Feuille de TD # 4

Intégrales à paramètres

Exercice # 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrable. Montrer que la *transformée de Fourier de* f, définie par

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath tx} f(x)\, dx,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice # 2. (Transformée de Laplace) Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Nous posons

$$\mathscr{L} f(x) := \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt,\ \forall\, x > 0\,;$$

c'est la *transformée de Laplace de* f.

a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et calculer $\dfrac{d^k F}{dx^k}(x)$ pour tout $k \geq 1$ et $x > 0$.

b) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt$.

c) Calculer $\int_0^\infty (t^2 + t + 1)\, e^{-t} dt$.

Exercice # 3. (Fonction zêta de Riemann) La *fonction zêta de Riemann* est donnée par la formule

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},\ \forall\, s > 1.$$

Montrer que $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^∞.

Exercice # 4. a) Retrouver la théorie des séries entières à partir de la théorie de l'intégration. Plus précisément, soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre réels (ou complexes). Soient

$$R := \sup\{r \geq 0\,;\ \lim_n a_n r^n = 0\}$$

et $I :=] - R, R[$. Posons $F(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\forall\, x \in I$. Montrer que $F \in C^\infty(I)$ et que

$$F^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k},\ \forall\, x \in I.$$

b) Calculer $\sum_{n \geq 1} (-1)^n\, n\, x^{n-1}$, $|x| < 1$.

Exercice # 5. Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.

b) Montrer que f est continue sur $]0, \infty[$.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim_{x \searrow 0} x\, f(x)$.

Exercice # 6. Soit $f(x,t) := \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x$ pour $t \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $F(x) := \int_0^1 f(x,t)\, dt$ est finie si et seulement si $x > -1$.

b) Montrer que F est dérivable sur $]-1,\infty[$ et calculer $F'(x)$.

c) Calculer $\lim_{x\to\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 7. a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge. Notons K sa somme.

b) Soit $f(x) := \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$.

c) Déterminer $f(x)$ et $\lim_{x \searrow -1} f(x)$.

d) En déduire la valeur de K.

Exercice # 8. Pour $x \geq 0$, soient

$$F(x) := \left(\int_0^x \exp(-t^2)\, dt \right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\, dt.$$

a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.

c) En déduire la valeur de $I := \int_0^\infty \exp(-t^2)\, dt$, ainsi que la valeur de $J := \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\, dt$.

Exercice # 9. Soit $I(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\, dx$, $\alpha \geq 0$.

a) Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Donner la formule de $I'(\alpha)$ si $\alpha > 0$.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Décomposer la fraction $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

d) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice # 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\, dx$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer f'' et les limites à l'infini de f et f'.

c) En déduire une expression simple de f.

Exercice # 11. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$.

a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ est P-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\, dP(t), \ \forall\, x \geq 0.$$

b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Nous supposons que l'application $t \mapsto t^2$ est P-intégrable. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2}$.
(On pourra établir et utiliser l'inégalité $1-\cos u \leq u^2/2$.)

d) « Réciproquement », supposons $\liminf_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2} < \infty$. Montrer que l'application $t \mapsto t^2$ est P-intégrable. (On pourra utiliser le lemme de Fatou.)

Exercice # 12. Pour $x \in \mathbb{R}$, soient $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.

b) Montrer que

$$F(0) - F(x) + G(x) = C\,|x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{où } C := \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

c) (i) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.
(ii) En utilisant la question b), en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.
(iii) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.

d) Déduire de tout ceci la valeur de la constante C.

Exercice # 13. (Transformée de Fourier d'une gaussienne) Soit $a > 0$. Soit $g_a(x) := e^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer la transformée de Fourier de g_a, donnée par $h_a(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath tx} g_a(x)\,dx$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Rappelons que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

a) Montrer que g_a est Lebesgue intégrable et calculer $h_a(0)$.

b) Montrer que h_a est de classe C^1 et donner la formule de sa dérivée h_a'.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $h_a'(t) = (-t\,h_a(t))/(2a)$.

d) En déduire que $h_a(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-t^2/(4a)}$.

Exercice # 14. Soit h_a la fonction de l'exercice précédent.
Soit $f(t) := \int_0^\infty e^{-a\,t}\, h_a(t)\,da$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

Exercice # 15. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)\,dt$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.

d) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel.

