

Feuille de TD # 1  
sup, inf, lim sup, lim inf, dénombrement

**Exercice # 1.** Soient  $A, B$  des parties non vides de  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

- $M = \sup A$  si et seulement si  $M$  est un majorant de  $A$  et il existe une suite  $(x_n)_n \subset A$  telle que  $x_n \rightarrow M$ . Trouver une caractérisation analogue de  $\inf A$ .
- Tout  $A$  admet  $\sup A \in ]-\infty, \infty]$  et  $\inf A \in [-\infty, \infty[$ .
- $\sup A$  et  $\inf A$  sont uniques.
- $\sup(-tA) = -t \inf A, \forall t \in ]0, \infty[$ . Donner les formules de  $\sup(tA), \inf(tA), \inf(-tA)$ .
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  et  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ .
- Si  $A \subset B$ , alors  $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$ .
- Si  $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}$  est une suite croissante, alors  $\lim_n x_n = \sup_{n \geq n_0} x_n := \sup\{x_n; n \geq n_0\}$ .  
Trouver l'énoncé analogue pour une suite décroissante.
- Si  $\sup A > x \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors il existe un  $y \in A$  tel que  $y > x$ .
- Montrer que  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ . Y a-t-il des formules pour  $\inf(A \cup B), \sup(A \cap B)$  et  $\inf(A \cap B)$ ?

**Exercice # 2.** Que devient ce qui précède si nous considérons des parties non vides  $A, B$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ ?

**Exercice # 3.** Trouver  $B \subset A \subset \mathbb{R}$  tels que  $\inf A = -\infty, \inf B = 0, \sup B = 1$  et  $\sup A = 2$ .

**Exercice # 4.** Trouver  $A \subset \mathbb{R}$  tel que  $\sup A$  et  $\min A$  existent dans  $\mathbb{R}$ , mais  $\max A$  n'existe pas.

**Exercice # 5.** Soient  $A, B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que  $\sup A = \inf B$ .

- Montrer que pour tout  $x \in A$  et tout  $y \in B$  on a  $x \leq y$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $x \in A$  et  $y \in B$  tels que  $y - x < \varepsilon$ .
- Inversement, on suppose que pour tout  $x \in A$  et tout  $y \in B$  on a  $x \leq y$ . Montrer que si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $x \in A$  et  $y \in B$  tels que  $y - x < \varepsilon$ , alors  $\sup A = \inf B$ .

**Exercice # 6.** Déterminer les bornes sup et inf des ensembles ci-dessous :

- $A_1 := \left\{ \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
- $A_2 := \left\{ \frac{12n + 10^{-n}}{3n + 2}; n \in \mathbb{N} \right\}$ ;
- $A_3 := \left\{ \left(1 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \ln n; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

**Exercice # 7.** Calculer

$$\sup_{x \geq 0, t \in \mathbb{R}} \frac{\cos(xt + \pi/4)}{1 + x^2}, \quad \sup_{x, t \in \mathbb{R}} \frac{e^{-x/(1+t^2)}}{1 + x + x^2}.$$

**Exercice # 8.** Trouver tous les ensembles  $A \subset \mathbb{R}$  tels que

$$\sup(tA) = t \sup A, \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice # 9.** Soient  $a_{n,k} \in \mathbb{R}, \forall n, k \in \mathbb{N}$ . A-t-on toujours

$$\sup_n \sup_k a_{n,k} = \sup_k \sup_n a_{n,k}?$$

**Exercice # 10.** Nous considérons une suite  $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ .

- Si  $\liminf_n x_n \geq \limsup_n x_n$ , alors  $x_n \rightarrow \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$ .
- Si  $a \leq x_n \leq b, \forall n \geq n_0$ , alors  $a \leq \liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n \leq b$ .
- Si  $x_n \geq a, \forall n \geq n_0$  et  $\limsup_n x_n \leq a$ , alors  $x_n \rightarrow a$ .
- Donner des exemples de suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  avec  $\limsup_n (x_n + y_n) \neq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$ .

**Exercice # 11.** a) Montrer que  $x_n \leq y_n, \forall n \geq n_0 \implies \limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n$ .

b) Quelles sont les hypothèses implicites de la question précédente?

**Exercice # 12.** Trouver une suite réelle  $(a_n)_n$  telle que  $\sup_n a_n = 4, \limsup_n a_n = 2, \liminf_n a_n = 1$  et  $\inf_n a_n = 0$ .

**Exercice # 13.** Calculer  $\limsup_n x_n$  et  $\liminf_n x_n$  pour les suites définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  respectivement par les formules :

- $x_n := 1/(n+1)$ .
- $x_n := (n+1)^{(-1)^n}$ .
- $x_n := \left(2 + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{n}{2n+1}$ .
- $x_n := \frac{11n + 2 \cos(n\pi)}{\sqrt{4n^2 + n - 1}}$ .

