Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3[e] année
Mesure et intégration — Année 2020–2021

Feuille de TD # 3
Intégrale. Convergence monotone et dominée

Exercice # 1. Écrire de manière plus simple la quantité $\int f\,d\mu$ lorsque :

a) μ est une mesure de Dirac.
b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Exercice # 2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $f = \chi_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\int f\,d\mu = \mu(A)$.
b) Si $f = a\,\chi_A + b\,\chi_B$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{T}$, alors $\int f\,d\mu = a\,\mu(A) + b\,\mu(B)$.
c) Si $f : X \to [0, \infty]$ est intégrable, alors $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$.
d) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$, alors f est intégrable.
e) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f = 0$, alors $f = 0$.
f) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f = 0$, alors $f = 0$ μ-p. p.
g) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ-p. p., alors $\int f = 0$.
h) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice # 3. Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

a) Soit $I :=]0, 1[$. Soit $0 < \alpha < \infty$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur I ?
b) Même question avec $I := [1, \infty[$ et $I :=]0, \infty[$.

Exercice # 4.

a) On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

b) Mêmes questions pour la fonction $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercice # 5. Étudier l'existence et la finitude de :

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$, $a = 1, 3/2, 2$, au sens des intégrales généralisées ou de Lebesgue.

b) La somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$, $a = 1, 2$.

c) L'intégrale $\int_{\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a}\, d\mu(n)$, $a = 1, 2$, avec μ la mesure de comptage.

Exercice # 6. (Théorème de convergence décroissante) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite *décroissante* de fonctions mesurables positives sur X, avec f_0 intégrable.

a) Montrer (en utilisant le théorème de convergence monotone) que $\lim_n \int f_n\, d\mu = \int \lim_n f_n\, d\mu$.

b) Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse d'intégrabilité de f_0 est essentielle.

Exercice # 7. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n := \int_{\mathbb{R}} (\cos \pi t)^{2n}\, dP(t)$.

a) Montrer que $I_n < \infty, \forall\, n$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

c) Déterminer $\lim_n I_n$.

Exercice # 8. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \to [0, \infty]$ une application mesurable.

a) Soient $A := \{x \in X\,;\, f(x) > 1\}$, $B := \{x \in X\,;\, f(x) = 1\}$ et $C := \{x \in X\,;\, f(x) < 1\}$.
Déterminer $\lim_n \int_{A\cup B} f^n\, d\mu$.

b) Déterminer $\lim_n \int_X f^n\, d\mu$. On pourra commencer par le cas où $\int_X f\, d\mu < \infty$.

Exercice # 9. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$. Pour $x \geq 0$, soit $F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt}\, dP(t)$.

a) Montrer que F est décroissante.

b) Déterminer $\lim_n F(n)$.

c) En déduire la valeur de $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

Exercice # 10.

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de fonctions boréliennes positives sur I, alors

$$\sum_{n\geq n_0} \int_I f_n\, d\nu_1 = \int_I \left(\sum_{n\geq n_0} f_n \right) d\nu_1.$$

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice # 11. Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite suivante :

$$\lim_n \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice # 12. Calculer la limite

$$\lim_n \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3}\, dx.$$

Exercice # 13. Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda\, (= \nu_1)$. Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur I et déterminer $\lim_n \int_I f_n\, d\lambda$.

a) $I := [0,1]$, $f_n(x) := \dfrac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}$, où $1 < \alpha < 2$.

b) $I := [A, \infty[$ (avec $A > 0$) et $f_n(x) := \dfrac{n^2 x \exp(-n^2x^2)}{1+x^2}$.

c) $I := [0,1]$ et $f_n(x) := \sqrt{n}\, \chi_{[1/n, 2/n[}(x)$.

Exercice # 14. Soit f une fonction Lebesgue intégrable sur $[0,\infty[$. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty f(x) \frac{x}{x+n}\, dx.$$

Exercice # 15. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{(\sin x)^n}{x^2}\, dx.$$

Exercice # 16. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable positive sur X. Montrer que

$$\lim_n n \int_X \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\right) d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Exercice # 17. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \exp(-n\sin^2 x) f(x)\, dx.$$

Exercice # 18. Rappelons que, si $y \geq 0$, alors la suite $\left(\left(1 - \dfrac{y}{n}\right)^n\right)_{n \geq y}$ est croissante, de limite e^{-y}.

