Feuille de TD # 6

Changement de variables

Notations

a) Pour $x > 0$, $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \in]0,\infty[$ (c'est la *fonction Gamma d'Euler*).

b) ν_n est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$.

c) λ_n est la mesure de Lebesgue (complète) dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice # 1. On demande de calculer

$$I := \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Voici une « solution ».

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \dfrac{1}{1+\tan^2 x}} = \int_0^\pi \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x}\,dx.$$

En posant $t := \tan x$, nous avons $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = (1+\tan^2 x)\,dx$, d'où

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{dt}{2+t^2} = \int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} = 0.$$

a) Pourquoi est-ce manifestement faux ?

b) Où est l'erreur de raisonnement ?

c) Quelle est la valeur de I ?

Exercice # 2. Vrai ou faux. Si $\Phi :]a,b[\to]c,d[$ est un C^1-difféomorphisme et $f :]c,d[\to \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\Phi(y))\,\Phi'(y)\,dy$$

au sens du théorème de changement de variables.

Exercice # 3. (Fonction Bêta d'Euler)

a) Montrer que, $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0$, l'application $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ_1-intégrable sur $]0,1[$.

La *fonction Bêta d'Euler* est définie par

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\ \forall\, x,y > 0.$$

b) Soient $x > 0, y > 0$ et $I := \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1}\, s^{y-1}\, e^{-(t+s)}\, dsdt$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbb{R}^2$: $u = t$ et $v = t + s$.

c) En calculant I d'une autre manière, établir, pour $x, y > 0$, l'identité

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1}$$

Exercice # 4. a) Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(u,v) := (s,t)$, avec $s := uv$ et $t := u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,\infty[\times]0,1[$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Calculer l'intégrale I de l'exercice précédent en utilisant le changement de variables H, et retrouver l'identité (1).

Exercice # 5. a) Calculer $\displaystyle\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$, où $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \le x, y \le 1,\ 0 < x^2+y^2 \le 1\}$.

b) Calculer l'aire de $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ (avec $a, b > 0$ paramètres).

c) Calculer $\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$.

d) Soient $a, b > 1$. Calculer l'aire de B, où B est l'ouvert délimité par les courbes d'équation $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$ et contenant le point $(1,1)$.

Exercice # 6. Pour $n \ge 1$, soit $U_n := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0, x_1 + \cdots + x_n < 1\}$. Soit $S_n := \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1}. En déduire la valeur de S_n.

Exercice # 7. Soient $0 \le a < b$. Soit

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

a) Montrer que D est un borélien.

b) À l'aide du changement de variables $u := y^2 - x^2$, $v := xy$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I := \int_D (y^2-x^2)^{xy}\,(x^2+y^2)\, dxdy$ en fonction de a et b.

Exercice # 8. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$U := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,;\, u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\}.$$

a) Montrer que U est borélien.

b) Calculer $I := \int_U u\,v\,w\, dudvdw$. On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant :

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w) := (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice # 9. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Pour $a, b, c > 0$ fixés, soit

$$I_{a,b,c} := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} x^{a-1}\, y^{b-1}\, z^{c-1}\, f(x+y+z)\, dxdydz.$$

a) Soit $(x,y,z) \xmapsto{H} (u,v,w)$, où $u := x+y+z$, $v := \dfrac{x}{x+y}$ et $w := \dfrac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

b) En utilisant H et la formule (1), en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^\infty u^{a+b+c-1}\, f(u)\, du. \tag{2}$$

Exercice # 10. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit

$$J := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} \frac{dxdydz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$

A quelle condition sur α, β, γ, l'intégrale J est-elle finie ?

Trouver la réponse de deux façons différentes :

a) En utilisant le théorème de Tonelli.

b) En utilisant (2).

Exercice # 11. Soit $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

a) Calculer

$$L := \int_B |x|^{a-1}\, |y|^{b-1}\, |z|^{c-1}\, dxdydz\ :$$

  (a) En utilisant les coordonnées sphériques.

  (b) En utilisant (2).

b) Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice # 12. Rappelons que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit

$$H_a(x) := \int_0^\infty e^{-(at^2 + x/t^2)}\, dt,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x \geq 0.$$

a) Montrer que la fonction $H_a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

b) Calculer $H_a(0)$.

c) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, \infty[$.

d) Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$. Indication : utiliser le changement de variable $t := \dfrac{\alpha}{s}$, avec α convenablement choisi.

e) En déduire que

$$H_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}},\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x \geq 0. \tag{3}$$

Exercice # 13. Pour $\alpha > 0$, soit

$$J(\alpha) := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2 + x/y^2)}\, x^{\alpha - 1/2}\, dxdy.$$

a) En utilisant (3), montrer que $J(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)$.

b) En utilisant le changement de variables $u := xy^2$, $v := x/y^2$, que l'on justifiera, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

c) En déduire la formule $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice # 14. Rappelons que la fonction *cosinus hyperbolique* est définie par $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Nous considérons les intégrales suivantes

$$A := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dsdt}{\cosh s + \cosh t}, \quad B := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dsdt}{\cosh s + \cosh t}, \quad C := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dudv}{\cosh u \, \cosh v}.$$

(i) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

(ii) En utilisant le changement de variables $s := u - v$, $t := u + v$, calculer B, puis A.

b) Soit $H : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par $H(x) := \int_0^\infty \exp(-x \cosh t)\, dt$.

