Corrigé examen final (12 janvier 2024)

Durée : 2 heures ; documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 (Question de cours)
Voir cours.

*****

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $B \in \mathcal{T}$ un ensemble mesurable fixé et tel que $0 < \mu(B) < +\infty$. On définit $\mu(.|\, B)$ de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par, pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\mu(A|\, B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}.$$

1. Montrer que $\mu(.|\, B)$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{T})$.

On considère maintenant l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et on note δ_k la mesure de Dirac au point $k \in \mathbb{N}$ (voir le rappel de notations ci-dessus). Supposons à présent que μ est la mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \delta_k.$$

Soit $B = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs.

2. Vérifier que μ est bien une mesure sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et montrer que c'est une mesure de probabilité.
3. Calculer $\mu(B)$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mu(\{k\}|\, B)$.
5. En déduire que
$$\mu(.|\, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3}{4^{k+1}} \delta_{2k}.$$

Corrigé. 1) Montrons tout d'abord que c'est une mesure. On vérifie que $\mu(\emptyset|B) = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(B)} = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. On a

$$\mu(\sqcup A_n|B) = \frac{\mu\left((\sqcup A_n) \cap B\right)}{\mu(B)} = \frac{\mu\left(\sqcup(A_n \cap B)\right)}{\mu(B)} = \frac{\sum_n \mu\left(A_n \cap B\right)}{\mu(B)} = \sum_n \mu\left(A_n|B\right),$$

où nous avons utilisé dans la troisième égalité que les $(A_n \cap B)_n$ sont deux à deux disjoints et que μ est une mesure. Comme $\mu(\cdot|B)$ est une fonction sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $[0, \infty]$, on a vérifié les propriétés de la mesure. De plus $\mu(X|B) = \frac{\mu(X\cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(B)}{\mu(B)} = 1$, c'est donc une probabilité.

2) Si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $\mu(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \delta_k(A)$ est bien définie comme série de termes positifs et est à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus, comme par définition $\delta_k(\emptyset) = 0$, nous avons $\mu(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ deux à deux disjoints. Come δ_k est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\mu(\sqcup A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \delta_k(\sqcup A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_n \delta_k(A_n) = \sum_n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \delta_k(A_n) = \sum_n \mu(A_n),$$

où l'interversion de la somme dans la troisième égalité se justifie par le théorème de Tonelli car les termes de la somme sont tous positifs (rq : résultat du cours, c'est une conséquence du théorème de Tonelli alors appliqué au produit des mesures de comptage sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$). μ est donc une mesure. Finalement comme $\delta_k(\mathbb{N}) = 1$ par définition, nous avons $\mu(\mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$, μ est donc une probabilité.

3) Par définition de δ_k, nous avons $\delta_k(B) = 1$ si k est pair et $\delta_k(B) = 0$ si k est impair. Donc

$$\mu(B) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p+1}} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4^p} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

4) Par 3), nous avons $\mu(\{k\}|B) = \frac{3}{2}\mu(\{k\} \cap B)$. De plus $\{k\} \cap B = \emptyset$ is k est impair et $\{k\} \cap B = \{k\}$ si k est pair. Donc

$$\mu(\{k\}|B) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{3}{2^{k+2}}, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

5) Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, nous avons $A = \sqcup_{k \in A} \{k\}$, $\mu(\cdot|B)$ étant une mesure, par additivité, car A est au plus dénombrable, et en utilisant 4),

$$\mu(A|B) = \sum_{k \in A} \mu(\{k\}|B) = \sum_{p=0}^{\infty} \delta_{2p}(A) \frac{3}{2^{2p+2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \delta_{2p}(A) \frac{3}{4^{p+1}}.$$

ce qui donne l'égalité voulue.