**Définitions.** Soit  $(A_n)_{n \geq n_0}$  une suite de parties d'un ensemble  $X$ . Les ensembles  $\limsup_n A_n$  et  $\liminf_n A_n$  sont définis respectivement par les formules

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \liminf_n A_n := \bigcup_{n \geq n_0} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

**Exercice # 14.** a) Montrer que  $x \in \limsup_n A_n$  si et seulement si  $x$  appartient à une infinité d'ensembles  $A_n$ .

b) Montrer que  $x \in \liminf_n A_n$  si et seulement si il existe un  $n_1$  (qui peut dépendre de  $x \in X$ ) tel que  $x \in A_n, \forall n \geq n_1$ .

c) Pour tout  $x \in X$ , montrer les égalités

$$\chi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \chi_{A_n}(x), \quad \chi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \chi_{A_n}(x).$$

d) Soit  $(A_n)_{n \geq n_0}$  une suite croissante de parties de  $X$ . Montrer que

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq n_1} A_n, \quad \forall n_1 \geq n_0.$$

Quel est l'analogue de cette formule pour une suite décroissante?

e) Montrer que

$$\limsup_n A_n = \left( \limsup_n A_{2n} \right) \cup \left( \limsup_n A_{2n+1} \right),$$
$$\liminf_n A_n = \left( \liminf_n A_{2n} \right) \cap \left( \liminf_n A_{2n+1} \right).$$

**Exercice # 15.** Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites suivantes d'ensembles :

- $A_1$  et  $A_2$  donnés,  $A_n = A_{n-2}, \forall n \geq 3$ .
- $A_{2n} := [-1, 2 + n^{-1}[$  et  $A_{2n+1} := ] - 2 - n^{-1}, 1]$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- $A_n := ] - \infty, a_n]$  avec  $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$  suite monotone.

**Exercice # 16.** Soit  $X := [0, 1[$ . Montrer que tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$n = 2^m + p \text{ avec } m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq p < 2^m. \quad (1)$$

Avec  $m$  et  $p$  déterminés (en fonction de  $n$ ) par la formule (1), nous posons

$$A_n := \left[ \frac{p}{2^m}, \frac{p+1}{2^m} \right[ \subset X, \forall n \geq 1.$$

Trouver  $\limsup A_n$  et  $\liminf A_n$ .

**Exercice # 17.** Comparer  $\liminf_n (A_n \cup B_n)$  et  $(\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n)$ . Donner un exemple de suites telles que

$$\liminf_n (A_n \cup B_n) \neq (\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n).$$

**Exercice # 18.** Montrer que  $(\limsup_n A_n) \setminus (\liminf_n A_n) \subset \limsup_n (A_n \Delta A_{n+1})$ .

**Rappels de cours.** Dans les trois exercices suivants, on pourra utiliser sans preuve les faits suivants :

- L'intervalle  $[0, 1[ \subset \mathbb{R}$  n'est pas a. p. d.
- Si  $A \subset \mathbb{N}$  est infini, alors  $A$  est dénombrable.
- S'il existe une bijection  $\Phi : A \rightarrow B$ , alors :
  - Soit  $A$  et  $B$  sont tous les deux finis;
  - Soit  $A$  et  $B$  sont tous les deux dénombrables;
  - Soit aucun des deux ensembles n'est a. p. d.

**Exercice # 19.** Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
- L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
- L'ensemble  $\mathbb{R}$  est dénombrable.
- L'ensemble  $\mathbb{C}$  est dénombrable.
- L'ensemble  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$  est dénombrable.
- L'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A; A \subset \mathbb{N}\}$  est dénombrable.

**Exercice # 20.** a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p_1, \dots, p_n$   $n$  nombres premiers distincts. Montrer, à l'aide de l'application

$$\varphi : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}, \mathbb{N}^n \ni (k_1, \dots, k_n) \mapsto \varphi(k_1, \dots, k_n) := p_1^{n_1} \cdots p_n^{k_n} \in \mathbb{N},$$

que  $\mathbb{N}^n$  est dénombrable.

- b) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables?
- c) Montrer que  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) := \{A; A \subset \mathbb{N}, A \text{ est fini}\}$  est dénombrable.

**Exercice # 21.** Un nombre réel  $x$  est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $P(x) = 0$ . Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*.

- a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
- b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
- c) Montrer que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

**Exercice # 22.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ensemble dénombrable. Soit  $B = \overline{A} \setminus A$  (avec  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$ ). Existe-t-il un  $A$  tel que :

- a)  $B$  ait exactement  $n$  éléments, pour un  $n \in \mathbb{N}$  donné?
- b)  $B$  soit dénombrable?
- c)  $B$  ne soit pas a. p. d.?

**Exercice # 23.** Montrer qu'il existe un nombre réel qui ne peut pas être décrit par une définition mathématique.

**Exercice # 24.** Nous admettons le résultat suivant, qui sera démontré en topologie : tout ouvert  $U \subset \mathbb{R}$  s'écrit  $U = \bigsqcup_{i \in I} J_i$ , avec les  $J_i$  intervalles ouverts non vides (et d. d. d). Montrer que  $I$  est a. p. d. Donc : *tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est réunion a. p. d. d'intervalles ouverts d. d. d.*

**Exercice # 25.** Soit  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(m, n) := \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $f$  est bijective.