

## Avancement du cours L3 Mesure et intégration – Automne 2022

Les numéros de section, définition, etc... font référence au notes de cours de Petru Mironescu :

[http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/cours\\_mesure\\_integracion.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/cours_mesure_integracion.pdf)

### Cours 1 : 06/09 (3h)

- Introduction : Motivation et idée très grossière des briques de la construction de l'intégrale de Lebesgue – schéma global du cours

Chapitre I

- Section 1.1 : Sup, inf, limsup, liminf (définition 1.1, def 1.2, remarque 1.4, proposition 1.6 avec preuve)
- Section 1.2 : Def 1.12, proposition 1.13, exercice 1.14.
- Pour aller plus loin : lire la section 1.4 (preuve complète de la proposition 1.13)

### Cours 2 : 13/09 (2h30)

- Section 1.3 : définitions des clans tribus, classes monotones, mesures (def 1.16, 1.18, 1.24, 1.26, 1.29, 1.31 – prop 1.22, 1.23, exemples etc...)

Chapitre II :

- Section 2.1 : structures engendrées (tribus, clans, classes monotones engendrées) et premières propriétés). Exo 2.5, 2.6, exemples.
- Section 2.2 : théorème des classes monotones avec preuve (th 2.9), principe d'application (rq 2.11)

### Cours 3 : 20/09 (2h30)

Chapitre II :

- Section 2.3 : tribu Borélienne (def 2.13), système de générateurs (prop 2.16) avec preuve de a)b). A lire : preuve prop 2.16 c).

Chapitre III

- Section 3.0 : définition générale de mesurabilité
- Section 3.1 : fonctions mesurables à valeurs dans  $R, \bar{R}$ . Caractérisation par préimages d'intervalles (prop 3.8). Fonctions étagées (def 3.2).
- Caractérisation des fonctions mesurables comme limite de fonctions étagées (th 3.5, cor 3.7). Fonctions mesurables à valeurs dans  $R^n$  (thm 3.9)

### Cours 4 : 27/09 (2h30)

- Section 3.2 : lim, sommes, compositions de fonctions mesurables, continu=>borélien (énoncés 3.20—3.25)
- Section 3.3 : sup, limsup et autres opérations sur les fonctions mesurables.

## Chap IV

- Section 4.1 : propriétés générales des mesures
- Section 4.4 : def 4.22 et def 4.24, prop 4.23 et corollaire 4.26 (*complément : lire Thm 4.25*)
- Section 4.5 : définition de la mesure de Lebesgue et propriétés (existence admise – unicité prouvée en  $d=1$ , prop 4.36)

## Cours 5 : 04/10 (2h45)

### Chap IV

- Section 4.2 : Mesures complétées : ensembles négligeables, tribu complétées (4.7—4.11). (preuves admises)
- Section 4.3 : presque partout et mesure complétée.

### Chap VI

- 6.1 : intégrales de fonctions étagées positives
- 6.2 : définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive
- Section 6.2 : définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive, définition de l'intégrale d'une fonction mesurable réelle, notion de « admet une intégrale », « fonction intégrable ». Prop-définitions 6.11 à 6.15
- Section 6.4 et 6.5 : théorème de cv monotone (preuve reportée) et conséquences : linéarité, inégalité triangulaire, inégalité de Markov, relation de Chasles, intégrales de séries, égalité p.p. (6.28—6.35). (preuves reportées)

## Cours 6 : 11/10 (2h45)

- Preuves des énoncés de la section Section 6.4 et 6.5, en particulier cv monotone.
- Section 6.6 : lien avec l'intégrale de Riemann pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact, lien avec les intégrales généralisées.
- Section 6.7 : cas des intégrales par rapport à la mesure de comptage, lien avec les séries.
- A lire en complément : section 6.7.4 (somme par paquets) et section 6.3 (en particulier énoncé 6.18—6.20).

### Chapitre 7

- Section 7.1&7.2 : Lemme de Fatou (thm 7.1&7.9), convergence dominée (thm 7.2&7.10), version p.p. de la convergence monotone (thm 7.8). Preuve des 3 thms dans les versions « partout » (section 7.1).

## Cours 7 : 25/10 (2h)

- Retour chapitre 6 : Section 6.3&6.4 : séries commutativement sommables – sommes par paquets

### Chapitre 7

- Section 7.3 : continuité d'un intégrale dépendant d'un paramètre (thm 7.12&7.13). Exemple de la fonction zeta.

- Section 7.4 : dérivabilités des intégrales à paramètres, dérivées d'ordre supérieur.  
Reste à faire : preuve + exemple de la fonction zeta.

### **Cours 8 : 8/11 (2h)**

- Section 7.4 : dérivabilités des intégrales à paramètres, dérivées d'ordre supérieur.  
Exemple de la fonction zeta.
- Section 7.5 : Lien avec les séries de fonctions. Intégrale d'une série.

#### *Chapitre 8 :*

- Section 8.1 : Tribu produit (8.1—8.3).
- Section 8.2 : mesure produit, preuve de l'existence et l'unicité.

### **Cours 9 : 15/11 (2h)**

- Section 8.2-8.3 : Corollaire 8.13. Produits itérés (preuves admises). Cas de la mesure de Lebesgue (prop 8.3, 8.11 & corollaire 8.13).
- Section 8.4 : Théorèmes de Tonelli dans le cas des fonctions positives ou de Fubini pour les fonctions intégrables (8.22 à 8.26). Version locale des théorèmes (intégration sur un sous-ensemble mesurable). Applications aux cas de  $\mathbb{R}^n$  et de l'inversion série intégrale.

### **Cours 10 : 22/11 (2h30)**

- Chap 8 : Esquisse de preuve du théorème de Tonelli et Fubini (voir détails dans le poly)
- A lire en complément (optionnel) : section 8.6 sur les mesures produits complétées

#### *Chapitre 9*

- Section 8.4 : définition 9.8 d'un  $C^1$  difféomorphisme et de la matrice Jacobienne. Enoncé du théorème d'inversion globale et formules pour la matrice Jacobienne de l'application inverse.
- Section 9.6 : Théorème du changement de variables (Thm 9.14 & remarque 9.15). démonstration admise. Méthode de restriction au complémentaire d'un ensemble négligeable. Exemple d'ensembles négligeables de  $\mathbb{R}^n$  et proposition 9.16 & corollaire 9.17 (preuves admises).
- Formule du changement de variable en polaire. Changement de variables sphérique.