*****

Exercice 3 On pourra utiliser sans démonstration dans cet exercice que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

Pour tout $t > 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, on pose

$$f(t, x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $I =]0, +\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 0$ on pose

$$h(x) = \int_I f(t, x) \, \mathrm{d}t.$$

2. Montrer, que h s'annule uniquement en zéro.
3. Montrer, en utilisant les intégrales à paramètres, que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer, en utilisant les intégrales à paramètres, que h est dans $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire continument dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $h'(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire $h(x)$.
5. En remarquant que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(t, x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-st^2} \, \mathrm{d}s,$$

retrouver la valeur de $h(x)$ en utilisant une méthode différente.

Corrigé. 1) Pour tout $x \geq 0$, $t \to f(t,x)$ est positive et continue donc borélienne sur I. On remarque d'autre part que pour tout $x \geq 0$ et $t \in I$,

$$f(t,x) \leq \frac{1}{t^2}, \quad f(t,x) \leq x,$$

la deuxième inégalité venant du fait que $1 - e^{-u} \leq u$ pour tout $u \geq 0$ (par exemple par une étude simple de fonction). On a donc l'inégalité suivante pour tout $x \geq 0$ et $t \in I$,

$$0 \leq f(t,x) \leq x\chi_{]0,1[}(t) + \frac{1}{t^2}\chi_{[1,\infty[}(t), \tag{1}$$

où on note χ_A la fonction indicatrice d'un ensemble A. Donc la fonction $t \to f(t,x)$ est bornée sur $]0,1[$ donc intégrable sur $]0,1[$. Elle dominée par $\frac{1}{t^2}$ sur $[1,\infty[$ qui est intégrable sur ce dernier ensemble. Donc pour tout $x \geq 0$, $f(\cdot,x)$ est intégrable sur I.

2) On a vu que pour tout $x \geq 0$, $t \to f(t,x)$ est borélienne. D'autre part, par composition de fonctions usuelles, pour tout $t \in I$, $x \to f(t,x)$ est continue (en fait $\mathcal{C}^\infty$).

Vérifions maintenant la domination. Pour cela il est ici nécessaire de se restreindre à un sous intervalle de I. Soit $a > 0$. Pour $x \in [0,a]$, en utilisant (**??**), nous avons

$$|f(t,x)| \leq a\chi_{]0,1[}(t) + \frac{1}{t^2}\chi_{[1,\infty[}(t)$$

Cette dernière fonction est intégrable sur I pour les raisons données en 1). (Rq : on peut aussi directement dominer $|f(t,x)|$ par $f(t,a)$ qui est intégrable par la question 1). Les propriétés pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres sont vérifiées pour $x \in [0,a]$, pour tout $a > 0$. Donc h est continue sur $[0,a]$, pour tout $a > 0$, donc $x \to h(x)$ est continue sur $[0,\infty[$.

3) On remarque d'abord que pour $x = 0$, $f(t,0) = 0$ pour tout $t \in I$. On a donc (par résultat du cours) $h(0) = \int_I f(t,0)dt = 0$. Réciproquement, pour $x > 0$ et $t \in I$, nous avons $f(t,x) > 0$. Comme $t \to f(t,x)$ est borélienne et positive, par résultat du cours, $h(x) \geq 0$ et si $h(x) = 0$ cela implique que $f(\cdot,x) = 0$ λ_1-presque partout, ce qui est faux pour $x > 0$ car $f(t,x) > 0$ pour tout $t \in I$ et $\lambda_1(I) > 0$. Donc $h(x) > 0$ pour $x > 0$.

4) On a vu que pour tout $x > 0$, $t \to f(t,x)$ est intégrable. De plus pour $t \in I$, $x \to f(t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions usuelles, et

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = e^{-xt^2}.$$

Soit $b > 0$. On a pour tout $x \in]b,\infty[$,

$$|f(t,x)| \leq e^{-bt^2}, \quad \forall t \in I.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur I. On a donc vérifié les conditions du théorème de dérivation des intégrales à paramètres pour $x \in]b,\infty[$, pour tout $b > 0$. On a donc que h est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$ et

$$h'(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2} dt.$$

Par changement de variable $u = \sqrt{x}t$, on a $h'(x) = \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{x}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$. Cette dernière fonction a pour primitive $\sqrt{\pi}\sqrt{x} + c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$. Par 1), h est continue sur $[0,\infty[$ et $h(0) = 0$, donc $c = 0$ et $h(x) = \sqrt{\pi}\sqrt{x}$, pour tout $x \geq 0$.

