Contrôle (21 novembre 2023)

Durée : 90 minutes ; documents et appareils électroniques interdits

Rappel de notations : On notera λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$. On notera aussi souvent simplement $\mathrm{d}x$ pour désigner l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda(\mathrm{d}x)$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère la fonction $f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto n\,\mathrm{e}^{-n|x|}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Justifier brièvement l'existence de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x$ et la calculer.

   Solution. La fonction f_n est continue, donc mesurable, et positive, donc elle admet une intégrale sur $\mathbf{R}$. Par parité, elle est le double de l'intégrale sur $\mathbf{R}^+$. Par équivalence entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue, on peut la calculer avec une primitive :

   $$\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = 2\left[-\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\infty} = 2. \qquad \square$$

2. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   Solution. Pour $x = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$. Pour $x \neq 0$, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ par « croissances comparées ». $\square$

3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ intégrable telle que pour tout n entier et tout x réel non nul [1], on ait $f_n(x) \leq g(x)$.

   Solution. S'il existait une telle fonction g, on pourrait par le théorème de convergence dominée permuter la limite et l'intégrale. Vu que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle presque partout, on aurait :

   $$2 = \lim_{n\to\infty} 2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} 0\mathrm{d}x = 0,$$

   ce qui est évidemment absurde. $\square$

1. Le texte proposé en examen ne précisait malheureusement pas « non nul ».

Exercice 2
Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{(\sin(x))^n}{x^2} \mathrm{d}x$$

est bien définie, puis calculer sa limite quand n tends vers $+\infty$.

Remarque. Pour mémoire, étant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, il y a deux classes de fonctions qui admettent une intégrale :

— les fonctions mesurables positives (à valeur dans $[0, \infty[$ ou même $[0, \infty]$) ; une telle fonction est dite intégrable si son intégrale est finie ;

— les fonctions mesurables dont la valeur absolue a une intégrale finie – autrement dit, la valeur absolue, qui est une fonction mesurable positive, est intégrable.

De façon générale, une fonction intégrable est une fonction mesurable dont l'intégrale de la valeur absolue est finie.

Après avoir noté que h_n est mesurable, deux options :

— soit on démontre que h_n est intégrable pour tout n en étudiant l'intégrale de Riemann généralisée « en 0 » et « en ∞ » ; à tort ou à raison, l'énoncé semble inciter à procéder ainsi ;

— soit on le déduit du théorème de convergence dominée, ce qui revient à omettre la partie entre $*$— et —$*$ ci-dessous.

Solution. On note $h_n :]0, \infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto (\sin^n x)/x^2$. C'est une fonction continue sur $]0, \infty[$ donc mesurable et même localement intégrable, c'est-à-dire intégrable sur tout segment compact inclus dans $]0, \infty[$.
$*$— Montrons que $\int_0^\infty |h_n(x)| \mathrm{d}x < \infty$. Il s'agit de montrer la convergence de cette intégrale de Riemann généralisée. Au voisinage de 0, vu que $\sin x \sim x$, on a

$$h_n(x) \sim \frac{x^n}{x^2} \sim x^{n-2}.$$

Comme $n \geq 2$, la fonction h_n admet un prolongement par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $[0, 1]$.

Sur $[1, \infty[$, on a

$$|h_n(x)| \leq \frac{1}{x^2}$$

et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, \infty[$ donc h_n l'est également.

Ainsi, h_n est intégrable sur $]0, \infty[$. —$*$

Pour calculer la limite de l'intégrale de h_n, on commence par calculer la limite simple de (h_n). Soit $x > 0$:

— si $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{N}$, alors $\sin x = 1$ donc $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1/x^2$;

— si $x \in \frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbf{N}$, alors $\sin x = -1$ et la suite $(h_n(x))$ n'a pas de limite ;

— si $x \notin A$ où $A = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{N}$, alors $|\sin x| < 1$ donc $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$.

Puisque A est dénombrable, sa mesure de Lebesgue est nulle donc la suite (h_n) tend presque partout vers la fonction nulle 0.

Il ne reste plus qu'à dominer la suite (h_n) par une fonction intégrable et indépendante de n. Pour $x \in]0,1]$, vu que $|\sin x| \leq x$, on a

$$\left|h_n(x)\right| \leq x^{n-2} \leq 1$$

et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0,1]$.