Soit $f_n(x) := n(1-x)^n \sin^2(nx)\chi_{[0,1]}(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la limite simple (notée f) de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.

b) Calculer, en utilisant le rappel et le théorème de convergence monotone, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.

c) Montrer que $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x)\, dx$.

Exercice # 19. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Pour $n \geq 0$, soit $A_n := \{x \in X\, ;\, |f(x)| \geq n\}$. Déterminer $\lim_n \int_{A_n} f\, d\mu$.

b) Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) < \infty$. Déterminer $\lim_n \int_A |f|^{1/n}\, d\mu$.

c) Mêmes questions si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice # 20. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ telle que la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(a|t|)$ soit intégrable pour tout $a \in \mathbb{R}$.

a) Donner deux exemples de telles mesures « de nature différente ».

b) Montrer que $t \mapsto t^n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$.

   (i) Montrer que $t \mapsto \exp(zt)$ est intégrable.

(ii) Posons $F(z) := \int_{\mathbb{R}} \exp(zt)\, dP(t)$. Montrer que F admet un développement en série entière de la forme

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

où l'on explicitera les coefficients a_n.

Exercice # 21. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie. Soit $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable et, pour $n \geq 1$, soit $I_n := \int_X \frac{f^n}{1+f^n}\, d\mu$. Calculer $\lim_n I_n$.

Exercice # 22. Rappelons que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x, \ \forall\, x \geq 0.$$

Nous considérons, pour tout $n \geq 2$, la fonction $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{1}{x^{1/n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}, \ \forall\, x > 0.$$

a) Démontrer que, pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$, nous avons $f_n(x) \leq 4/x^2$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, f_n est Lebesgue intégrable sur $]0, \infty[$.

c) Calculer $\lim_n \int_0^\infty f_n(x)\, dx$.

Exercice # 23. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, soit $f_n(x) := e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$, et calculer sa somme $f(x)$.

b) Comparer $\int_0^\infty f(x)\, dx$ et $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(x)\, dx$. Expliquer.

Exercice # 24. Nous munissons l'intervalle $[0, 1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ $(= \nu_1)$. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Tracer le graphique de f_n.

b) Calculer et comparer $\liminf_n \int f_n\, d\lambda$, $\int \liminf_n f_n\, d\lambda$, $\limsup_n \int f_n\, d\lambda$ et $\int \limsup_n f_n\, d\lambda$.

c) Mêmes questions avec la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par $g_{2p} := \chi_{[0,1/(2p)]}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $g_{2p+1} := \chi_{[1/(2p+1),1]}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Exercice # 25.

a) Montrer que la fonction

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{\sin x}{e^x - 1},\ \forall\, x > 0,$$

est Lebesgue intégrable sur $]0, \infty[$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ nous avons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice # 26. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable.

a) Supposons μ finie. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n := f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} n\, \mu(X_n) < \infty$.

b) Nous ne supposons plus μ finie. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $F_n := f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n\, \mu(F_n) < \infty$.

Exercice # 27. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. Posons

$$F_f(t) := \mu(f^{-1}(]t, \infty[)) = \mu([f > t]),\ \forall\, t \geq 0\,;$$

F_f est la *fonction de distribution* de f.

Pour traiter les questions suivantes, on pourra commencer par le cas où f est une fonction étagée.

a) Montrer que F_f est borélienne.

b) (Décomposition en tranches) Montrer que $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_0^{\infty} F_f(t)\, dt$.

c) Plus généralement, soit $\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction croissante de classe C^1 avec $\Phi(0) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_X \Phi(f)\, d\mu = \int_0^{\infty} \Phi'(t) F_f(t)\, dt$.

d) (Calcul de moments) Soient $1 \leq p < \infty$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int |f|^p = p \int_0^{\infty} t^{p-1}\, \mu([|f| > t])\, dt.$$

Exercice # 28. (L'exercice précédent, vue probabiliste) En théorie des probabilités, μ est une probabilité, et on travaille plutôt avec la *fonction de répartition* $G_f(t) := \mu([f \leq t])$, $\forall\, t \geq 0$. « Traduire » l'exercice précédent en fonction de G_f.

