Corrigé du contrôle terminal (5 janvier 2023)

Durée : 2 heures. Aucun document n'est autorisé, calculatrice non autorisée

Partie I : questions de cours et d'application du cours

1. *Enoncer le lemme de Fatou et le théorème de convergence monotone.*
   Applications :
   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n}{\sin^2(n)+nx^2}dx$
   (b) Montrer que $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1+n}\right)^2$.

Corrigé. Voir le poly pour les questions de cours. a) On considère $f_n(x) = \frac{n}{\sin^2(n)+nx^2}$. On remarque que $f_n(x) \geq 0$ pour $x > 0$. On remarque aussi que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sin^2(n)/n)+x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

pour tout $x > 0$. D'autre part, comme la limite existe pour tout x, on a aussi

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$

En appliquant le lemme de Fatou sur $]0,\infty[$ pour la mesure de Lebesgue, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n}{\sin^2(n)+nx^2}dx \geq \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}dx = +\infty.$$

ceci implique que $\limsup_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \geq \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = +\infty$. Donc par résultat du cours $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = +\infty$.

b) On développe en série : $\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_0^\infty xe^{-(n+1)x}$, pour tout $x > 0$. On note $f_n(x) = xe^{-(n+1)x}$. La somme partielle $\sum_{n=0}^N f_n(x)$ est positive sur $]0,\infty[$ et croissante. Par le théorème de convergence monotone :

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty f_n(x)dx.$$

(On peut aussi justifier l'échange somme et intégrale par le théorème de Tonelli appliqué à la mesure et Lebesgue et la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$). On fait ensuite une intégration par partie pour calculer

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = [-\frac{1}{n+1}xe^{-(n+1)x}]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty e^{-(n+1)x}dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

*****

2. *Soit X un ensemble. Donner la définition d'une tribu sur X.*

Application : soient X et Y deux ensembles et $f : X \mapsto Y$ une fonction de X dans Y. Montrer que si $\mathcal{T}$ est une tribu sur X alors $\{B \subset Y,\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur Y.

Corrigé. Voir le poly pour la question de cours. On note $\mathcal{S} = \{B \subset Y,\ f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$. On vérifie chacune des conditions dans la définition de tribu.

i. On sait que $\emptyset \in \mathcal{T}$, donc $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$. On en déduit que $\emptyset \in \mathcal{S}$.

ii. Soit $B \in \mathcal{S}$. Donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, et $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{T}$. Donc $B^c \in \mathcal{S}$.

iii. Soit $(B_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{S}$. On a $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$, pour tout n. Donc, comme $\mathcal{T}$ est une tribu, $f^{-1}(\cup B_n) = \cup f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}$. On en déduit donc que $\cup B_n \in \mathcal{S}$.

*****

Partie II : exercices

3. *Soit a et b deux réels dans $]0,1[$ et $D \subset \mathbf{R}^2$ le domaine donné par*

$$D = \{(x,y) \in]0,\infty[^2,\ a < \frac{y}{x} < \frac{1}{a},\ b < xy < \frac{1}{b}\}.$$

En introduisant les nouvelles coordonnées $u = xy$ et $v = y/x$ sur un domaine bien choisi, calculer

$$\int_D \frac{y}{x} dxdy.$$

Corrigé. On nous dit d'introduire les nouvelles coordonnées u et v. On voit que si $(x,y) \in D$ alors $(u,v) \in D' :=]a, 1/a[\times]b, 1/b[$ et que de plus

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}.$$

On va donc considérer le changement de variable $\phi : D' \mapsto D$, donné par $\phi(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$. Comme $(u,v) \in D'$, alors $\phi(u,v) \in D$, et ϕ est bijectif par le calcul ci-dessus avec inverse $u = xy$ et $v = y/x$ qui sont dans D'. De plus ϕ est C^1 sur le domaine D'. on calcule le Jacobien :

$$D_\phi(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}(u,v) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} \\ -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2v} > 0.$$

La fonction ϕ est donc un C^1-difféomorphisme. On peut appliquer le changement de variables, et on a donc, au sens du changement de variable :

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{D'} f(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}) D_\phi(u,v) dudv.$$

On l'applique à $f(x,y) = y/x$, et on obtient

$$\begin{aligned}\int_D \frac{y}{x} dxdy = \frac{1}{2}\int_{D'} \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}}\frac{1}{v} dudv = \frac{1}{2}\int_{D'} 1 dudv &= \frac{1}{2}\int_a^{\frac{1}{a}} du \int_b^{\frac{1}{b}} dv \\ &= \frac{1}{2}(1/a - a)(1/b - b),\end{aligned}$$

en appliquant Tonelli dans l'avant dernière égalité (puisque l'intégrant est positif).