Pour $x \geq 1$, on a :

$$\left|h_n(x)\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1,\infty[$.

Ainsi, pour tout x et tout n on a $|h_n| \leq g$ où g est définie par

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1\,; \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Pour résumer :

— pour tout n, h_n est mesurable ;

— pour presque tout x, $\big(h_n(x)\big)$ converge vers 0 ;

— on a pour tout x et tout x la majoration $|h_n| \leq g$, où g est intégrable et indépendante de n.

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty h_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty 0\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

Remarque. Erreurs les plus fréquentes sur cet exercice :

— confusion entre mesurabilité et intégrabilité (comme dans « f est continue donc intégrable ») ;

— la fonction $x \mapsto 1/x^2$ [utilisée comme fonction g] est intégrable sur $]0,\infty[$;

— invocation du théorème de convergence dominée sans vérification d'une inégalité de domination ;

— écriture $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty h_n \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} h_n \mathrm{d}\lambda$ sans savoir si la limite simple de (h_n) existe ;

— erreur sur le signe de h_n, vue comme positive ;

— limite erronée : $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = -1/x^2$ si $x \in \frac{3\pi}{2} + \mathbf{N}\pi$.

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et soit a un réel.
   (a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
      i. $\limsup_n u_n \leq a$;
      ii. pour tout ε réel strictement positif, il existe n_0 entier tel que pour tout n supérieur à n_0, on a $u_n \leq a + \varepsilon$.
   (b) Énoncer une condition analogue pour la limite inférieure.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels avec $\liminf_n x_n = 0$ et $\limsup_n x_n = 1$.

(a) Montrer que $\limsup_n |x_{n+1} - x_n| \leq 1$.

(b) Montrer que l'on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim_k |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| = 1$.

Remarque. Outre la définition mal connue de limite supérieure, l'exercice, du moins la première question, utilisait deux faits très simples mais qui ne sortent pas :

— pour une suite (s_n) convergente,

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ s_n \leq a + \varepsilon\,;$$

en effet, si $L = \lim_{n\to\infty} s_n$ (supposée finie), on sait qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|s_n - L| \leq \varepsilon$. Par suite, $s_n - L \leq \varepsilon$, d'où $s_n \leq L + \varepsilon \leq a + \varepsilon$. La réciproque est vraie aussi mais on va essentiellement la démontrer plus bas.

— pour A et B réels,

$$A \leq B \iff \forall \varepsilon > 0,\ A \leq B + \varepsilon.$$

Solution. 1. Pour $n \geq 0$, on note $s_n = \sup_{k\geq n} u_k$. On sait que la suite (s_n), qui est décroissante et donc admet une limite, tend vers $\limsup_n u_n$.

(a) Supposons que $\limsup_{n\to\infty} u_n \leq a$, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} s_n \leq a$. Il existe donc n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $s_n \leq a + \varepsilon$; autrement dit, pour tout $k \geq n$, $u_n \leq a + \varepsilon$. Cela signifie que pour tout $k \geq n_0$, $u_n \leq a + \varepsilon$, ce qui est l'assertion (ii).

Inversement, supposons (ii) satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$, trouvons n_0 comme dans (ii). Pour $n \geq n_0$, on a $u_n \leq a + \varepsilon$ donc, à n fixé, on a $u_k \leq a + \varepsilon$ pour tout $k \geq n$. Autrement dit, $s_n \leq a + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. En passant à la limite, il vient $\limsup_n u_n \leq a + \varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a en fait $\limsup_n u_n \leq a$.

(b) En utilisant $\liminf_n u_n = -\limsup_n(-u_n)$, on obtient l'équivalence entre les assertions suivantes :

i. $\liminf_n u_n \geq a$;

ii. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq a - \varepsilon$.

2. (a) On suppose que $\limsup_n x_n = 1$ et $\liminf_n x_n = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 1, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait simultanément $x_n \leq 1 + \varepsilon$ et $x_n \geq -\varepsilon$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a donc :

$$x_{n+1} - x_n \leq 1 + \varepsilon - (-\varepsilon) \leq 1 + 2\varepsilon$$

et

$$x_n - x_{n+1} \leq 1 + \varepsilon - (-\varepsilon) \leq 1 + 2\varepsilon$$

d'où

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Toujours par la question 1.a, on en déduit que $\limsup_n |x_{n+1} - x_n| \leq 1$.

