Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Mesure et Intégration Durée : 75min

Contrôle Continu 1

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$x_n = n^2 \exp((-1)^n n).$$

Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 2. Soit $X = \mathbb{N}$. On considère $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble de parties de $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathcal{A} := \{\, \{3k\},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Déterminer $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $B \subset X$ défini par

$$B := \{x \in X;\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

est mesurable, c'est-à-dire que $B \in \mathcal{T}$.

Exercice 4. On considère $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$ avec P mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire une mesure telle que $P(\mathbb{R}) = 1$). Le but de l'exercice est de calculer

$$\lim_{x\to+\infty} P([x, 2x]). \tag{1}$$

1. Calculer la limite dans (1) dans le cas particulier où $P = \delta_a$ avec $a \in \mathbb{R}$, où δ_a est la mesure de Dirac en a. (On rappelle que la mesure de Dirac est définie pour tout Borélien A par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et $\delta_a(A) = 0$ sinon.)
2. On revient au cas général où P est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
   a. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle croissante vers $+\infty$.
   Calculer $\lim_{n\to\infty} P([x_n, +\infty[)$.
   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} P([x, 2x])$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que le graphe de f, $G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.