5) On vérifie l'identité donnée : $\int_0^x e^{-st^2}ds = [-\frac{1}{t^2}e^{-st^2}]_{s=0}^{s=x} = \frac{-e^{xt^2}+1}{t^2} = f(t,x)$. Soit $g(t,s) = e^{-st^2}$. On remarque que g est positive et borélienne (car continue) sur $I\times]0,x[$. On peut appliquer le théorème de Tonelli à $g(t,s)$ et

$$\int_I f(t,x)dt = \int_I \left(\int_{]0,x[} g(t,s)ds\right) dt = \int_{]0,x[} \left(\int_I e^{-st^2}ds\right) dt = \int_0^x \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}dt = \sqrt{\pi}\sqrt{x}.$$

la troisième égalité venant du calcul fait en 4) avec x remplacé par s.

*****

Exercice 4 Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert donné par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y,\ xy > 1\}$.

1. Montrer que l'application φ définie par

$$\varphi(x,y) = (xy, \frac{x}{y}),$$

   est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de D sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ que l'on explicitera.
2. A l'aide de ce changement de variables, calculer

$$\int_D x^{3/2}y^{1/2}e^{-xy}dxdy.$$

Corrigé. 1) Soit $V =]1,\infty[\times]0,1[$. On remarque que φ est à valeurs dans V car $xy > 1$ et $0 < x < y$ donc $0 < x/y < 1$. Montrons que φ est bijective de D dans V. Si $(x,y) \in D$ et $\varphi(x,y) = (u,v)$ alors $x^2 = uv$ et $y^2 = u/v$, donc comme $x > 0$ et $y > 0$ on a $x = \sqrt{uv}$ et $y = \sqrt{u/v}$. Donc φ est injective. D'autre part, si $(u,v) \in V$, posons $\sqrt{uv} = x$ et $\sqrt{u/v} = y$. On a nécessairement $(x,y) \in D$ car $x,y > 0$ et $x/y = v \in]0,1[$ donc $0 < x < y$ et $xy = u > 1$. De plus $\varphi(x,y) = (u,v)$. Donc φ est bijective de D sur V et son inverse est $\varphi^{-1}(u,v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$.

La fonction φ est de plus $\mathcal{C}^1$ comme composition de fonctions usuelles et on peut calculer son déterminant Jacobien

$$J_\varphi(x,y) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y) = \det\begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} = -\frac{2x}{y}$$

Donc $|J_\varphi(x,y)| > 0$ pour tout $(x,y) \in D$ et φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme par résultat du cours (on peut aussi vérifier directement que φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$).

2) On veut appliquer le théorème de changement de variable, il faut donc faire apparaître le Jacobien dans la formule. On écrit donc

$$x^{3/2}y^{1/2}e^{-xy} = \frac{1}{2}\frac{2x}{y}x^{1/2}y^{3/2}e^{-xy} = \frac{1}{2}|J_\varphi(x,y)|xy\sqrt{\frac{y}{x}}e^{-xy} = g\circ\varphi(x,y)|J_\varphi(x,y)|,$$

avec $g(u,v) = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{v}}e^{-u}$. On peut donc appliquer le théorème du changement de variable à φ sous la forme

$$\int_D x^{3/2}y^{1/2}e^{-xy}dxdy = \int_D g\circ\varphi(x,y)|J_\varphi(x,y)|dxdy = \int_V g(u,v)dudv = \int_V \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{v}}dudv.$$

Les fonctions impliquées étant continues donc boréliennes et positives, on peut appliquer Tonelli, et

$$\int_V \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{v}}e^{-u}dudv = \int_1^\infty ue^{-u}\left(\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{v}}dv\right)du = \int_1^\infty ue^{-u}du.$$