*****

4. *Soit $I = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$.*
   (a) *En faisant un changement de coordonnées polaires, calculer I.*
   (b) *En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.*

   Corrigé.

   (a) Par résultat du cours, par le changement de variables en polaire, on a au sens du changement de variables, en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$:
   $$I = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{[0,2\pi]\times\mathbf{R}_+} e^{-r^2} r dr d\theta$$
   En appliquant Tonelli (l'intégrant étant positif), on obtient
   $$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = (2\pi)(\frac{1}{2}) = \pi.$$
   (b) On peut d'autre part appliquer Tonelli à l'intégrale double I, l'intégrant étant positif
   $$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2.$$
   On obtient donc $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

*****

5. *Soit $G\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par*
   $$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt.$$
   (a) *Montrer que G est bien définie sur $]0,\infty[$.*
   (b) *Montrer G est deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et exprimer G' et G'' sous la forme d'une intégrale. Montrer que $G''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.*
   (c) *Calculer $\lim_{x\to\infty} G'(x)$ et en déduire la valeur de la fonction G'.*
   (d) *Montrer que pour $x > 0$,*
   $$G(x) = x\ln(x) - x\ln\sqrt{1+x^2} - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$
   (e) *Montrer que $\lim_{x\to 0} G(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. (Indication : faire une intégration par partie). En déduire la valeur de cette dernière intégrale.*

   Corrigé.

   (a) On note $f(t,x) = \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}$. La fonction f est mesurable en t pour tout $x > 0$, car continue. Soit $x \in]0,\infty[$, en utilisant $0 \le 1-\cos(t) \le \frac{t^2}{2}$, on a donc $|f(t,x)| \le \frac{1}{2} e^{-tx}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}_+$ pour la mesure de Lebesgue dt. La fonction f est donc intégrable en t sur $\mathbf{R}_+$, l'intégrale est donc bien définie pour tout $x \in]0,\infty[$.

(b) La fonction f est clairement C^∞ en la variable x pour tout $t > 0$. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = (1-\cos(t))e^{-tx}$. Soit $\epsilon > 0$: pour tout $x \in]\epsilon, \infty[$, on a en utilisant $0 \leq 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \frac{t}{2}e^{-t\epsilon}, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right| \leq \frac{t^2}{2}e^{-t\epsilon}.$$

qui sont bien intégrables par les règles usuelles (et ne dépendent pas de la variable x). On a donc une bonne domination, la fonction $f(x,t)$ étant C^2 en la variable x (et bien sûr mesurable en t car continue), on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres et on a

$$G'(x) = -\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}dt, \quad G''(x) = \int_0^\infty (1-\cos(t))e^{-tx}dt.$$

Calculons $G''(x)$. On a $G''(x) = \frac{1}{x} - \int_0^\infty \cos(t)e^{-tx}dt$. On peut procéder de deux façons, soit en faisant 2 intégration par parties soit en écrivant $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, ce qu'on fait ci-dessous :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(t)e^{-tx}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{t(i-x)}dt + \int_0^\infty e^{-t(i+x)}dt\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{i-x} + \frac{1}{i+x}\right) \\ &= \frac{x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Ceci conclue la question.

