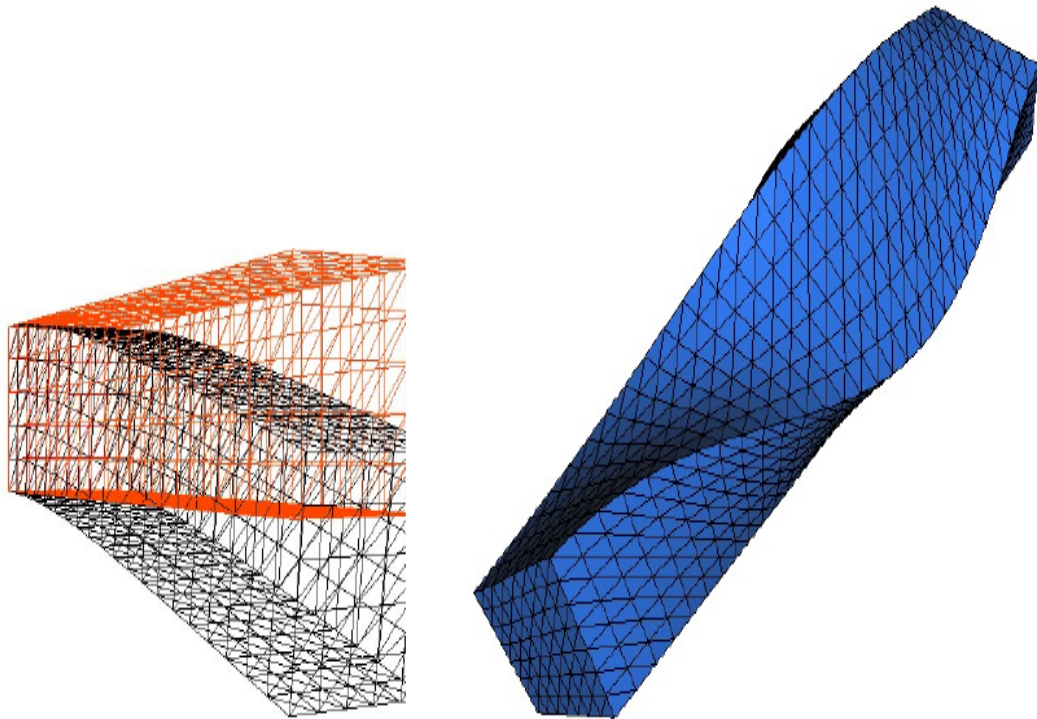


Khaled Saleh



**INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES  
ÉLÉMENTS FINIS**

Khaled Saleh

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI,  
4 place Jussieu, 75005 Paris V, France.

Adresse électronique : [saleh@ann.jussieu.fr](mailto:saleh@ann.jussieu.fr)

Page web : <http://www.ann.jussieu.fr/~saleh/>

EDF R&D, Département Mécanique des Fluides, Energies, Environnement,  
6 quai Watier BP 49, 78401 Chatou Cedex, France.

La figure de couverture représente la déformation d'un solide tridimensionnel, calculée à l'aide du logiciel freeFEM++. Elle est empruntée à une présentation du Pr F. Hecht.

# Table des matières

<b>Préambule</b>	<b>4</b>
<b>1 Equations de la mécanique et formulation variationnelle</b>	<b>6</b>
1.1 Equations de la mécanique des milieux continus . . . . .	6
1.1.1 Equations générales . . . . .	6
1.1.2 Cas de la membrane élastique plane . . . . .	7
1.2 Formulation intégrale des EDP . . . . .	8
1.2.1 Le problème de la membrane en 1D . . . . .	8
1.2.2 Conditions aux limites de Neumann . . . . .	10
1.2.3 Le problème de la membrane en 2D . . . . .	12
1.2.4 Formulation intégrale pour les équations générales . . . . .	13
<b>2 Calcul de solutions approchées par la méthode des éléments finis</b>	<b>16</b>
2.1 La méthode de Galerkin . . . . .	16
2.2 La méthode des éléments finis . . . . .	17
2.2.1 La méthode des éléments finis en 1D . . . . .	18
2.2.2 La méthode des éléments finis en 2D . . . . .	22
2.3 Erreur d'approximation et convergence de la méthode . . . . .	24
<b>Bibliographie</b>	<b>27</b>



# Préambule

Ce document constitue les notes d'un cours d'introduction à la méthode des éléments finis destiné aux étudiants de troisième année de la Faculté d'ingénierie de l'Université Française d'Egypte. Il s'agit ici d'exposer les bases de la méthode et de l'illustrer sur des exemples très simples issus de la mécanique des milieux continus, avec pour objectif une mise en oeuvre à l'aide du logiciel libre freeFEM++ [3] développé à l'Université Paris VI.