(i) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, \infty[$. Déterminer les limites de H en 0 et à l'infini.

(ii) Montrer que $\int_0^\infty H(x)\, dx = \pi/2$.

(iii) En utilisant l'intégrale A, montrer que $\int_0^\infty [H(x)]^2\, dx = \pi^2/4$.

Exercice # 15. Soit $J := \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1 - xy}$.

a) Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

b) Effectuer le changement de variables $x := u - v$ et $y := u + v$ et en déduire que

$$J = \int_Q \frac{2\, dudv}{1 - u^2 + v^2},$$

où Q est un quadrilatère du plan que l'on déterminera.

c) Effectuer le changement de variable $u := \cos t$ et en déduire que $J = \pi^2/6$. Rappels : $\dfrac{1 - \cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\pi\,\mathbb{Z}$, et $\arctan(z) + \arctan(1/z) = \pi/2$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$.

Exercice # 16. (Théorème du changement de variable dans $\mathbb{R}$) Soit $\Phi :]a, b[\to]c, d[$, avec $]a, b[,]c, d[\subset \mathbb{R}$. Nous supposons Φ un C^1-difféomorphisme, c'est-à-dire : $\Phi \in C^1$, Φ bijectif et $\Phi'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in]a, b[$.

a) Montrer que Φ' est de signe constant sur $]a, b[$.

Dans la suite nous supposons $\Phi'(x) > 0$, $\forall\, x \in]a, b[$. Nous nous proposons de montrer la validité du théorème du changement de variable : si $f :]c, d[\to \mathbb{R}$ est borélienne et si $g(y) := f(\Phi(y))\, \Phi'(y)$, $\forall\, y \in]a, b[$, alors f a une intégrale de Lebesgue si et seulement si g en a une et dans ce cas

$$\int_{]c,d[} f\, d\nu_1 = \int_{]a,b[} g\, d\nu_1, \text{ ou encore } \int_c^d f(x)\, dx = \int_a^b f(\Phi(y))\, \Phi'(y)\, dy. \tag{4}$$

b) Montrer la validité de (4) si $f := \chi_I$, avec $I \subset]c, d[$ intervalle.

c) En déduire que (4) est vraie si $f = \chi_B$, avec $B \in \mathscr{B}_{]c,d[}$. Indication : classe monotone.

d) En déduire que (4) est vraie si f est borélienne positive.

e) Conclure.

f) Et si f est Lebesgue mesurable ?

g) Et si $\Phi'(x) < 0, \forall\, x \in]a, b[$?

Exercice # 17. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions Lebesgue mesurables. Nous nous proposons de montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

a) Donner un sens à l'égalité (5).

b) La justifier.

Exercice # 18. Soit $|\ |$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f :]0, \infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne.

a) Nous nous proposons de montrer qu'il existe une constante $C \in]0, \infty[$ (dépendant uniquement de n, en particulier indépendante de f) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = C \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr. \tag{6}$$

(i) Donner un sens à l'égalité (6).

(ii) La justifier (pour C convenable).

b) En calculant de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx$, montrer que $C = \dfrac{2\, \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

c) Calculer, en fonction de la fonction Γ, le volume de la boule euclidienne unité.

Exercice # 19. Soit $\|\ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Nous nous proposons de trouver un analogue de l'égalité (6) de l'exercice précédent pour le calcul de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, dx$, où $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est borélienne.

a) Supposons d'abord $f \geq 0$. En utilisant les coordonnées sphériques, montrer l'existence d'une constante $C' \in]0, \infty[$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, dx = C' \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\, dr. \tag{7}$$

b) Montrer que (7) reste encore vraie (dans un sens à expliquer) si f n'est plus supposée positive.

c) Soient $U := \{x \in \mathbb{R}^n\, ;\ \|x\| > 1\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\int_U \|x\|^{-a}\, dx$?

Exercice # 20. Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x - 1/x)\, dx.$$

Exercice # 21. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée, soit

$$I(F) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x+y)}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\, dxdy.$$

a) Montrer que $I(F)$ est bien définie.

b) Calculer $I(F)$ si $F(x) := \sin x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer, en utilisant un changement de variables, que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x+y)}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\, dxdy = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(z)}{\pi(4+z^2)}\, dz.$$

d) Soit $F_\lambda(x) := \cos(\lambda x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ paramètre. Soit $G(\lambda) := I(F_\lambda)$. Écrire G comme la transformée de Fourier d'une fonction que l'on précisera.

e) Montrer que, pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{x}{y}\right) e^{-x^2/2-y^2/2}\, dxdy = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{F(z)}{1+z^2}\, dz.$$