Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Mesure et Intégration Durée : 75min. Aucun document n'est autorisé

Contrôle Partiel 2 - Corrigé

La soin apporté à la justification des réponses et à la présentation des copies sera un élément pris en compte lors de la notation.
Comme dans le cours et les TD, on notera simplement dx pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda(dx)$ sur $\mathbb{R}$.
On rappelle que pour tout réel x : $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$. On rappelle la formule dérivée : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Questions de cours. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Donner la définition de l'intégrale $\int_X f d\mu$ d'une fonction f étagée positive sur X.
2. Donner la définition de l'intégrale $\int_X f d\mu$ d'une fonction f mesurable positive sur X. Donner la définition d'une fonction intégrable sur X.

Exercice 1. Montrer que pour tout réel $u \in [0, \infty[$, $\frac{u^2}{1+u^3} \leq 1$. Pour tout entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{n^2(1-\cos(x))}{1+(nx)^3}$. Montrer que la fonction f_n est bornée sur $[0,1]$, uniformément en n. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n dx.$$

Correction Pour tout $u \in [0,1]$ on a $u^2 \leq 1 \leq 1+u^3$ et pour $u \geq 1$ on a $u^2 \leq u^3 \leq 1+u^3$, d'où $\frac{u^2}{1+u^3} \leq 1$. D'après le rappel en début d'énoncé, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq \frac{\frac{1}{2}(nx)^2}{1+(nx)^3} \leq 1$ d'après la question précédente. Comme f_n est positive (puisque $\cos(x) \leq 1$), on a donc montré que pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq 1$, donc f_n est bornée uniformément en n.
Pour tout $x \in]0,1]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{2n^2}{1+n^3x^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite f_n converge donc simplement vers 0 sur $[0,1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue donc mesurable. On a aussi montré que la suite $(f_n)_n$ est dominée par la fonction constante égale à 1, qui est intégrable sur $[0,1]$ puisque $[0,1]$ est de mesure finie. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Exercice 2. Soit $p > 0$, et

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1. Justifier pourquoi l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est bien définie pour $p > 0$.
2. Déterminer $\lim_{p\to+\infty} F(p)$.

3. Montrer que la fonction $F(p)$ est continuement dérivable pour $p > 0$ et exprimez $F'(p)$ sous la forme d'une intégrale.
4. Calculer $F'(p)$. *Indication : on pourra vérifier que* $x \mapsto \frac{p\sin x+\cos x}{1+p^2}e^{-px}$ *est une primitive de* $-e^{-px}\sin x$.
5. En déduire la valeur de $F(p)$.

Correction

1. La fonction $h(p,\cdot) : x \mapsto e^{-px}\frac{\sin x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $|h(p,\cdot)| \leq e^{-px}$ (car $\frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1$ pour tout $x > 0$), et la fonction $x \mapsto e^{-px}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'où l'intégrabilité de $h(p,\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On peut appliquer le théorème de convergence dominée, ou remarquer que la majoration à la question précédente montre aussi que $|F(p)| \leq \int_{\mathbb{R}_+} e^{-px}dx = 1/p$, donc $F(p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre. On vient de voir que pour tout $p > 0$, $h(p,\cdot)$ est intégrable. Pour tout $x > 0$, $h(\cdot,x)$ est clairement $\mathcal{C}^1$, de dérivée
$$\frac{d}{dp}h(\cdot,x)(p) = -e^{-px}\sin x$$
Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $p \geq \epsilon$ la dérivée est dominée par $e^{-\epsilon x}$, ce qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, qui montre que F est $\mathcal{C}^1$ et $F'(p) = \int_{\mathbb{R}_+} -e^{-px}\sin x dx$.
4. On vérifie facilement l'indication par dérivation. On obtient alors
$$F'(p) = \left[\frac{p\sin x+\cos x}{1+p^2}e^{-px}\right]_0^\infty = -\frac{1}{1+p^2}.$$
5. En intégrant, on obtient $F(p) = -\arctan p + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. La question 2 permet de déterminer C, puisque $\lim_{p\to\infty}\arctan p = \pi/2$. On doit donc avoir $F(p) = \pi/2 - \arctan p$.

Exercice 3. 1. Montrer que pour tout $p > 0$, la fonction $G(x,y) = \cos(xy)e^{-px}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.