Les étudiants n'étant pas familiers avec les notions de base de l'analyse fonctionnelle, j'ai préféré éviter toute sophistication qu'induirait inévitablement l'introduction des espaces de Sobolev. Pour simplifier, la formulation variationnelle des EDP est présentée comme une méthode permettant d'affaiblir les hypothèses sur la solution en considérant des fonctions continues et  $C^1$  par morceaux plutôt que des fonctions de classe  $C^2$ . L'inconvénient majeur de cette approche est l'absence de théorèmes assurant l'existence et l'unicité des solutions comme le ferait le théorème de Lax-Milgram. Ainsi, l'existence d'une solution est toujours postulée.

Par ailleurs, ce document est incomplet à bien des égards. Le lecteur curieux est invité à consulter les excellents ouvrages présentés dans la bibliographie [1, 2].

*Paris, le 22 décembre 2011,  
Khaled Saleh.*



# Chapitre 1

## Equations de la mécanique et formulation variationnelle

### 1.1 Equations de la mécanique des milieux continus

#### 1.1.1 Equations générales

On considère un matériau solide qui occupe un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ <sup>1</sup> et qui est soumis à des efforts extérieurs, sous l'action desquels, il va se déformer. La mécanique des milieux continus a pour objet l'étude de cette déformation et des contraintes internes au matériau qui résultent de l'application de ces efforts extérieurs.

Nous pouvons distinguer deux types d'efforts extérieurs : les forces réparties de densité  $\underline{f}(\mathbf{x})$  appliquées à un solide élémentaire se trouvant au point  $\mathbf{x}$  intérieur au matériau  $\Omega$  et les efforts aux extrémités  $\underline{T}(\mathbf{x})$  appliqués en chaque point  $\mathbf{x}$  de la frontière du solide  $\partial\Omega$ . L'inconnue que nous chercherons à calculer est  $\underline{u}(\mathbf{x})$ , le déplacement de chaque point  $\mathbf{x}$  sous l'effet des efforts extérieurs. Ainsi,  $\underline{f}(\mathbf{x})$  et  $\underline{u}(\mathbf{x})$  sont des fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  tandis que  $\underline{T}(\mathbf{x})$  est une fonction de  $\partial\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La modélisation mécanique fait intervenir le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ , qui mesure la déformation locale du matériau (et qui naturellement dépend du champ des déplacements  $\underline{u}$ ) ainsi que le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  qui représente le champ des contraintes internes au matériau.  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont tous deux des fonctions à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques.

Dans le cadre de l'*élasticité linéaire*, on ne considère que des petits déplacements et donc de petites déformations. Dans ce cas, le tenseur des déformations est donné par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + {}^t(\underline{\nabla} \underline{u})) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad (1.1.1)$$

---

1. Le solide peut avoir la topologie d'un volume, ou bien d'une surface ou encore d'une courbe.

et le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  dépend linéairement du tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ . Si de plus, le matériau est homogène et isotrope, alors  $\underline{\underline{\sigma}}$  est relié à  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$  par la loi linéaire dite *loi de Hooke* :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) + \lambda\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))\underline{\underline{\text{Id}}}. \quad (1.1.2)$$

$\mu$  et  $\lambda$  sont deux coefficients réels qui caractérisent le matériau et qu'on appelle *coefficients de Lamé*. Ils s'expriment en fonction du *module de Young*  $E$  et du *module de Poisson*  $\nu$  du matériau considéré, par

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (1.1.3)$$

Le bilan des forces dans le solide aboutit à l'équation

$$-\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1.4)$$

où par définition, la divergence de  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le vecteur de composantes

