Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Mesure et Intégration Durée : 75min. Aucun document n'est autorisé

Contrôle Partiel 2

La soin apporté à la justification des réponses et à la présentation des copies sera un élément pris en compte lors de la notation.
Comme dans le cours et les TD, on notera simplement dx pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda(dx)$ sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que pour tout réel x : $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$. On rappelle la formule dérivée : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Questions de cours. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Donner la définition de l'intégrale $\int_X f d\mu$ d'une fonction f étagée positive sur X.
2. Donner la définition de l'intégrale $\int_X f d\mu$ d'une fonction f mesurable positive sur X. Donner la définition d'une fonction intégrable sur X.

Exercice 1. Montrer que pour tout réel $u \in [0, \infty[$, $\frac{u^2}{1+u^3} \leq 1$. Pour tout entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{n^2(1-\cos(x))}{1+(nx)^3}$. Montrer que la fonction f_n est bornée sur $[0,1]$, uniformément en n. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n dx.$$

Exercice 2. Soit $p > 0$, et

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1. Justifier pourquoi l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est bien définie pour $p > 0$.
2. Déterminer $\lim_{p\to+\infty} F(p)$.
3. Montrer que la fonction $F(p)$ est continuement dérivable pour $p > 0$ et exprimez $F'(p)$ sous la forme d'une intégrale.
4. Calculer $F'(p)$. *Indication : on pourra vérifier que* $x \mapsto \frac{p\sin x + \cos x}{1+p^2} e^{-px}$ *est une primitive de* $-e^{-px}\sin x$.
5. En déduire la valeur de $F(p)$.

Exercice 3.
1. Montrer que pour tout $p > 0$, la fonction $G(x,y) = \cos(xy)e^{-px}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.
2. En calculant de deux façons l'intégrale de G sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$, retrouver le résultat de l'exercice précédent, c'est-à-dire calculez $F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.

1. On suppose f positive. Montrer que
$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$
2. En déduire que si f est intégrable pour la mesure de Lebesgue, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge pour presque tout $x \in [0,1]$, puis montrer que c'est aussi vrai pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.