2. En calculant de deux façons l'intégrale de G sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$, retrouver le résultat de l'exercice précédent, c'est-à-dire calculez $F(p) = \int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx$.

Correction

1. Soit $p > 0$. G est continue donc mesurable. Par un corollaire du théorème de Tonelli, il suffit donc de montrer que $\int_{\mathbb{R}_+}\int_{[0,1]}|G(x,y)|dydx < \infty$ (ou le même résultat en inversant l'ordre d'intégration). Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$,
$$|G(x,y)| \leq e^{-px},$$
donc
$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{[0,1]}|G(x,y)|dydx \leq \int_{\mathbb{R}_+} e^{-px}dx = 1/p < \infty.$$
Remarque Erreurs courantes dans les copies :
   (a) G n'est pas positive !
   (b) Une fonction bornée n'est pas nécessairement intégrable si l'ensemble d'intégration est de mesure infinie (par exemple, une fonction constante n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$).

2. D'après la question précédente, G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini à son intégrale :
$$\int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} G(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+}\int_0^1 G(x,y)dydx = \int_0^1\int_{\mathbb{R}_+} G(x,y)dxdy.$$
Utilisons la première expression : pour tout $x > 0$,
$$\int_0^1 G(x,y)dy = e^{-px}\left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_0^1 = e^{-px}\frac{\sin x}{x}.$$
L'intégrale de G sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ est donc égale à $F(p)$.
Utilisons la deuxième expression pour calculer cette quantité : pour tout $y \in]0,1[$,
$$\int_{\mathbb{R}_+} G(x,y)dx = \mathfrak{Re}\left(\int_0^\infty e^{ixy}e^{-px}dx\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{p-iy}\right) = \mathfrak{Re}\left(\frac{p+iy}{p^2+y^2}\right) = \frac{p}{p^2+y^2}.$$
Reste à intégrer en y :
$$F(p) = \int_0^1 \frac{p}{p^2+y^2}dy \overset{u=y/p}{=} \int_0^{1/p}\frac{p}{p^2(1+u^2)}pdu = \int_0^{1/p}\frac{1}{1+u^2}du = \arctan\left(\frac{1}{p}\right).$$
Remarque C'est bien le même résultat qu'à l'exercice 2 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.

1. On suppose f positive. Montrer que
$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$
2. En déduire que si f est intégrable pour la mesure de Lebesgue, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge pour presque tout $x \in [0,1]$, puis montrer que c'est aussi vrai pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction

1. Soient λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$. Par théorème de Tonelli appliqué à $\lambda \otimes \mu$ et à la fonction positive sur $[0,1]\times\mathbb{Z}$ $(x,n) \mapsto f(x+n)$,
$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(x+n)dx \overset{y=x+n}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$
Remarque On pouvait aussi justifier l'interversion série/intégrale dans la première égalité par convergence monotone.
2. On ne suppose plus f positive. Comme f intégrable, $\int_R |f|(x)dx < \infty$. Grâce au résultat précédent appliqué à $|f|$, $\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|dx < \infty$. La fonction positive $g : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|$ est donc d'intégrale finie sur $[0,1]$, ce qui implique qu'elle est finie pour presque tout $x \in [0,1]$ (car $\int_0^1 g(x)dx \geq \int_{g^{-1}(\infty)} g(x)dx$, et l'intégrale de droite est infinie sauf si $\lambda(g^{-1}(\infty)) = 0$). Pour presque tout $x \in [0,1]$, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ qui converge absolument, et donc qui converge.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x-\lfloor x\rfloor+n)|$, avec $x - \lfloor x\rfloor \in [0,1]$. Considérons l'ensemble
$$B = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x-\lfloor x\rfloor+n)| \text{ diverge}\}.$$
On peut aussi écrire
$$B = \{y+k : y \in [0,1], k \in \mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(y+k+n)| \text{ diverge}\} = \cup_{k\in\mathbb{Z}} B_k,$$
où $B_k = \{y+k : y \in [0,1], \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(y+k+n)| \text{ diverge}\} = \{y+k : y \in [0,1], \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(y+n)| \text{ diverge}\}$. Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue, comme $\lambda(B_0) = 0$, B_k est de mesure nulle pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par suite, B est de mesure nulle comme union dénombrable d'ensembles de mesure nulle.