(b) On sait que la limite supérieure (resp. inférieure) est la plus petite valeur d'adhérence de la suite. Par hypothèse, il existe donc deux extractrices [fonctions $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissantes] φ et ψ telles que $\lim_{p\to\infty} x_{\varphi(p)} = 1$ et $\lim_{p\to\infty} x_{\psi(p)} = 0$. On pose alors, pour k entier, $n_k = x_{\varphi(k/2)}$ si k est pair et $n_k = x_{\psi((k-1)/2)}$ si k est impair. Alors $|x_k - x_{k+1}|$ est la valeur absolue de la différence entre un terme pair proche de 1 et un terme impair proche de 0 donc elle tend vers 1.

Plus formellement (à quoi bon ?), si on note $d_k = |x_{n_k}|$, alors pour tout p on a $|x_{n_{2p+1}} - x_{n_{2p}}| = |x_{\psi(p)} - x_{\varphi(p)}|$ donc $\lim_{p\to\infty} d_{2p} = 1$ et $|x_{n_{2p+2}} - x_{n_{2p+1}}| = |x_{\varphi(p+1)} - x_{\psi(p)}|$ donc $\lim_{p\to\infty} d_{2p+1} = 1$ aussi. Cela suffit pour montrer que $\lim_{k\to\infty} d_k = 1$.

□

Remarque. Erreurs les plus fréquentes dans cet exercice (un festival) :

— affirmation (très fausse !) que toute suite admet une limite ;

— affirmation fausse $\limsup(x_{n+1} - x_n) = \limsup x_{n+1} - \liminf x_n$ – penser à la suite définie par $x_n = \sqrt{n}$, pour laquelle $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ et $\limsup x_n = \liminf x_n = \infty$ (de sorte que la différence n'a pas de sens), ou à $x'_n = \sin\sqrt{n}$, pour laquelle $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ et $\limsup x_n = 1$ et $\liminf x_n = -1$; ce qui est vrai (le démontrer !), c'est que $\limsup(x_{n+1} - x_n) \leq \limsup x_{n+1} - \liminf x_n$ (disons pour une suite bornée) ;

— affirmation fausse que si $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$, alors il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq 1$ – et variations sur le thème ; des suites comme $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ permettent de tester (réfuter) ces affirmations ;

— manipulations hasardeuses des variables et des quantificateurs, par exemple :

  — « on prend $\varepsilon = 1/n$ d'où $\forall n \geq 1$, $u_n \leq a + 1/n$ (le problème est qu'ici n est à la fois libre, définie hors de la formule par $\varepsilon = 1/n$, et liée)) ;

  — dans 2.a, penser qu'on fait une disjonction de cas en séparant un « premier cas : $x_{n+1} \geq x_n$ » et un « deuxième cas : $x_{n+1} \leq x_n$ », en sous-entendant (et en utilisant) que ces inégalités sont vraies pour tout n : cela revient à affirmer que toute suite est monotone ;

— inégalité $u_n \geq a + \varepsilon$ au lieu de $u_n \geq a - \varepsilon$ dans 1.b ;

— (dans 2(a)) espoir de tirer quelque chose de l'inégalité triangulaire sous la forme $|x_{n+1} - x_n| \leq |x_{n+1}| + |x_n|$: si on a écrit ça, c'est plus ou moins fichu ;

— écritures fumeuses comme $\limsup_n u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_n u_n$ – au lieu de $\limsup_n u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k$;

— écritures complètement hors de propos du genre $\limsup u_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcup_{k\geq n} u_k$... autrement dit, confusion entre limite supérieure d'une suite réelle et d'une suite d'ensembles.

Exercice 4

Soit μ une mesure borélienne sur $[0, 1]$, et soit λ la mesure de Lebesgue.

1. On suppose que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout intervalle $I \subseteq [0, 1]$ tel que $\lambda(I) = 1/2^m$, on a $\mu(I) = 1/2^m$.

   (a) Montrer que pour tout $a \in [0, 1]$, $\mu(\{a\}) = 0$.