(c) Par convergence dominée on $\lim_{x\to\infty} G'(x) = 0$. En effet, soit $(x_n)_{n\geq 0}$ croissante telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et $x_n > 0$. On utilise la représentation intégrale de la question précédente. On a $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx_n} = 0$ pour tout $t > 0$, donc presque surement sur $[0, \infty[$. De plus, $x_n \geq x_0 > 0$, et on a $|\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx_n}| \leq \frac{t}{2}e^{-tx_0}$ qui est intégrable. On peut donc appliquer la convergence dominée qui donne $\lim_{n\to\infty} G'(x_n) = 0$. On en déduit que $\lim_{x\to\infty} G'(x) = 0$.
Comme primitive de $G''(x)$, on sait que $G'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \ln(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) + c$ pour une constante réelle c. Comme $\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) = 0$, on a $c = 0$ et

$$G'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

(d) On vérifie facilement que $\left(x\ln(x) - x\ln\sqrt{1+x^2} - \arctan(x)\right)' = G'(x)$. De plus, par convergence dominée (même argument que précédemment en dominant $|\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx_n}|$ par $\frac{1}{2}e^{-tx_0}$ qui est intégrable), on a que $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$. D'autre part, on a

$$x\ln(x) - x\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}x\ln(1 - \frac{1}{1+x^2}) \sim \frac{x}{1+x^2},$$

lorsque $x \to \infty$. Donc $\lim_{x\to\infty} x\ln(x) - x\ln\sqrt{1+x^2} - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} = 0$. On en déduit la formule de l'énoncé en identifiant les limites lorsque $x \to \infty$.

(e) On remarque que $|\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}| \leq 1$, et que d'autre part $|\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}| \leq \frac{1}{t^2}$. On peut donc dominer l'intégrant dans $G(x)$ par

$$|\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}| \leq \chi_{[0,1[}(t) + \frac{1}{t^2}\chi_{[1,\infty[}(t),\ \ \forall x > 0,$$

qui est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ par les règles classiques. D'autre part,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx} = \frac{1-\cos(t)}{t^2},$$

pour tout $t \in \mathbf{R}_+$. On peut donc appliquer la convergence dominée (à une suite $x_n \to 0$) et on a

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt.$$

Par intégration par partie, on a

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt = -\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

En utilisant la formule de la question précédente, on a d'autre part $\lim_{x\to 0} G(x) = \frac{\pi}{2}$, on en déduit $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

*****

6. (*Exercice plus difficile. Plusieurs notations de cet exercice sont rappelées en en-tête du sujet). Pour* $a \in \mathbf{R}^2$ *et* $r > 0$*, on note* $D(a,r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \|(x,y) - a\|_2 \leq r\}$ *le disque Euclidien fermé de* $\mathbf{R}^2$ *de centre* a *et de rayon* r.
   Soit $D = D(0,1)$ *le disque unité fermé de* $\mathbf{R}^2$*. On considère* $(D_n)_{n\geq 0}$ *une suite de disques* **fermés** *de* $\mathbf{R}^2$ *de rayons strictement positifs (c'est-à-dire que* $D_n = D(a_n, r_n)$ *pour des suites* $(a_n) \in (\mathbf{R}^2)^{\mathbf{N}}$ *et* $(r_n) \in]0,\infty[^{\mathbf{N}}$*). On suppose que les disques* D_n *sont deux à deux disjoints et tous inclus dans* D*. Le but de l'exercice est de montrer que si* $\lambda_2(D \setminus \cup_{n\geq 0} D_n) = 0$ *alors* $\sum_{n\geq 0} r_n = \infty$.
   (a) *Pour* $n \geq 1$*, on note* $I_n = [(a_n)_1 - r_n, (a_n)_1 + r_n]$ *la projection de* D_n *sur l'axe des abscisses. Montrer que si* $\sum_{n\geq 0} r_n < \infty$*, alors pour presque tout* $x \in [-1,1]$ *il existe seulement un nombre fini d'indices* n *tels que* $x \in I_n$*. Indication : on pourra s'intéresser à la somme des fonctions indicatrices des* I_n*,* $f := \sum_{n\geq 0} \chi_{I_n}$.
   (b) *(difficile, peut être admis pour la question c)) En déduire que si* $\sum_{n\geq 1} r_n < \infty$*, alors pour presque tout* $x \in [-1,1]$,
   $$\lambda_1\left((D \setminus \cup_{n\geq 1} D_n)_x\right) > 0,$$
   où $(D \setminus \cup_{n\geq 1} D_n)_x$ *est la coupe en* x *de l'ensemble* $D \setminus \cup_{n\geq 1} D_n$*. (Indication : on pourra montrer que pour preque tout* $x \in [-1,1]$*, la coupe* $(D \setminus \cup_{n\geq 1} D_n)_x$ *contient un ouvert non vide de* D_x*).*
   (c) *Montrer par l'absurde que si* $\lambda_2(D \setminus \cup_{n\geq 0} D_n) = 0$ *alors* $\sum_{n\geq 0} r_n = \infty$.