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq N}. \quad (1.1.5)$$

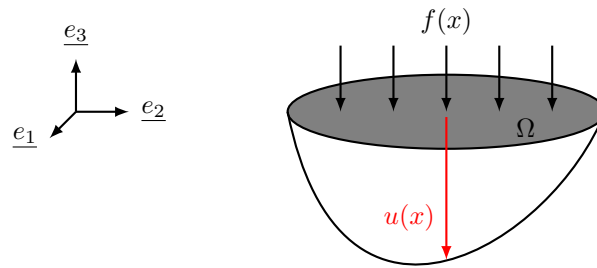
En utilisant la loi de Hooke, on obtient l'équation vérifiée par le déplacement  $\underline{u}$  :

$$-\text{div}(2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) + \lambda\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))\underline{\underline{\text{Id}}}) = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1.6)$$

que l'on doit compléter par des conditions aux limites sur la frontière du solide  $\partial\Omega$ .

### 1.1.2 Cas de la membrane élastique plane

On considère une membrane élastique qui, au repos, occupe un domaine  $\Omega$  du plan  $Ox_1x_2$  et qui est attachée par son bord  $\partial\Omega$ . On lui applique une densité surfacique de force  $\underline{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , dirigée uniquement dans la direction  $\underline{e}_3$  :  $\underline{f} = f(x_1, x_2)\underline{e}_3$ . On admet que le déplacement  $\underline{u}$  s'effectue uniquement dans la direction  $\underline{e}_3$  :  $\underline{u} = u(x_1, x_2)\underline{e}_3$ .





A l'équilibre, le bilan des forces s'écrit

$$-\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(u) = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1.7)$$

avec

$$\underline{\underline{\sigma}}(u) = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}(u) + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(u)) \underline{\underline{\operatorname{Id}}}, \quad (1.1.8)$$

c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \quad (1.1.9)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kroneker. Comme  $u_1 = u_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$ , on obtient

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1.10)$$

et par suite  $(\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(u)) \cdot \underline{e}_3 = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$ . Le bilan des forces s'écrit donc

$$-\mu \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1.11)$$

où l'opérateur Laplacien  $\Delta$  est défini pour une fonction scalaire  $u$  de deux variables réelles par

$$(\Delta u)(x, y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y). \quad (1.1.12)$$

L'équation (1.1.11) s'appelle *l'équation de Laplace*. Il faut la compléter avec une condition aux limites sur le bord de  $\Omega$  pour que le problème soit bien posé. Or, cette condition aux limites vient exprimer que la membrane reste attachée au bord  $\partial\Omega$ , ce qui se traduit par le fait que le déplacement est nul sur  $\partial\Omega$ . Ainsi, résoudre le problème de la membrane revient à résoudre le problème suivant appelé *problème de Poisson* :

*Trouver une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$  telle que*

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

**Remarque 1.1.1.** *Lorsque la condition aux limites consiste à imposer une valeur à l'inconnue  $u$  sur le bord  $\partial\Omega$ , on parle de conditions de Dirichlet. Lorsque de plus la valeur imposée est nulle, on parle de conditions de Dirichlet homogènes.*

## 1.2 Formulation intégrale des EDP

### 1.2.1 Le problème de la membrane en 1D

Considérons le problème de Poisson en une dimension d'espace avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

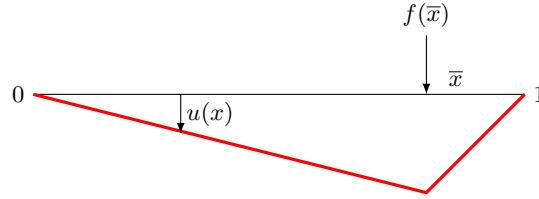
Trouver une fonction  $u$  définie sur  $[0, 1]$  telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Pour qu'une telle équation ait un sens, la solution est à rechercher dans l'ensemble  $V_0^2$  des *fonctions admissibles* qui sont les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  et qui sont nulles sur le bord de  $[0, 1]$  :

$$V_0^2 = \{u \in \mathcal{C}^2[0, 1], u(0) = u(1) = 0\}. \quad (1.2.2)$$

Si la fonction  $f$  représente une force ponctuelle appliquée en un point  $\bar{x}$  d'un fil élastique, alors le déplacement  $u$  solution du problème de Poisson  $(\mathcal{P})$  est une fonction affine par morceaux qui a un minimum en  $\bar{x}$ . Mais alors quel sens peut-on donner à l'expression  $-u''(\bar{x}) = f(\bar{x})$  alors que  $u''$  n'est manifestement pas définie en  $\bar{x}$ ?