Exercice # 16. Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(t,x) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t > 0$, soit $F(t) := \int_0^\infty f(t,x)\,dx$.

b) Montrer que F est continue sur $]0,\infty[$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.

d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice # 17. Pour $y \geq 0$, soit $F(y) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\, dx$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F(0)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{y\to\infty} F(y)$.

c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I := \int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx$.

e) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geq 0$.

f) Pour finir, retrouver (une n^{e} fois !) la valeur de I.

Exercice # 18. (Fonction Gamma d'Euler)

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
La *fonction Gamma d'Euler* est définie par

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt,\ \forall\, x > 0.$$

b) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que Γ est strictement convexe.

Exercice # 19. Soit $F(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(tx)}{x\,(1+x^2)}\, dx$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$, puis $F(t)$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice # 20. Nous admettons la convergence de l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Pour tout $t \geq 0$, posons $S(t) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} \sin x\, dx$.

a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.

b) Déterminer $\lim_{t\to\infty} S(t)$ et calculer $S(t)$ pour tout $t > 0$.

c) Soient $A > 0$ et $t > 0$.

(i) Montrer que $\left|\displaystyle\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\, dx\right| \leq \frac{2}{A}$.

(ii) Prouver que, pour tout $A > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{t\searrow 0} \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx$.

(iii) En déduire la valeur de I.

Exercice # 21. (Extension harmonique) Soit

$$U := \mathbb{R}\times]0,\infty[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y > 0\}.$$

Si $(x,y) \in U$, soit $P_y(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$; P_y est le *noyau de Poisson*. Si f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$, posons

$$u(x,y) := \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)\, f(t)\, dt,\ \forall\, (x,y) \in U.$$

a) Montrer que u est finie en tout point de U.

b) Montrer que u est de classe C^2 sur U.

c) Montrer que $\Delta u = 0$, où $\Delta u(x,y) := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est le *laplacien.*

d) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{y \searrow 0} u(x,y) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, u est « la » (en fait, une) solution du *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ \lim_{y\searrow 0} u(x,y) = f(x), & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Cet u est l'*extension harmonique* de f.

Exercice # 22. Posons $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$.

a) Déterminer l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R}\,;\ F(x) \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est continue sur D.

b) Démontrer que F est de classe C^1 sur D et que

$$F'(x) = \int_1^\infty \frac{t^x \ln t}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt,\ \forall\, x \in D.$$

En déduire le sens de variation de F.

c) Déterminer la limite à l'infini de F.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^x}$ et $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} F(x)$.

Exercice # 23. Le but de cet exercice est de démontrer, pour tout $x > 0$, l'identité

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}dt,$$

et d'en déduire (à nouveau !) la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$.

a) Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$, $\forall\, x \geq 0$.

(i) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0,\infty[$.

(ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,\infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x > 0$.

(iii) Montrer que $f(x) + f''(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.

b) Soit $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,dt$, $\forall\, x \geq 0$. Rappelons que $g(0)$ existe (en tant qu'intégrale généralisée).

(i) Montrer, par intégration par parties, que $g(x)$ existe pour tout $x > 0$ (en tant qu'intégrale généralisée).

(ii) Par un changement de variables, prouver que, pour $x > 0$, nous avons l'identité

$$g(x) = \cos x \int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du.$$

(iii) Montrer que $g(x)$ est de classe C^2 sur $]0,\infty[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x>0$.

(iv) Montrer que pour tout $x>0$, $g(x)+g''(x)=\dfrac{1}{x}$.

c) Dans cette partie, nous nous proposons de montrer l'égalité de f et de g sur $]0,\infty[$.

(i) Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ et que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

(ii) À partir de l'équation différentielle du seconde ordre vérifiée par les deux fonctions, en déduire que $f(x)=g(x)$ pour $x>0$.

d) Dans cette partie, nous nous proposons de trouver $g(0)$.

(i) Montrer que $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)=g(0)$.

(ii) En déduire la valeur de $g(0)$.

Exercice # 24. (Continuité de l'intégrale définie) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable. Posons

$$F(x):=\begin{cases}\displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,dt, & \text{si } x\geq 0\\ \displaystyle-\int_{[x,0]} f(t)\,dt, & \text{si } x<0\end{cases}.$$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si f est continue en 1, alors F est dérivable en 1 et $F'(1)=f(1)$.

c) De même si on suppose f *localement intégrable*, c'est-à-dire f est (Lebesgue) mesurable et $\int_K |f(t)|\,dt<\infty$, pour tout compact $K\subset\mathbb{R}$.