Exercice # 29. (Inégalité de Jensen) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un *espace probabilisé*. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un *intervalle ouvert* et $\Phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction *convexe*.

Nous admettons dans la suite le fait suivant (qui caractérise la convexité de Φ). Pour tout $t \in I$, il existe une fonction affine Ψ (c'est-à-dire, une fonction de la forme $\Psi(s) = a\, s + b$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$) telle que :

(i) $\Psi(s) \leq \Phi(s), \forall\, s \in I$;

(ii) $\Psi(t) = \Phi(t)$.

Soit $f : X \to I$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $\displaystyle\int f\, dP \in I$.

b) Si Ψ est affine, comparer $\displaystyle\int \Psi(f)\, dP$ à $\displaystyle\Psi\left(\int f\, dP\right)$.

c) En déduire l'*inégalité de Jensen* :

$$\int \Phi(f)\, dP \geq \Phi\left(\int f\, dP\right).$$

Exercice # 30.

a) Écrire l'inégalité de Jensen dans les cas suivants :

   (i) $I := \mathbb{R}$, $\Phi(t) := e^t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

   (ii) $I :=]0, \infty[$, $\Phi(t) := \ln t$, $\forall\, t \in]0, \infty[$.

   (iii) $I := \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $\Phi(t) := |t|^p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

b) Obtenir, à partir de l'inégalité de Jensen appliquée à un espace probabilisé et à une fonction convexe convenables, l'inégalité

$$n \sum_{j=1}^{n} (a_j)^2 \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 31. (Variables aléatoires indépendantes) Soient $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé et $f, g : X \to [0, \infty[$ des *variables aléatoires* (=fonctions mesurables). Nous supposons les variables aléatoires f et g *indépendantes*, au sens suivant :

$$P([f \in A, g \in B]) = P(f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)) = P(f^{-1}(A)) \cdot P(g^{-1}(B)),\ \forall\, A, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

a) Soient $\Phi, \Psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que $\Phi \circ f$ et $\Psi \circ g$ sont indépendantes.

b) Si f, g sont, de plus, étagées, montrer que $\displaystyle\int f g \, dP = \int f \, dP \cdot \int g \, dP$.

   À partir de maintenant, f, g ne sont plus supposées étagées.

c) Montrer qu'il existe deux suites, $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$, de fonctions étagées positives telles que f_n et g_m soient indépendantes, $\forall\, n, m$, $f_n \nearrow f$ et $g_n \nearrow g$.
   (Indication : examiner le procédé d'approximation d'une fonction mesurable par des fonctions étagées et utiliser la question a)).

d) Montrer que $\displaystyle\int f g \, dP = \int f \, dP \cdot \int g \, dP$.

e) Si f, g sont intégrables, alors fg est intégrable. Contradiction ?

f) Pourquoi ne pas considérer des mesures plus générales que des probabilités ?

Exercice # 32. (Mesures à densité) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $g : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

a) Montrer que

$$\nu : \mathscr{T} \to [0, \infty],\ \nu(A) := \int_A g \, d\mu,\ \forall\, A \in \mathscr{T},$$

   est une mesure (à *densité* g par rapport à μ).

b) Sous quelles hypothèses sur g cette mesure est-elle :

   (i) Finie ?

   (ii) σ-finie ?

c) Dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, montrer que δ_0 n'est pas une mesure à densité par rapport à ν_1.

Exercice # 33. (Formule de transfert) Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable.

Rappelons que la *mesure image* $f_*\mu$ est la mesure borélienne définie par

$$f_*\mu(B) := \mu(f^{-1}(B)),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

a) Montrer que pour toute fonction borélienne $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ nous avons la *formule de transfert*

$$\int_X \Phi \circ f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \, df_*\mu. \tag{1}$$

On pourra commencer par Φ étagée.

b) Par souci de simplicité, nous étudions ce qui suit principalement pour $n = 1$. En théorie des probabilités, lorsque $f : X \to \mathbb{R}$ est une *variable aléatoire*, ce qui est donné est la *loi de* f, c'est-à-dire la mesure image $f_*\mu$, notée P_f. (Pour ajouter à la confusion, f est notée X, et sa loi P_X, mais dans ce cours X est l'espace ambient des fonctions mesurables.) Ici, μ est une probabilité sur X.