La réponse à cette question est fournie par la *formulation intégrale* (ou encore la *formulation variationnelle*) du problème  $(\mathcal{P})$ . La technique consiste à reformuler le problème  $(\mathcal{P})$  de manière à ce que les contraintes de régularité imposées à la solution  $u$  soient affaiblies.

On part du problème  $(\mathcal{P})$  et on remarque que si  $u$  est solution de  $(\mathcal{P})$ , alors en multipliant l'équation par n'importe quelle fonction régulière  $v$  puis en intégrant sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (1.2.3)$$

La fonction  $v$  est appelée *fonction test*. Si on fait une intégration par parties dans le membre de gauche de cette égalité, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'(x)v(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad (1.2.4)$$

et si  $v$  est une fonction telle que  $v(0) = v(1) = 0$  alors

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (1.2.5)$$

En résumé, si  $u$  est une solution du problème de Poisson  $(\mathcal{P})$ , alors pour toute fonction régulière  $v$  telle que  $v(0) = v(1) = 0$ , on a

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (1.2.6)$$

Pour que l'expression (1.2.6) soit bien définie, il suffit que la fonction  $u$  soit continue et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (comme c'est bien le cas dans l'exemple ci-dessus<sup>2</sup>) et non pas forcément de classe  $\mathcal{C}^2$  comme l'exige la formulation ( $\mathcal{P}$ ). Ainsi, on peut décider qu'au lieu de chercher une fonction  $u$  de classe  $\mathcal{C}^2$  qui vérifie ( $\mathcal{P}$ ), on va chercher une fonction  $u$  continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, nulle en 0 et 1 et qui vérifie (1.2.6). Comme l'expression (1.2.6) est symétrique en  $u$  et  $v$ , on peut demander les mêmes conditions sur les fonctions  $u$  et  $v$ . Considérons, l'espace

$$V_0^1 = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0, 1], u(0) = u(1) = 0\}. \quad (1.2.7)$$

On a la définition suivante :

**Définition 1.2.1.** *On appelle formulation intégrale ou formulation variationnelle du problème de Poisson ( $\mathcal{P}$ ), le problème qui consiste à*

*Trouver une fonction  $u$  appartenant à l'espace  $V_0^1$  telle que*

$$(\mathcal{FV}) \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \text{pour toute fonction } v \text{ de } V_0^1. \quad (1.2.8)$$

Comme nous l'avons vu plus haut, si  $u$  est une solution de la formulation différentielle ( $\mathcal{P}$ ), alors  $u$  est aussi une solution de la formulation variationnelle ( $\mathcal{FV}$ ). Réciproquement, si  $u$  est une solution de la formulation variationnelle ( $\mathcal{FV}$ ) et si  $u$  est de classe au moins  $\mathcal{C}^2$ , alors  $u$  est solution du problème différentiel ( $\mathcal{P}$ ). Pour le voir, on part de la formulation variationnelle (1.2.8) et on refait l'intégration par parties à l'envers. On obtient alors que

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \text{pour toute fonction } v \text{ de } V_0^1. \quad (1.2.9)$$

En prenant des fonctions  $v$  bien choisies, il est alors possible de vérifier que cela implique que  $-u''(x) = f(x)$  pour tout  $x$  dans  $(0, 1)$ . De plus, comme  $u$  est dans  $V_0^1$ , on obtient automatiquement que  $u$  vérifie bien les conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$ . Ainsi, la condition aux limites de Dirichlet homogène est inscrite dans le choix de l'espace vectoriel dans lequel la solution est recherchée.

## 1.2.2 Conditions aux limites de Neumann

On considère maintenant le problème suivant (qui n'a rien à voir avec la membrane) où les conditions aux limites sont données par la valeur de la dérivée de l'inconnue  $u$  :

*Trouver une fonction  $u$  définie sur  $[0, 1]$  telle que*

$$(\mathcal{N}) \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

---

2. En fait il y a une petite "arnaque" ici. Dans l'exemple considéré d'une force ponctuelle exercée en  $\bar{x}$ ,  $f$  n'est pas une fonction au sens usuel mais plutôt un pic de Dirac en  $\bar{x}$  (on parle de *distribution*). Pour être plus rigoureux, il faudrait remplacer l'intégrale du membre de droite par  $qv(\bar{x})$  où  $q$  est la masse du Dirac.

