Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2022-2023
Mesure et Intégration — Durée : 75min

Contrôle Continu 1

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours

1. Soit (X, d) un espace métrique. Donner la définition de la tribu borélienne sur X notée $\mathcal{B}_X$.
2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure μ sur $\mathcal{T}$.

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$x_n = n^2 \exp((-1)^n n).$$

Calculer $\limsup_{n\to\infty} x_n$ et $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 2. Soit $X = \mathbb{N}$. On considère $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble de parties de $\mathbb{N}$ défini par

$$\mathcal{A} := \{\, \{3k\},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Déterminer $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $B \subset X$ défini par

$$B := \{x \in X;\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

est mesurable, c'est-à-dire que $B \in \mathcal{T}$.

Exercice 4. On considère $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$ avec P mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire une mesure telle que $P(\mathbb{R}) = 1$). Le but de l'exercice est de calculer

$$\lim_{x\to+\infty} P([x, 2x]). \tag{1}$$

1. Calculer la limite dans (1) dans le cas particulier où $P = \delta_a$ avec $a \in \mathbb{R}$, où δ_a est la mesure de Dirac en a. (On rappelle que la mesure de Dirac est définie pour tout Borélien A par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et $\delta_a(A) = 0$ sinon.)
2. On revient au cas général où P est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
   a. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle croissante vers $+\infty$.
   Calculer $\lim_{n\to\infty} P([x_n, +\infty[)$.
   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} P([x, 2x])$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que le graphe de f, $G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

Correction :

Exercice 1 Observons que $x_{2n} = n^2 \exp(n)$ et $x_{2n+1} = n^2 \exp(-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} x_{2n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} x_{2n+1} = 0.$$

Comme $\lim_n x_{2n} = +\infty$ et $\lim_n x_{2n+1} = 0$, on déduit que la suite $(x_n)_n$ a exactement deux points d'adhérence : 0 et $+\infty$, et on conclut que $\liminf_n x_n = 0$ et $\limsup_n x_n = +\infty$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{A} := \{\, \{3k\},\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Notons

$$M := \{3k,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$$

et posons

$$\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N}; A \subset M \ \text{ ou } \ A^c \subset M\}.$$

On va montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$.
   i) On a $\emptyset \subset M$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}$.
   ii) Soit $A \in \mathcal{T}$, montrons que $A^c \in \mathcal{T}$. Deux cas :
      a. $A \subset M$ et donc $A = (A^c)^c \subset M$ et par suite $A^c \in \mathcal{T}$ car son complémentaire est inclus dans M.
      b. $A^c \subset M$ et donc $A^c \in \mathcal{T}$ car il est inclus dans M.

      On a donc montré que dans les deux cas, $A^c \in \mathcal{T}$.
   iii) Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$. Montrons que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$. Deux cas :
      a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset M$. On a alors $\bigcup_n A_n \subset M$ et par suite $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$.
      b. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A_{n_0}^c \subset M$. On a alors

      $$\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subset A_{n_0}^c \subset M$$

      et donc $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$ car son complémentaire est inclus dans M.

      On a donc montré que dans les deux cas, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$.

   Par suite, $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$.
2. Montrons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$.
   On a $\forall \{3k\} \in \mathcal{A}$, $(k \in \mathbb{N})$, $\{3k\} \subset M$ et donc $\{3k\} \in \mathcal{T}$. Par suite $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$.

   On déduit de 1) et 2) que $\mathcal{T}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{A}$, on a alors

   $$\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}. \tag{2}$$
3. Reste à montrer que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$.
   Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$ (et que $\emptyset \in \ \mathcal{T}(\mathcal{A})$ car $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ tribu), on alors, par stabilité de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ tribu par union au plus dénombrable et par passage au complémentaire, que $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ contient $\mathcal{T}$ i.e.

   $$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{A}.) \tag{3}$$

.

Conclusion : On déduit de (2) et (3) que $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$.