Corrigé.

(a) Soit $f := \sum_{n\geq 0} \chi_{I_n}$. On remarque $f(x)$ est le nombre d'entier n tels que $x \in I_n$. D'autre part, par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} \sum_{n\geq 0} \chi_{I_n}(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbf{R}} \chi_{I_n}(x)dx = \sum_{n\geq 0} \lambda(I_n) = \sum_{n\geq 0} 2r_n.$$

(En effet, la longueur de l'intervalle I_n est $2r_n$.) Donc si $\sum_{n\geq 0} r_n < \infty$, on en déduit que $\int f(x)dx < \infty$. Comme f est un fonction mesurable positive, on en déduit, par résultat du cours, que pour presque tout x on a $f(x) < \infty$. On en déduit donc que pout presque tout $x \in [-1,1]$ il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n tels que $x \in I_n$.

(b) Pour tout entier n, $(D_n)_x$ est soit vide (si $x \notin I_n$) soit un intervalle fermé non vide inclus dans D_x. Soit $x \in]-1,1[$ tel qu'il existe un nombre fini d'indices n tels que $x \in I_n$. Montrons que $D_x \setminus \cup_n (D_n)_x$ contient un intervalle ouvert. On a

— Soit il y a au moins deux entiers n tels que $x \in I_n$: comme il y en a d'autre part un nombre fini on peut trouver deux intervalles consécutifs $(D_{n_1})_x$ et $(D_{n_2})_x$ inclus dans D_x. Ils sont donc du type $[a,b]$ et $[c,d]$ avec $b < c$ (car disjoints). Donc l'intervalle $]b,c[$ est dans $D_x \setminus \cup_n (D_n)_x$.

— Soit il y a un seul entier n_1 tel que $x \in I_{n_1}$. Soit $(D_{n_1})_x$ est strictement inclus dans D_x, auquel cas $D_x \setminus \cup_n (D_n)_x$ contient un ouvert (car il est du type $[-a,a] \setminus [c,d]$ avec soit $c > -a$ soit $d < a$). Soit $(D_{n_1})_x = D_x$, ce qui est impossible, voir argument (*) ci-dessous.

On en déduit donc que pour presque tout $x \in [-1,1]$, $D_x \setminus \cup_n (D_n)_x$ contient un intervalle ouvert, donc, par résultat du cours, $\lambda_1((D \setminus \cup_n D_n)_x) > 0$.

(*) Supposons que pour $x \in]-1,1[$, on ait un entier n_1 tel que $(D_{n_1})_x = D_x$. On a donc que $(D_{n_1})_x = D_x$ sont du type $[-a,a]$ avec $a > 0$ (car $|x| < 1$ on est donc à l'intérieur de D). On sait que $r_{n_1} < 1$ car D_{n_1} est strictement inclus dans D (il y a une infinité de disques disjoints de rayon positifs dans D), donc a un rayon strictement plus petit que 1, qui est le rayon de D. D'autre part, le centre du cercle D_{n_1} est sur l'axe des abscisses car $(D_{n_1})_x$ est un intervalle symétrique. Donc les tangentes des cercles D et D_{n_1} se coupent strictement en le point (x,a) (faire un dessin pour visualiser), donc D_{n_1} ne peut pas être inclus dans D.

(c) Supposons donc que $\sum_{n\geq 0} r_n < \infty$. On a, en appliquant le théorème de Tonelli

$$\begin{aligned}\lambda_2(D \setminus \cup_{n\geq 0} D_n) &= \int_{D\setminus \cup_{n\geq 0} D_n} d\lambda_2(x,y) = \int_{[-1,1]^2} \chi_{D\setminus \cup_{n\geq 0} D_n}(x,y) d\lambda_2(x,y) \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \chi_{D\setminus \cup_n D_n}(x,y)dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \lambda_1\left((D \setminus \cup_n D_n)_x\right) dx.\end{aligned}$$

La justification de Tonelli vient du fait que la fonction indicatrice est positive et mesurable car $D \setminus \cup_n D_n$ est mesurable (car D et D_n sont des fermés).