

Feuille de TD # 0
Opérations sur les ensembles

Cadre, notations

1. Nous travaillons dans un ensemble fixé X .
2. Les parties (sous-ensembles) de X sont notées A, B , etc. « A est une partie de X » s'écrit $A \subset X$ ou $X \supset A$.
3. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathcal{P}(X)$.
4. $(A_i)_{i \in I}$ désigne une famille de parties de X , indexée par un ensemble *quelconque* (donc pas nécessairement fini ou dénombrable) d'indices.
5. Rappelons les opérations usuelles avec les ensembles.
 - (i) (Union) $A \cup B := \{x \in X ; x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
 - (ii) (Intersection) $A \cap B := \{x \in X ; x \in A \text{ et } x \in B\}$.
 - (iii) (Différence) $A \setminus B := \{x \in X ; x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
 - (iv) (Différence symétrique)
$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in X ; [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}.$$
 - (v) (Complémentaire) $A^c := X \setminus A = \{x \in X ; x \notin A\}$.
 - (vi) (Produit cartésien) Si X, Y sont des ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y) ; x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
6. Une suite $(A_n)_{n \geq k}$ de parties de X est *croissante* si $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \geq k$. Elle est *décroissante* si $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \geq k$.

Exercice # 1. (Échauffement.)

- a) Dessiner « avec des patates » les ensembles $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A^c, A \Delta B$.
- b) Calculer $(A \Delta B) \Delta A$.

Exercice # 2. (Propriétés fondamentales.) Montrer les propriétés suivantes.

- a) $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$ et $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$.
- b) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.
- c) $A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$ et $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \setminus B = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B)$.
- d) $A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \setminus B = \bigcap_{i \in I} (A_i \setminus B)$.
- e) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$.

f) Dédurre de la question précédente deux formules pour $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$, respectivement deux formules pour $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

Exercice # 3. Soient X un ensemble et A et B deux parties fixées de X .

a) Simplifier les conditions suivantes portant sur la partie C de X .

$$(i) A \cup C \subset B \cup C; (ii) A \cap C \subset B \cap C; (iii) (A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \emptyset.$$

b) On définit $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(C) := (A \cap C, B \cap C)$. Déterminer, pour le couple (A, B) , une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (i) injective; (ii) surjective.

Exercice # 4. (Fonction indicatrice.) Soit X un ensemble. Pour une partie A de X , on définit sa fonction

$$\text{indicatrice } \chi_A : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ par } \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

a) Calculer χ_\emptyset et χ_X . Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.

b) Exprimer simplement en fonction de χ_A et χ_B les fonctions χ_{A^c} , $\chi_{A \cap B}$, $\chi_{A \cup B}$ (dans le cas général et dans le cas particulier où $A \cap B = \emptyset$), $\chi_{A \Delta B}$, $\chi_{f^{-1}(A)}$ (avec $f : Y \rightarrow X$).

c) Rappelons la notation suivante. Si B et C sont des ensembles, alors

$$B^C := \{f : C \rightarrow B\} \text{ (l'ensemble de fonctions de } C \text{ vers } B).$$

L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathcal{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$?

d) Montrer, à l'aide des fonctions caractéristiques, l'égalité $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Exercice # 5. (Suites d'ensembles.) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de parties de X .

a) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissante, alors $\bigcup_{n \geq n_0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n, \forall n_0 \in \mathbb{N}$.

b) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, alors $\bigcap_{n \geq n_0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} A_n, \forall n_0 \in \mathbb{N}$.

c) Soit $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissante, alors la suite $(\chi_{A_n})_{n \geq 0}$ est croissante et converge simplement vers χ_A .

d) Énoncer et prouver le résultat analogue au précédent pour une suite décroissante.

e) Soit $A := \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Si les A_n sont d. d. d. (deux à deux disjoints), montrer que $\chi_A = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Exercice # 6. (Image directe, image réciproque.) On se donne deux ensembles X et Y et une application $f : X \rightarrow Y$.

Si $A \subset X$, on définit $f(A) := \{f(x); x \in A\}$.

Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$.

Montrer les propriétés suivantes de l'image réciproque $B \mapsto f^{-1}(B)$.

$$a) f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

$$b) f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

$$c) f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

d) Si, de plus, g est une application de Y vers un ensemble Z , alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Pour l'image directe $A \mapsto f(A)$, les relations analogues ne sont pas vraies en général.

- e) Montrer que $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
- f) Montrer que $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$ et donner un exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.
- g) Montrer par des exemples qu'en général il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $f(A)^c$.

Exercice # 7. (Injectivité.) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a) f est injective.
- b) $\forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$.
- c) $\forall x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

Exercice # 8. (Surjectivité.) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a) f est surjective.
- b) $\forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$.
- c) $\forall y \in Y, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice # 9. (Produit cartésien.)

- a) Soient $A, C \in \mathcal{P}(X)$ et $B, D \in \mathcal{P}(Y)$. Montrer l'implication

$$(A \times B) \cap (C \times D) \neq \emptyset \implies [A \cap C \neq \emptyset \text{ et } B \cap D \neq \emptyset].$$

- b) Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, écrire $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ comme une union finie de produits cartésiens deux à deux disjoints.
- c) Si $A_i \subset X$ et $B_i \subset Y, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $(X \times Y) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i\right)$ s'écrit comme une union finie de produits cartésiens.

Exercice # 10. (Coupes.) Si $E \subset X \times Y$, soient

$$\forall x \in X, E_x := \{y \in Y ; (x, y) \in E\} \text{ et } \forall y \in Y, E^y := \{x \in X ; (x, y) \in E\}.$$

- a) Si $X = Y = \mathbb{R}$, « dessiner » E_x et E^y pour une « patate ».
- b) Si $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, trouver E_x et E^y pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$.
- c) Montrer que $\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)_x = \bigcup_{i \in I} (E_i)_x, \forall x \in X$ et $\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)^y = \bigcup_{i \in I} (E_i)^y, \forall y \in Y$.

Exercice # 11. (Union d. d. d.) La notation $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ est utilisée pour la réunion d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles deux à deux disjoints (d. d. d.).

- a) Si A_0, A_1, \dots , sont des parties de X , soient $B_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1, B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i\right)$. Montrer que $\bigcup_i A_i = \bigsqcup_i B_i$.
- b) Montrer que $\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigsqcup_{i \in I} A_i \times B$.