Exercice 3
1ère méthode : On a

$$\begin{aligned} B &:= \{x \in X;\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty\} \\ &= \{x \in X; \forall M \geq 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ f_n(x) \geq M\} \\ &= \{x \in X; \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ f_n(x) \geq k\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} f_n^{-1}([k, +\infty[) \end{aligned}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable et que $[k, +\infty[\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ car c'est un fermé de $\mathbb{R}$ (ou car intervalle), on a alors $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $f_n^{-1}([k, +\infty[) \in \mathcal{T}$ car image réciproque par une fonction mesurable d'un borélien de $\mathbb{R}$.
On déduit alors par stabilité de $\mathcal{T}$ tribu par union et intersection dénombrable, que $B \in \mathcal{T}$ i.e. mesurable.
2ème méthode :

$$\begin{aligned} B &:= \{x \in X;\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty\} \\ &= \{x \in X;\ \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = +\infty\} \\ &= \{x \in X;\ \liminf_n f_n(x) = +\infty\} \qquad (4) \\ &= \left(\liminf_n f_n\right)^{-1} (\{+\infty\}) \end{aligned}$$

où on a utilisé dans (4) le fait que pour $x \in X$, si $\liminf_n f_n(x) = +\infty$ alors $\limsup_n f_n(x) = +\infty$ car $\limsup_n f_n(x) \geq \liminf_n f_n(x)$.

Conclusion : Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable, alors d'après le cours $\liminf_n f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est aussi mesurable. D'autre part, $\{+\infty\} \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

On déduit alors que $B = \left(\liminf_n f_n\right)^{-1} (\{+\infty\}) \in \mathcal{T}$ car image réciproque par une fonction mesurable d'un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque (Erreur courante dans les copies) : La limite simple de $(f_n)_n$ sur X n'existe pas forcément . On ne peut pas donc dire que $B = (\lim_n f_n)^{-1}(\{+\infty\})$, c'est faux!!!

Par contre, pour une suite de fonctions $(f_n)_n$ de X à valeurs dans $\mathbb{R}$, les deux fonctions $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont bien définies de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont mesurables si f_n est mesurable pour tout n.

Exercice 4

1. On observe que pour tout $x > a$ avec $x \geq 0$, on a que $a \notin [x, 2x]$ et donc $\delta_a([x, 2x]) = 0$, $\forall x \geq 0$ avec $x > a$.
   Par suite, $\lim_{x\to+\infty} \delta_a([x, 2x]) = 0$.
2. a. Comme la suite $([x_n, +\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (car $(x_n)_n$ croissante) de boréliens de $\mathbb{R}$ avec $P([x_n, +\infty[) < +\infty$ pour tout n (il aurait suffi que çe soit vraie pour un n_0) car P est une mesure de probabilité donc finie, alors d'après le cours

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, +\infty[\right) = \lim_{n\to+\infty} P([x_n, +\infty[).$$

Comme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, +\infty[= \emptyset$, on déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty} P([x_n, +\infty[) = P(\emptyset) = 0.$$

b. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle croissante tel que $\lim_n x_n = +\infty$. Comme $\lim_n x_n = +\infty$, on peut supposer que $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} P([x_n, 2x_n]) = 0$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $[x_n, 2x_n] \subset [x_n, +\infty[$ et donc $0 \leq P([x_n, 2x_n]) \leq P([x_n, +\infty[)$. Comme d'après a., $\lim_{n\to+\infty} P([x_n, +\infty[) = 0$, on déduit alors que $\lim_{n\to+\infty} P([x_n, 2x_n]) = 0$.

Conclusion : On a montré que $\forall (x_n)_n$ suite réelle croissante vers $+\infty$, $\lim_n P([x_n, 2x_n]) = 0$, on déduit alors que $\lim_{x\to+\infty} P([x, 2x]) = 0$.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrons que le graphe de f, $G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, y = f(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} G(f) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, y = f(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, y - f(x) = 0\} \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & y - f(x) \end{array}$$

On a $g = p_2 - f \circ p_1$ où p_1 et p_2 sont les projections canoniques de $\mathbb{R}^2$ continues (car linéaires par exemple et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie) et donc en particulier boréliennes. Par suite, g est borélienne par composée et somme de fonctions boréliennes.

Comme $G(f) = g^{-1}(\{0\})$, avec g est borélienne et $\{0\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on déduit alors que $G(f) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ (image réciproque par une fonction borélienne d'un borélien de $\mathbb{R}$).

Remarque (Erreur courante dans les copies) : f borélienne n'implique pas f continue. Prenez l'exemple de $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ borélienne car $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ alors que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.