   Solution. Première solution. On suppose d'abord que $a < 1$. Pour m assez grand, on a $2^{-m} < 1 - a$ donc $I = [a, a + 2^{-m}] \subset [0, 1]$. Mais alors I et $J =]a, a + 2^{-m}]$

sont deux intervalles tels que $\lambda(I) = \lambda(J) = 2^{-m}$ donc $\mu(I) = \mu(J) = 2^{-m}$. De plus, I est la réunion disjointe de J et $\{a\}$, de sorte que

$$2^{-m} = \mu(I) = \mu(J) + \mu\big(\{a\}\big) = 2^{-m} + \mu\big(\{a\}\big)$$

et par différence, $\mu\big(\{a\}\big) = 0$.

Si $a = 1$, on remplace I et J par $[2^{-1}, 1]$ et $\big[2^{-1}, 1\big[$.

Deuxième solution (plus longue mais plus naturelle ?). Supposons d'abord que $a \in \,]0,1[$. Pour $m \geq 1$, on note $I_m = [a - 2^{-m-1}, a + 2^{-m-1}]$. Pour m assez grand, disons $m \geq m_0$, on a $I_m \subseteq [0,1]$ et $\lambda(I_m) = 2^{-m}$ donc $\mu(I_m) = 2^{-m}$. On peut alors invoquer le théorème de limite décroissante, puisque $\mu(I_{m_0}) < \infty$:

$$\mu\big(\{a\}\big) = \mu\left(\bigcap_{m \geq m_0} I_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(I_m) = \lim_{m\to\infty} 2^{-m} = 0.$$

À présent, si $a = 0$ (resp. si $a = 1$), on n'a qu'à remplacer I_m par $[0, 2^{-m}]$ (resp. par $[1 - 2^{-m}, 1]$). □

(b) Soit $a \in [0,1]$. Soit $M \in \mathbf{N}^*$ un entier positif et $(d_m)_{m=1,\ldots,M} \in \{0,1\}^M$. On note $c = a + \sum_{m=1}^{M} d_m/2^m$. Montrer que si $c \in [0,1]$, alors $\mu([a,c]) = \lambda([a,c])$.

Solution. Si on note, pour $m \leq M$, $c_m = a + \sum_{p=1}^{m} d_p 2^{-p}$, on a

$$a = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_m \leq \cdots \leq c_M = c$$

et donc

$$[a,c] = [c_0, c_M] = \bigcup_{m=0}^{M-1} [c_m, c_{m+1}[\cup \{c_M\},$$

où la réunion est disjointe. Or, pour tout m, on a soit $c_{m+1} = c_m$, auquel cas $\lambda\big([c_m, c_{m+1}[\big) = \lambda(\varnothing) = 0 = \mu\big([c_m, c_{m+1}[\big)$, soit $c_{m+1} - c_m = 2^{-m+1}$, auquel cas $\lambda\big([c_m, c_{m+1}[\big) = 2^{-m-1} = \mu\big([c_m, c_{m+1}[\big)$. Il vient

$$\begin{aligned}\mu\big([a,c]\big) &= \sum_{m=0}^{M-1} \mu\big([c_m, c_{m+1}[\big) + \mu\big(\{c\}\big)\\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \lambda\big([c_m, c_{m+1}[\big) + \lambda\big(\{c\}\big)\\ &= \lambda\big([a,c]\big).\end{aligned}$$

□

(c) Démontrer que pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$, on a $\mu\big([a,b]\big) = \lambda\big([a,b]\big)$.
Indication : *pour $a < b$, on pourra écrire $b - a$ en base deux, c'est-à-dire $b - a = \sum_{m=1}^{+\infty} d_m/2^m$ avec $d_m \in \{0,1\}$ pour tout m, puis introduire la suite définie par $c_M = a + \sum_{m=1}^{M} d_m/2^m$ pour $M \in \mathbf{N}^*$.*

Solution. On a, vu que $\mu(\{b\}) = 0$ et que $(c_M)_{M\geq 1}$ est une suite croissante qui converge vers b :

$$\begin{aligned}
\mu([a,b]) &= \mu([a,b[) \\
&= \mu\left(\bigcup_{M\geq 1} [a,c_M[\right) \\
&= \lim_{M\to\infty} \mu([a,c_M[) \\
&= \lim_{M\to\infty} \lambda([a,c_M[) \\
&= \lambda\left(\bigcup_{M\geq 1} [a,c_M[\right) \\
&= \lambda([a,b[) \\
&= \lambda([a,b]).
\end{aligned}$$

□

(d) En déduire que $\mu = \lambda$.