On parle de *conditions aux limites de Neumann*. Si de plus  $\alpha = \beta = 0$ , on parle de conditions de Neumann *homogènes*. La formulation intégrale pour ce type de problème diffère par la prise en compte des conditions aux limites. Nous reprenons la démarche qui permet d'écrire une formulation variationnelle. On suppose que  $u$  est une solution et on multiplie l'équation par une fonction test régulière  $v$  puis on intègre sur  $[0, 1]$  :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (1.2.11)$$

Après intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad (1.2.12)$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(1) - \alpha v(0), \quad (1.2.13)$$

puisque  $u'(0) = \alpha$  et  $u'(1) = \beta$ . Ainsi, la condition aux limites de Neumann est directement prise en compte dans la formulation variationnelle, et il n'est pas nécessaire de l'inclure dans le choix de l'espace vectoriel de résolution. Pour que (1.2.13) soit définie, il suffit que  $u$  et  $v$  soient continues et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[0, 1]$ . On introduit donc l'espace :

$$V^1 = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0, 1]\}. \quad (1.2.14)$$

On a la définition suivante :

**Définition 1.2.2.** *On appelle formulation intégrale ou formulation variationnelle du problème ( $\mathcal{N}$ ), le problème qui consiste à*

*Trouver une fonction  $u$  appartenant à l'espace  $V^1$  telle que*

$$(\mathcal{FV}) \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(1) - \alpha v(0), \quad (1.2.15)$$

*pour toute fonction  $v$  de  $V^1$ .*

De la même manière que pour le problème de Poisson, on peut montrer que si  $u$  est une solution de classe  $\mathcal{C}^2$  de la formulation variationnelle ( $\mathcal{FV}$ ), alors  $u$  est solution de ( $\mathcal{N}$ ).

**Exercice 1** *Conditions aux limites mêlées Dirichlet-Neumann.* Ecrire la formulation variationnelle pour le problème suivant :

*Trouver une fonction  $u$  définie sur  $[0, 1]$  telle que*

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u'(0) = \alpha, \quad u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.2.16)$$

### 1.2.3 Le problème de la membrane en 2D

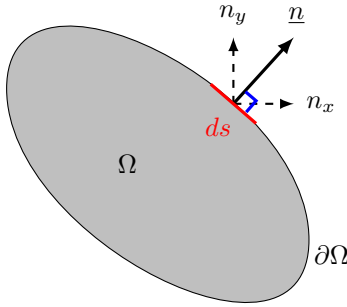
On souhaite maintenant écrire la formulation variationnelle du problème de Poisson en 2D :

Trouver une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$  telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \text{ dans } \Omega, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \text{ dans } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2.17)$$

Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire la *formule de Green*, qui généralise la notion d'intégration par parties à des dimensions supérieures. Précisons d'abord quelques notations :

Dans la suite  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $\underline{n}(x, y)$  le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  au point  $(x, y) \in \partial\Omega$  et dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ . On notera  $n_x$  et  $n_y$  les composantes de  $\underline{n}$ . Enfin, on notera  $dx dy$  l'élément de "volume" sur  $\Omega$  et  $ds$  l'élément de "surface" sur la frontière  $\partial\Omega$ .



Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{\Omega}$ , alors :

**Intégration par partie suivant  $x$  :**

$$\int_{\Omega} \varphi(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \psi(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} \varphi(x, y) \psi(x, y) n_x(x, y) ds. \quad (1.2.18)$$

**Intégration par partie suivant  $y$  :**

$$\int_{\Omega} \varphi(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \psi(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} \varphi(x, y) \psi(x, y) n_y(x, y) ds. \quad (1.2.19)$$

