Avancement du cours L3 Mesure et intégration – Automne 2023

Les numéros de section, définition, etc… font référence aux notes de cours de Petru Mironescu :
http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/cours_mesure_integration.pdf

Cours 1&2 : 04/09 et 05/09 (3h30)

- Introduction : Motivation et idée très grossière des briques de la construction de l'intégrale de Lebesgue – schéma global du cours

Chapitre I

- Section 1.1 : Sup, inf, limsup, liminf (définition 1.1, def 1.3, remarque 1.4, proposition 1.6 avec preuve)
- Section 1.2 : Notion de dénombrable : def 1.12, proposition 1.13, exercice 1.14.
- Pour aller plus loin : lire la section 1.4 (preuve complète de la proposition 1.13)
- Section 1.3 :définitions des clans tribus, classes monotones, (def 1.16, 1.18, 1.24, 1.26 – prop 1.22&1.23)

Cours 3 : 12/09 (2h30)

- Section 1.3 :définition de la mesure sur une tribu, espace mesurable, espace mesuré (def 1.29 & Rq1.30b), def 1.31). Exemples fondamentaux de clans : exo 1.35a) (lire exo 1.35b)). Quelques exemples simples de tribus (exo 1.38).

Chapitre II :

- Section 2.1 : structures engendrées (tribus, clans, classes monotones engendrées) et premières propriétés : propositions 2.1 à 2.4 et exos 2.5, 2.6.
- Section 2.2 : théorème des classes monotones avec preuve (th 2.9), principe d'application (rq 2.11)
- Section 2.3 : tribu Borélienne (def 2.13), système de générateurs, proposition 2.16, avec preuve de a)b)ii). A lire : preuve complète prop 2.16.

Cours 3 : 19/09 (2h)

Complément chapitre II : tribu restreinte, restriction de la tribu Borélienne (preuves en exo).

Chapitre III

- Section 3.0 : définition générale de fonction mesurable (comme « preimage des ensembles mesurables sont mesurables »)
- Section 3.1 : fonctions mesurables à valeurs dans $R, \bar{R}$. Caractérisation par préimages d'intervalles (prop 3.8 – preuve reste à faire).
- Fonctions étagées (def 3.2).
- Caractérisation des fonctions mesurables comme limite de fonctions étagées (équivalence def 3.3 et th 3.5, cor 3.7).
- Fonctions mesurables à valeurs dans R^n, caractérisation à partir des fonctions marginales (thm 3.9 – preuve reste à faire).

Cours 4 : 26/09 (2h40)

- Proposition 3.19 et preuve proposition 3.8. Lire preuve Thm 3.9.
- Section 3.2 : lim, sommes, compositions de fonctions mesurables, continu=>borélien (énoncés 3.20—3.25)
- Section 3.3 : sup, limsup et autres opérations sur les fonctions mesurables.

Chap IV

- Section 4.1 : propriétés générales des mesures
- Section 4.4 : def 4.23 et def 4.25, prop 4.24. Régularité des mesures : thm 4.26a) et corollaire 4.27 (*admis).*
- Section 4.5 : définition de la mesure de Lebesgue et propriétés, Thm 4.35 (existence admise – unicité prouvée en d=1, prop 4.38)

Cours 5 : 03/10 (2h45)

Chap IV

- Section 4.2 et 4.3 : ensembles négligeables – notion de presque partout.
- tribu complétées (4.7—4.11) et mesures complétées (preuves admises)

Chap VI

- 6.1 : intégrales de fonctions étagées positives
- Section 6.2 : définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive, définition de l'intégrale d'une fonction mesurable réelle, notion de « admet une intégrale », « fonction intégrable ». Intégrale sur une partie mesurable, intégrale à valeurs vectorielles. Proposition 6.12-6.13-6.15
- Section 6.3 et 6.5 : théorème de cv monotone (preuve reportée) et conséquences : linéarité, inégalité triangulaire, inégalité de Markov, relation de Chasles, intégrales de séries, égalité p.p. (6.30—6.37).
- Section 6.6 : lien avec l'intégrale de Riemann (Prop 6.44) et avec les intégrales généralisées (Prop 6.45). Preuves reportées.

Cours 6 : 10/10 (2h45)

- Preuves des énoncés de la section Section 6.4 et 6.5 et 6.6, en particulier preuve du thm de cv monotone et du lien avec l'intégrale de Riemann et les intégrales généralisées.
- Section 6.7 : cas des intégrales par rapport à la mesure de comptage, lien avec les séries.
- A lire en complément : section 6.7.4 (sommation par paquets) et section 6.4 (en particulier énoncé 6.18—6.20).

  Chapitre 7
- Section 7.1&7.2 : version p.p. de la convergence monotone (thm 6.28), Lemme de Fatou (thm 7.1), convergence dominée (thm 7.2). Preuves à faire.
- Section 7.2 : continuité des intégrales à paramètres et localisation de la domination (thm 7 .10). Exemple de la fonction zeta de Riemann.

Cours 7 : 24/10 (2h)
Chapitre 7

- Section 7.1 : preuve des lemmes de Fatou (version presque partout) et convergence dominée (à voir : preuve de la version presque partout)
- Section 7.2 : preuve du thm 7.10 (continuité des intégrales à paramètres).
- Section 7.3 : dérivabilités des intégrales à paramètres, dérivées d'ordre supérieur (à voir : preuve du théorème de dérivabilité). Méthode de localisation. Exemple de la fonction zeta.
- Section 7.4 : Lien avec les séries de fonctions. Utilisation des théorèmes de continuité et dérivation pour des séries de fonctions. Utilisation de la convergence dominée pour inverser séries/intégrales.

Cours 8 : 7/11 (2h)

Retour chapitre 6 : compléments sur les intégrales des mesures complétées (section 6.4)

Chapitre 8 :

- Section 8.1 : Tribu produit (8.1, 8.2), avec preuves des lemmes 8.4 et 8.5.
- Section 8.2 : mesure produit (Théorème 8.10), preuve de l'existence et l'unicité (à terminer). Définition des coupes. Preuves des proposition 8.8 et théorème 8.9.

Cours 9 : 14/11 (2h)

- Section 8.2-8.3 : Fin de la preuve du théorème 8.10.
- Section 8.3. Produits itérés. Cas de la mesure de Lebesgue (prop 8.3, 8.11 & corollaire 8.16). Voir preuves dans le poly.
- Section 8.4 : Théorèmes de Tonelli dans le cas des fonctions positives ou de Fubini pour les fonctions intégrables (8.22 à 8.27). Applications aux cas de R^n.

Cours 10 : 21/11 (2h)

Chapitre 9

- Section 9.4 : définition 9.8 d'un C^1 diffeomorphisme et de la matrice Jacobienne. Enoncé du théorème d'inversion globale et formules pour la matrice Jacobienne de l'application inverse.
- Section 9.6 : Théorème du changement de variables (Thm 9.14 & remarque 9.15). démonstration admise.
- Méthode de restriction au complémentaire d'un ensemble négligeable. Exemple d'ensembles négligeables de R^n et proposition 9.16 & corollaire 9.17 (preuves admises).
- Section 9.9 : Formule du changement de variable en polaire. Changement de variables sphérique. Exemple du calcul de l'intégrale gaussienne.