Par IPP, on a finalement $\int_1^\infty ue^{-u}du = [-ue^{-u}]_1^\infty + \int_1^\infty e^{-u}du = \frac{2}{e}$. On en conclut donc

$$\int_D x^{3/2}y^{1/2}e^{-xy}dxdy = \frac{2}{e}.$$

Remarque : On peut dans cet exercice faire le changement en sens inverse en l'appliquant à φ^{-1}, en calculant $J_{\varphi^{-1}}(u,v)$ directement ou en utilisant que $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = 1/J_\varphi\left(\varphi^{-1}(u,v)\right) = -1/2v$. Mais beaucoup des copies (voire la majorité) ne font pas le changement dans le bon sens, conduisant à un résultat faux.

*****

Exercice 5 Dans cet exercice on appelle rectangle de $\mathbb{R}^2$ un rectangle **ouvert** du type $R =]a,b[\times]c,d[$ avec a,b,c,d des réels tels que $a < b$ et $c < d$. On dit que R est semi-entier si un de ses côtés a une longueur entière, c'est-à-dire que $b-a \in \mathbb{N}$ ou $d-c \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un rectangle R est pavé par une famille (finie) de rectangles $R_1,\dots,R_n$ si les R_i sont deux à deux disjoints, si $R_i \subset R$ pour tout $i = 1,\dots,n$, et si $\lambda_2(R \setminus (\sqcup_{i=1}^n R_i)) = 0$.

On note $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{2i\pi(x+y)}.$$

1. Soit R un rectangle, caractériser la propriété "R est semi-entier" en fonction de la valeur de $\int_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. En déduire qu'un rectangle qui peut être pavé par une famille finie de rectangles tous semi-entiers est un rectangle semi-entier.

Corrigé. 1) On remarque que sur tout rectangle R (qui est borélien car ouvert), $f(x,y)$ est continue donc borélienne et de plus $|f(x,y)| = 1$. Donc $\int_R |f(x,y)|dxdy \leq \lambda_2(R) < \infty$. Donc f est intégrable sur tout rectangle R. On peut donc appliquer le théorème de Fubini, et pour $R =]a,b[\times]c,d[$

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)dxdy &= \int_a^b\left(\int_c^d e^{2i\pi(x+y)}dy\right)dx = \int_a^b e^{2i\pi x}\left(\int_c^d e^{2i\pi y}dy\right)dx \\ &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2(e^{2i\pi b}-e^{2i\pi a})(e^{2i\pi d}-e^{2i\pi c})\end{aligned}$$

On a d'autre part que $e^{2i\pi b} - e^{2i\pi a} = 0$ ssi $b - a \in \mathbb{Z}$ et idem pour l'autre terme. On en déduit donc que

$$(R \text{ est semi-entier}) \Leftrightarrow (b-a \text{ ou } d-c \text{ est entier}) \Leftrightarrow \left(\int_R f(x,y)dxdy = 0\right).$$

2) Si R est pavé par une famille des rectangles semi-entiers $R_1,\cdots,R_n$, on peut décomposer R en $R = \left(\sqcup_{i=1}^n R_i\right) \sqcup \left(R \setminus \sqcup_{i=1}^n R_i\right)$, l'union étant disjointe (chacun des ensembles est borélien car R et les R_i sont ouverts). Par la relation de Chasles du cours, on a

$$\int_R f = \int_{R\setminus\sqcup_{i=1}^n R_i} f + \sum_{i=1}^n \int_{R_i} f.$$

Comme $\lambda_2\left(R \setminus \sqcup_{i=1}^n R_i\right) = 0$, on a (cf cours) $\int_{R\setminus\sqcup_{i=1}^n R_i} f = 0$. De plus par i), $\int_{R_i} f = 0$. Donc $\int_R f = 0$. Par la réciproque de i) cela implique que R est semi-entier.