Examen final (12 janvier 2024)

Durée : 2 heures ; documents et appareils électroniques interdits

Rappel de notations et commentaires :

- *On notera λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ (et simplement λ sur $\mathbb{R}$). On notera aussi souvent simplement $\mathrm{d}x$ pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}\lambda(x)$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour $\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$.*
- *Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace mesurable et $x \in X$, on rappelle que la mesure de Dirac au point x est la mesure sur $(X,\mathcal{T})$ notée δ_x, et donnée, pour $A \in \mathcal{T}$, par $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.*
- *On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X.*
- *On veillera particulièrement à la qualité de la rédaction et de la justification des arguments ou des calculs, en étant précis sur les résultats du cours utilisés.*

Exercice 1 (Question de cours)

1. Enoncer le théorème de convergence monotone
2. Donner la définition de tribu produit et énoncer le théorème de Tonelli (ou Fubini pour des fonctions positives).

*****

Exercice 2 Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré. Soit $B \in \mathcal{T}$ un ensemble mesurable fixé et tel que $0 < \mu(B) < +\infty$. On définit $\mu(.|\,B)$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par, pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\mu(A|\,B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}.$$

1. Montrer que $\mu(.|\,B)$ est une mesure de probabilité sur $(X,\mathcal{T})$.

On considère maintenant l'espace mesurable $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et on note δ_k la mesure de Dirac au point $k \in \mathbb{N}$ (voir le rappel de notations ci-dessus). Supposons à présent que μ est la mesure sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \delta_k.$$

Soit $B = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs.

2. Vérifier que μ est bien une mesure sur l'espace $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et montrer que c'est une mesure de probabilité.
3. Calculer $\mu(B)$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mu(\{k\}|\,B)$.
5. En déduire que
$$\mu(.|\,B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{4^{k+1}} \delta_{2k}.$$

*****

Exercice 3 On pourra utiliser sans démonstration dans cet exercice que $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.
Pour tout $t > 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, on pose

$$f(t,x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $I =]0, +\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 0$ on pose

$$h(x) = \int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer, que h s'annule uniquement en zéro.
3. Montrer, en utilisant les intégrales à paramètres, que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer, en utilisant les intégrales à paramètres, que h est dans $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire continument dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $h'(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire $h(x)$.
5. En remarquant que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(t,x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-st^2}\,\mathrm{d}s,$$

retrouver la valeur de $h(x)$ en utilisant une méthode différente.

*****

Exercice 4 Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert donné par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y,\ xy > 1\}$.

1. Montrer que l'application φ définie par

$$\varphi(x,y) = (xy, \frac{x}{y}),$$

est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de D sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ que l'on explicitera.

2. A l'aide de ce changement de variables, calculer

$$\int_D x^{3/2} y^{1/2} e^{-xy} dx dy.$$

*****

Exercice 5 Dans cet exercice on appelle rectangle de $\mathbb{R}^2$ un rectangle **ouvert** du type $R =]a,b[\times]c,d[$ avec a,b,c,d des réels tels que $a < b$ et $c < d$. On dit que R est semi-entier si un de ses côtés a une longueur entière, c'est-à-dire que $b - a \in \mathbb{N}$ ou $d - c \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un rectangle R est pavé par une famille (finie) de rectangles $R_1, \ldots, R_n$ si les R_i sont deux à deux disjoints, si $R_i \subset R$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, et si $\lambda_2(R \setminus (\sqcup_{i=1}^n R_i)) = 0$.

On note $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2i\pi(x+y)}.$$

1. Soit R un rectangle, caractériser la propriété "R est semi-entier" en fonction de la valeur de $\int_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. En déduire qu'un rectangle qui peut être pavé par une famille finie de rectangles tous semi-entiers est un rectangle semi-entier.