Par ailleurs, l'intégrale d'une variable aléatoire f (si elle existe) est désignée comme l'*espérance de* f et notée $\mathbb{E}(f)$.

(i) Montrer que P_f est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$.

(ii) Écrire, sous réserve d'existence et à l'aide de P_f, $\mathbb{E}(f)$, $\mathbb{E}(f - \mathbb{E}(f))^2$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{E}(e^{\imath t f})$, qui, en langage probabiliste sont, respectivement, l'*espérance*, la *variance* et la *fonction caractéristique* de f.

(iii) Que deviennent ces formules si P_f est une probabilité à densité par rapport à ν_1 ?

c) Si $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ est un *vecteur aléatoire* (=fonction mesurable), exprimer, en fonction de la loi de f, la *fonction caractéristique* $\mathbb{R}^n \ni t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{\imath \sum_{j=1}^n t_j f_j}\right)$.

Exercice # 34. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable, alors

$$\int f \, d\mu = \sup\left\{(1 - \varepsilon) \int u \, d\mu \, ; \, u \text{ étagée}, 0 \le u \le f, 0 < \varepsilon < 1\right\}.$$

Exercice # 35. (La limite d'une suite croissante de mesures est une mesure)

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $(a_{n,k})_{n \ge 0}$ une suite telle que

$$a_{n,k} \ge 0, \ \forall\, n, k \ge 0, \tag{H1}$$

$$(a_{n_k})_{k \ge 0} \text{ est croissante }, \ \forall\, n \ge 0. \tag{H2}$$

Soit $a_n := \lim_{k \to \infty} a_{n,k}$, $\forall\, n \ge 0$.

Montrer que $\lim\limits_k \sum\limits_{n \ge 0} a_{n,k} = \sum\limits_{n \ge 0} a_n$.

b) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $(\mu_k)_{k \ge 0}$ une suite de mesures sur $\mathscr{T}$ telles que :

$$(\mu_k(A))_{k \ge 0} \text{ est croissante}, \ \forall\, A \in \mathscr{T}. \tag{H}$$

Pour $A \in \mathscr{T}$, soit $\mu(A) := \lim_k \mu_k(A)$.

(i) Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$.

(ii) Montrer que pour toute fonction $\mathscr{T}$-mesurable $f : X \to [0, \infty]$, la suite $\left(\int f d\mu_k\right)_{k \ge 0}$ est croissante.

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

(iii) Montrer que pour toute fonction $\mathscr{T}$-mesurable $f : X \to [0, \infty]$, on a

$$\lim_{k \to \infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice # 36. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} x+n, & \text{si } x \leq -n \\ 0, & \text{si } x > -n \end{cases}$. Montrer que :

a) f_n a une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue μ.

b) $f_n \nearrow 0$.

c) $\displaystyle\int f_n d\mu \not\to \int 0\, d\mu$.

d) Quelle hypothèse de théorème de convergence monotone n'est pas satisfaite ?

Exercice # 37. En considérant, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f_n(x) := -(x+n)_-$, montrer que l'hypothèse $f_n \geq 0$ est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou.

Exercice # 38. En considérant, dans $\mathbb{R}$, la suite $f_n := \chi_{[n,n+1[}$, montrer que l'hypothèse de domination est essentielle pour la validité du théorème de convergence dominée.

Exercice # 39. Nous munissons $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $m = m(n)$ l'unique entier tel que $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Soient

$$A_n := \left[\frac{n-m^2}{2m+1}, \frac{n+1-m^2}{2m+1}\right], \; f_n := \sqrt{m}\,\chi_{A_n}.$$

Montrer que :

a) $\displaystyle\int |f_n| \to 0$.

b) Il n'existe pas g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons $f_n(x) \not\to 0$.

En déduire qu'en général la conclusion de la réciproque du théorème de convergence dominée nécessite de passer à une sous-suite.