} G(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$. (*Indication* : faire une intégration par partie). En déduire la valeur de cette dernière intégrale.

*****

6. (*Exercice plus difficile. Plusieurs notations de cet exercice sont rappelées en en-tête du sujet*). Pour $a \in \mathbf{R}^2$ et $r > 0$, on note $D(a,r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \|(x,y)-a\|_2 \le r\}$ le disque Euclidien fermé de $\mathbf{R}^2$ de centre a et de rayon r.
   Soit $D = D(0,1)$ le disque unité fermé de $\mathbf{R}^2$. On considère $(D_n)_{n\ge 0}$ une suite de disques **fermés** de $\mathbf{R}^2$ de rayons strictement positifs (c'est-à-dire que $D_n = D(a_n, r_n)$ pour des suites $(a_n) \in (\mathbf{R}^2)^{\mathbf{N}}$ et $(r_n) \in]0,\infty[^{\mathbf{N}}$). On suppose que les disques D_n sont deux à deux disjoints et tous inclus dans D. Le but de l'exercice est de montrer que si $\lambda_2(D \setminus \cup_{n\ge 0} D_n) = 0$ alors $\sum_{n\ge 0} r_n = \infty$.
   (a) Pour $n \ge 1$, on note $I_n = [(a_n)_1 - r_n, (a_n)_1 + r_n]$ la projection de D_n sur l'axe des abscisses. Montrer que si $\sum_{n\ge 1} r_n < \infty$, alors pour presque tout $x \in [-1,1]$ il existe seulement un nombre fini d'indices n tels que $x \in I_n$. *Indication : on pourra s'intéresser à la somme des fonctions indicatrices des* I_n, $f := \sum_{n\ge 0} \chi_{I_n}$.
   (b) (*difficile, peut être admis pour la question c)*) En déduire que si $\sum_{n\ge 1} r_n < \infty$, alors pour presque tout $x \in [-1,1]$,

$$\lambda_1\left((D \setminus \cup_{n\ge 1} D_n)_x\right) > 0,$$

   où $(D \setminus \cup_{n\ge 1} D_n)_x$ est la coupe en x de l'ensemble $D \setminus \cup_{n\ge 1} D_n$. (*Indication : on pourra montrer que pour preque tout* $x \in [-1,1]$, *la coupe* $(D \setminus \cup_{n\ge 1} D_n)_x$ *contient un ouvert non vide de* D_x).
   (c) Montrer par l'absurde que si $\lambda_2(D \setminus \cup_{n\ge 0} D_n) = 0$ alors $\sum_{n\ge 1} r_n = \infty$.