Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Mesure et intégration & Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2023–2024

Feuille de TD # 0

Opérations sur les ensembles

Cadre, notations

1. Nous travaillons dans un ensemble fixé X.
2. Les parties (sous-ensembles) de X sont notées A, B, etc. « A est une partie de X » s'écrit $A \subset X$ ou $X \supset A$.
3. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathscr{P}(X)$.
4. $(A_i)_{i \in I}$ désigne une famille de parties de X, indexée par un ensemble *quelconque* (donc pas nécessairement fini ou dénombrable) d'*indices*.
5. Rappelons les opérations usuelles avec les ensembles.
   (i) (Union) $A \cup B := \{x \in X\ ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
   (ii) (Intersection) $A \cap B := \{x \in X\ ;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.
   (iii) (Différence) $A \backslash B := \{x \in X\ ;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
   (iv) (Différence symétrique)
   $$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{x \in X\ ;\ [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}.$$
   (v) (Complémentaire) $A^c = X \backslash A := \{x \in X\ ;\ x \notin A\}$.
   (vi) (Produit cartésien) Si X, Y sont des ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y)\ ;\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
6. Une suite $(A_n)_{n \geq k}$ de parties de X est *croissante* si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall\, n \geq k$. Elle est *décroissante* si $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall\, n \geq k$.

Exercice # 1. (Échauffement)

a) Dessiner « avec des patates » les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, A^c, $A \triangle B$.

b) Calculer $(A \triangle B) \triangle A$.

Exercice # 2. (Propriétés fondamentales) Montrer les propriétés suivantes.

a) $A \cap (\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I}(A \cap B_i)$ et $A \cup (\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I}(A \cup B_i)$.

b) $(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} A_i^c$ et $(\cap_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \in I} A_i^c$.

c) $A \backslash (\cup_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I}(A \backslash B_i)$ et $(\cup_{i \in I} A_i) \backslash B = \cup_{i \in I}(A_i \backslash B)$.

d) $A \backslash (\cap_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I}(A \backslash B_i)$ et $(\cap_{i \in I} A_i) \backslash B = \cap_{i \in I}(A_i \backslash B)$.

e) $(\cup_{i \in I} A_i) \times (\cup_{j \in J} B_j) = \cup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$ et $(\bigcap_{i \in I} A_i) \times (\cap_{j \in J} B_j) = \cap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$.

f) Déduire de la question précédente deux formules pour $(\cup_{i \in I} A_i) \times (\cap_{j \in J} B_j)$, respectivement deux formules pour $(\cap_{i \in I} A_i) \times (\cup_{j \in J} B_j)$.

Exercice # 3. Soient X un ensemble et A et B deux parties fixées de X.

a) Simplifier les conditions suivantes portant sur la partie C de X.

$$\text{(i) } A \cup C \subset B \cup C\,;\ \text{(ii) } A \cap C \subset B \cap C\,;\ \text{(iii) } (A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \varnothing.$$

b) On définit $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ par $f(C) := (A \cap C, B \cap C)$. Déterminer, pour le couple (A, B), une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (i) injective; (ii) surjective.

Exercice # 4. (Fonction indicatrice) Soit X un ensemble. Pour une partie A de X, on définit sa *fonction indicatrice* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ par $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

a) Calculer $\chi_\varnothing$ et χ_X. Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.

b) Exprimer simplement en fonction de χ_A et χ_B les fonctions $\chi_{A^c}, \chi_{A\cap B}, \chi_{A\cup B}$ (dans le cas général et dans le cas particulier où $A \cap B = \varnothing$), $\chi_{A\triangle B}, \chi_{f^{-1}(A)}$ (avec $f : Y \to X$).

c) Rappelons la notation suivante. Si B et C sont des ensembles, alors

$B^C := \{f : C \to B\}$ (l'ensemble de fonctions de C vers B).

L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathscr{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$?

d) Montrer, à l'aide des fonctions caractéristiques, l'égalité $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

Exercice # 5. (Suites d'ensembles) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de X.

a) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors $\cup_{n\geq n_0} A_n = \cup_{n\geq 0} A_n$, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, alors $\cap_{n\geq n_0} A_n = \cap_{n\geq 0} A_n$, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$.

c) Soit $A := \cup_{n\geq 0} A_n$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors la suite $(\chi_{A_n})_{n\geq 0}$ est croissante et converge simplement vers χ_A.

d) Énoncer et prouver le résultat analogue au précédent pour une suite décroissante.

e) Soit $A := \cup_{n\geq 0} A_n$. Si les A_n sont d. d. d. (deux à deux disjoints), montrer que $\chi_A = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Exercice # 6. (Image directe, image réciproque) On se donne deux ensembles X et Y et une application $f : X \to Y$.

Si $A \subset X$, on définit $f(A) := \{f(x)\,;\ x \in A\}$.

Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) := \{x \in X\,;\ f(x) \in B\}$.

Montrer les propriétés suivantes de l'image réciproque $B \mapsto f^{-1}(B)$.

a) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

d) Si, de plus, g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Pour l'image directe $A \mapsto f(A)$, les relations analogues ne sont pas vraies en général.

e) Montrer que $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$.

f) Montrer que $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$ et donner un exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.

g) Montrer par des exemples qu'en général il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $(f(A))^c$.

Exercice # 7. (Injectivité) Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est injective.

b) $\forall\, A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$.

c) $\forall\, x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

Exercice # 8. (Surjectivité) Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est surjective.

b) $\forall\, B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$.

c) $\forall\, y \in Y, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice # 9. (Produit cartésien)

a) Soient $A, C \in \mathscr{P}(X)$ et $B, D \in \mathscr{P}(Y)$. Montrer l'implication

$$(A \times B) \cap (C \times D) \neq \varnothing \implies [A \cap C \neq \varnothing \text{ et } B \cap D \neq \varnothing].$$

b) Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, écrire $(X \times Y) \backslash (A \times B)$ comme une union finie de produits cartésiens d. d. d.

c) Si $A_i \subset X$ et $B_i \subset Y$, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, montrer que $(X \times Y) \backslash (\cup_{i=1}^{n} A_i \times B_i)$ s'écrit comme une union finie de produits cartésiens.

Exercice # 10. (Coupes) Si $E \subset X \times Y$, soient

$$\forall\, x \in X,\ E_x := \{y \in Y\ ;\ (x, y) \in E\} \text{ et } \forall\, y \in Y,\ E^y := \{x \in X\ ;\ (x, y) \in E\}.$$

a) Si $X = Y = \mathbb{R}$, « dessiner » E_x et E^y pour une « patate ».

b) Si $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$, trouver E_x et E^y pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $(\cup_{i\in I} E_i)_x = \cup_{i\in I} (E_i)_x$, $\forall\, x \in X$ et $(\cup_{i\in I} E_i)^y = \cup_{i\in I} (E_i)^y$, $\forall\, y \in Y$.

Exercice # 11. (Union d. d. d.) La notation $\sqcup_{i\in I} A_i$ est utilisée pour la réunion d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles deux à deux disjoints (d. d. d.).

a) Si $A_0, A_1, \ldots$, sont des parties de X, soient $B_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n := A_n \backslash (\cup_{i=0}^{n-1} A_i)$. Montrer que $\cup_i A_i = \sqcup_i B_i$.

b) Montrer que $(\sqcup_{i\in I} A_i) \times B = \sqcup_{i\in I} A_i \times B$.