Solution. La mesure de Lebesgue est l'unique mesure définie sur la tribu borélienne de $[0,1]$ pour laquelle la mesure d'un segment $[a,b]$ est $b-a$. On vient de voir que μ satisfait à cette condition, ce qui entraîne que $\mu = \lambda$. □

2. On suppose dans cette question que pour tout borélien $B \subseteq [0,1]$ tel que $\lambda(B) = 1/2$, on a $\mu(B) = 1/2$ (les hypothèses faites dans la question 1 n'étant plus valables).

(a) Vérifier que $\mu([0,1]) = 1$ et que $\mu(\{1\}) = 0$.

Solution. Le segment $[0,1]$ est la réunion disjointe de $[0,1/2[$ et de $[1/2,1]$, lesquels sont deux boréliens dont la mesure de Lebesgue est $1/2$. On a donc $\mu([0,1/2[) = \mu([1/2,1]) = 1/2$ et $\mu([0,1]) = 1/2+1/2 = 1$.
Les boréliens $[1/2,1[$ et $[1/2,1]$ ont tous deux une mesure de Lebesgue égale à $1/2$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \mu(\{1\}) &= \lambda([1/2,1[) + \mu(\{1\}) \\
&= \mu([1/2,1[) + \mu(\{1\}) \\
&= \mu([1/2,1]) \\
&= \lambda([1/2,1]) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et enfin $\mu(\{1\}) = 0$. Pour $a \in [0,1]$, on montrerait de même en considérant $[a-1/2,a]$ ou $[a,a+1/2]$ que $\mu(\{a\}) = 0$. □

(b) Pour $k \in \{1,2,3,4\}$, on note $m_k = \mu\left(\left[\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}\right[\right)$. Déterminer $m_k + m_l$ si k et l sont deux entiers distincts compris entre 1 et 4 ? En déduire que l'on a les égalités $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1/4$.

Solution. Pour $k \neq l$, la réunion de $\left[\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}\right[$ et $\left[\frac{l-1}{4}, \frac{l}{4}\right[$ est disjointe donc c'est un borélien de mesure de Lebesque $1/4 + 1/4 = 1/2$. On a donc $m_k + m_l = 1/2$ pour tous $k \neq l$.
On a donc $m_1 + m_3 = 1/2 = m_2 + m_3$, d'où $m_1 = m_2$. On démontre de même que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ d'où la valeur commune des m_k est $1/4$. □

(c) Soit maintenant m un entier naturel et soit $I_0 \subseteq [0,1]$ un intervalle avec $\lambda(I_0) = 2^{-(m+1)}$. Montrer que $\mu(I_0) = 2^{-(m+1)}$. (*Indication :* On pourra considérer $2^m + 1$ intervalles deux à deux disjoints $I_0, I_1, \dots, I_{2^m}$.)

Solution. Soit $J_k = \left[k2^{-(m+1)}, (k+1)2^{-(m+1)}\right[$ pour $k = 0, \dots, 2^{m+1} - 1$. Obsérvons que les J_k sont tous disjoints et que I_0 intersecte au plus deux des J_k. Donc on peut choisir $I_1, \dots, I_{2^m}$ parmi les J_k de manière que $I_0, I_1, \dots, I_{2^m}$ sont deux à deux disjoints. Soit $m_k = \mu(I_k)$. On a pour tout $k \leq 2^m$:

$$\sum_{j \neq k} m_j = \mu(\bigcup_{j \neq k} I_j) = \lambda(\bigcup_{j \neq k} I_j) = 1/2. \tag{1}$$

En faisant la somme de ces équations pour $k \leq 2^m$, on obtient :

$$2^m \sum_j m_j = (2^m + 1)/2,$$

ou

$$\sum_j m_j = 1/2 + 2^{-(m+1)}.$$

Ceci avec (1) pour $k = 0$ implique que $m_0 = 2^{-(m+1)}$. □

(d) Conclure que $\mu = \lambda$.

Solution. On s'est ramené à l'hypothèse de la première question, ce qui assure que $\mu = \lambda$. □