TP + TD Martingales

Exercice 1 *L'urne de Polya*

On considère une urne, contenant initialement a boules blanches et b boules rouges. On suppose que l'on dispose à côté d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges. À chaque instant $n \geq 1$, on tire une boule uniformément au hasard dans l'urne: si elle est blanche, on la remet dans l'urne et l'on ajoute en plus dans l'urne une boule blanche prise dans le stock ; si elle est rouge, on la remet dans l'urne et l'on ajoute en plus dans l'urne une boule rouge prise dans le stock.

Pour $n \geq 1$, on note B_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'instant n, et l'on note $X_n := \frac{B_n}{a+b+n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne à ce même instant. Pour $n \geq 0$, on pose $\mathcal{F}_n := \sigma(B_0, \ldots, B_n)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire X, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[X^k]$.

2. Implémenter numériquement l'urne de Polya et "vérifier" la convergence p.s. de (X_n).

3. Tracer l'histogramme de la distribution empirique de la limite X (faites par exemple 50 tirages en arrêtant à $n = 50$) dans le cas $a = 1$, $b = 1$. Que constatez-vous numériquement? Faites de même pour d'autres valeurs de a et b.

4. *(Cas $a = b = 1$)* On suppose que $a = b = 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $(B_n)_{n\geq 0}$ suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n+1\}$. En déduire la loi de X.

5. (Loi Beta). Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de lois Gamma de paramètre a et b respectivement. On appelle loi Beta(a, b) la loi de la variable
$$\frac{U}{U+V}.$$
Montrer que la loi Beta a la densité supportée sur $[0, 1]$ donnée par
$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{\{x\in[0;1]\}}.$$

6. En déduire que si Z suit la loi Beta(a, b) alors les moments de Z sont donnés par
$$\mathbb{E}(Z^k) = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}$$

7. Tracer la densité de la loi beta sur la même figure que l'histogramme de la distribution empirique de X pour les même valeurs de a et de b. Que constatez-vous?

8. *(Cas général)* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:
$$Z_n^{(k)} := \frac{B_n(B_n+1)\ldots(B_n+k-1)}{(a+b+n)(a+b+n+1)\ldots(a+b+n+k-1)}.$$
Montrer que $(Z_n^{(k)})_{n\geq 1}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale, qui converge presque sûrement et dans L^1 vers une limite notée $Z^{(k)}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X^k]$.

9. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$, et en déduire que la loi de X est entièrement déterminée par ses moments calculés en 8.

Remarque: on dit d'une variable aléatoire admettant des moments égaux à ceux de X calculés au point 8 qu'elle suit une loi bêta de paramètres a et b, notée $\beta(a, b)$. Cette loi admet pour densité

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{\{x\in[0;1]\}}.$$

Pour le prouver, on peut calculer les moments d'une telle loi et montrer qu'ils sont bien égaux à ceux trouvés au point 8.

Exercice 2 *Ruine du joueur*

Soit $(\xi_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = q$ avec $p + q = 1$. On considère un joueur, disposant d'une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$ et pariant 1 euro à chaque instant k sur l'événement $\{\xi_k = 1\}$. On note donc $F_n := a + \sum_{k=1}^n \xi_k$ sa fortune totale à chaque instant $n \geq 0$. On suppose que le joueur s'arrête de jouer lorsqu'il atteint la somme $b \in \mathbb{N}^*$ ($b \geq a$) ou lorsqu'il est ruiné (i.e. $F_n = 0$). On note $\tau = \min\{n \geq 1 : F_n = 0 \quad \text{ou} \quad F_n = b\}$.

1. Verifier que $M_n := F_n - n(p-q)$ est une martingale pour une filtration que l'on précisera.
2. À l'aide du théorème de convergence presque sûr appliqué à la martingale arrêtée M^τ ou $-M^\tau$, déduire lorsque $p \neq q$ que $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. En déduire ensuite la valeur de $\mathbb{E}[\tau]$ en fonction de la probabilité de ruine.
3. Vérifier que $X_n := (\frac{q}{p})^{F_n}$ est une martingale positive. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[(\frac{q}{p})^{F_\tau}]$ puis lorsque $p \neq q$ celle de la probabilité de ruine et enfin la valeur de $\mathbb{E}[\tau]$.
4. Dans le cas $p = 1/2$, utiliser M^τ pour calculer la probabilité de ruine, puis la martingale $F_n^2 - n$ arrêtée en τ pour calculer $\mathbb{E}[\tau]$.

Exercice 3 *Loi du temps d'atteinte d'un niveau donné par la marche aléatoire biaisée*

Soit $(\xi_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = q$ avec $p + q = 1$ et $p \geq 1/2 \geq q$. Pour tout $n \geq 0$, on note $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$. Soit $r > 0$ un nombre entier positif, on note

$$\tau_r := \min\{n \geq 1 : S_n = r\}.$$

1. Montrer que $\tau_r < \infty$ p.s.
2. Soit $\alpha > 0$, déterminer le réel $\phi(\alpha) > 0$ tel que si pour $n \geq 0$ l'on pose
$$M_n := \mathrm{e}^{\phi(\alpha)S_n - \alpha n},$$
alors $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration canonique associée à $(\xi_n)_{n\geq 0}$.
3. Déterminer la transformée de Laplace de τ_r, et en déduire $\mathbb{E}[\tau_1]$ pour $p > 1/2$.