Contrôle (21 novembre 2023)

Durée : 90 minutes ; documents et appareils électroniques interdits

Rappel de notations : On notera λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$. On notera aussi souvent simplement $\mathrm{d}x$ pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda(\mathrm{d}x)$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1
Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère la fonction $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto n\,\mathrm{e}^{-n|x|}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier brièvement l'existence de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ et la calculer.
2. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ intégrable telle que pour tout n entier et tout x réel, on ait $f_n(x) \leq g(x)$.

Exercice 2
Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{(\sin(x))^n}{x^2}\mathrm{d}x$$

est bien définie et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et soit a un réel.
   (a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
      i. $\limsup_n u_n \leq a$;
      ii. pour tout ε réel strictement positif, il existe n_0 entier tel que pour tout n supérieur à n_0, on a $u_n \leq a + \varepsilon$.
   (b) Énoncer une condition analogue pour la limite inférieure.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels avec $\liminf_n x_n = 0$ et $\limsup_n x_n = 1$.
   (a) Montrer que $\limsup_n |x_{n+1} - x_n| \leq 1$.
   (b) Montrer que l'on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim_k |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| = 1$.

Exercice 4

Soit μ une mesure borélienne sur $[0,1]$, et soit λ la mesure de Lebesgue.

1. On suppose que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout intervalle $I \subseteq [0,1]$ tel que $\lambda(I) = 1/2^m$, on a $\mu(I) = 1/2^m$.
   (a) Montrer que pour tout $a \in [0,1]$, $\mu(\{a\}) = 0$.
   (b) Soit $a \in [0,1]$. Soit $M \in \mathbf{N}^*$ un entier positif et $(d_m)_{m=1,\dots,M} \in \{0,1\}^M$. On note $c = a + \sum_{m=1}^{M} d_m/2^m$. Montrer que si $c \in [0,1]$, alors $\mu([a,c]) = \lambda([a,c])$.
   (c) Démontrer que pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, on a $\mu\big([a,b]\big) = \lambda\big([a,b]\big)$.
   Indication : *pour $a < b$, on pourra écrire $b - a$ en base deux, c'est-à-dire $b - a = \sum_{m=1}^{+\infty} d_m/2^m$ avec $d_m \in \{0,1\}$ pour tout m, puis introduire la suite définie par $c_M = a + \sum_{m=1}^{M} d_m/2^m$ pour $M \in \mathbf{N}^*$.*
   (d) En déduire que $\mu = \lambda$.
2. On suppose dans cette question que pour tout borélien $B \subseteq [0,1]$ tel que $\lambda(B) = 1/2$, on a $\mu(B) = 1/2$ (les hypothèses faites dans la question 1 n'étant plus valables).
   (a) Vérifier que $\mu\big([0,1]\big) = 1$ et que $\mu(\{1\}) = 0$.
   (b) Pour $k \in \{1,2,3,4\}$, on note $m_k = \mu\Big(\big[\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}\big[\Big)$. Déterminer $m_k + m_l$ si k et l sont deux entiers distincts compris entre 1 et 4 ? En déduire que l'on a les égalités $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1/4$.
   (c) Soit maintenant m un entier naturel et soit $I_0 \subseteq [0,1]$ un intervalle avec $\lambda(I_0) = 2^{-(m+1)}$. Montrer que $\mu(I_0) = 2^{-(m+1)}$. (*Indication :* On pourra considérer $2^m + 1$ intervalles deux à deux disjoints $I_0, I_1, \dots, I_{2^m}$.)
   (d) Conclure que $\mu = \lambda$.