On en déduit facilement le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1.** Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\bar{\Omega}$  et  $v$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{\Omega}$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par partie

$$\int_{\Omega} \Delta u(x, y) v(x, y) dx dy = - \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} v(x, y) \nabla u(x, y) \cdot \underline{n}(x, y) ds, \quad (1.2.20)$$

où  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  est le gradient de  $u$ , et où  $a \cdot b$  désigne le produit scalaire canonique de deux vecteurs  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer la formule (1.2.18) avec  $\varphi = v$  et  $\psi = \frac{\partial u}{\partial x}$ , et la formule (1.2.19) avec  $\varphi = v$  et  $\psi = \frac{\partial u}{\partial y}$  puis de sommer.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la formulation variationnelle pour le problème de Poisson en dimension 2. En effet, soit  $u$  une solution de classe  $\mathcal{C}^2$  du problème de Poisson, en multipliant par une fonction test régulière  $v(x, y)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x, y)v(x, y)dxdy = \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)dxdy. \quad (1.2.21)$$

On utilise le théorème 1.2.1 pour faire une intégration par partie ce qui donne

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dxdy - \int_{\partial\Omega} v(x, y)\nabla u(x, y) \cdot \underline{n}(x, y)ds = \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)dxdy. \quad (1.2.22)$$

Si de plus la fonction  $v$  est nulle sur le bord  $\partial\Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dxdy = \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)dxdy. \quad (1.2.23)$$

Cette équation est une généralisation de la formule obtenue en dimension un d'espace, la dérivée ayant simplement été remplacée par le vecteur gradient. De même qu'en dimension un, il suffit pour que l'expression ci-dessus ait un sens que  $u$  et  $v$  soient continues et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\bar{\Omega}$ . Considérons, l'espace

$$V_0^1 = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \bar{\Omega}, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (1.2.24)$$

La formulation variationnelle du problème de Poisson en 2D s'écrit alors

*Trouver une fonction  $u$  appartenant à l'espace  $V_0^1$  telle que*

$$\int_{\Omega} \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dxdy = \int_{\Omega} f(x, y)v(x, y)dxdy, \quad \text{pour toute fonction } v \text{ de } V_0^1. \quad (1.2.25)$$

## 1.2.4 Formulation intégrale pour les équations générales

On considère maintenant un matériau solide qui occupe un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nous supposons que le solide est soumis à des forces réparties de densité  $\underline{f}(\mathbf{x})$  ainsi qu'à des efforts  $\underline{T}(\mathbf{x})$  appliqués sur une partie de sa frontière  $\partial\Omega_N$ . Sur l'autre partie de sa frontière, notée  $\partial\Omega_D$ , nous supposons que le déplacement  $\underline{u}(\mathbf{x})$  est nul. Le bilan des forces s'écrit

$$-\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.2.26)$$

Nous voulons écrire une formulation variationnelle pour cette équation. On écrit (1.2.26) composante par composante :

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad \text{dans } \Omega \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2.27)$$

On multiplie chaque équation par une fonction test  $v_i$  puis on intègre sur  $\Omega$  :

$$-\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2.28)$$

On permute les signes somme et intégrale et on fait une intégration par partie :

$$\sum_{j=1}^3 \left( \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\partial\Omega} v_i \sigma_{ij} n_j ds \right) = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2.29)$$

soit encore

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 v_i \sigma_{ij} n_j ds = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2.30)$$

En sommant sur  $i$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{v} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) ds = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega, \quad (1.2.31)$$

où  $\underline{v} = (v_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{v} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$  et  $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{i, j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$  pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de

taille  $3 \times 3$ . Le vecteur  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  est l'image du vecteur normal sortant  $\underline{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq 3}$  par la matrice  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et  $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})(\mathbf{x}) ds$  est la force exercée par l'extérieur sur l'élément de frontière situé au point  $\mathbf{x}$ . Ainsi, pour tout  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_N$ ,  $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})(\mathbf{x}) = \underline{T}(\mathbf{x})$ . Cette condition de type Neumann est donc prise en compte dans la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{v} d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} \underline{v} \cdot \underline{T} ds - \int_{\partial\Omega_D} \underline{v} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) ds = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega. \quad (1.2.32)$$

Quant à la condition de Dirichlet homogène sur  $\partial\Omega_D$ , elle est prise en compte dans le choix de l'espace vectoriel  $V$  où l'on va chercher la solution : on impose que pour toute fonction  $\underline{u}$  dans  $V$ ,  $\underline{u}$  soit nulle sur  $\partial\Omega_D$ . Les fonctions tests  $\underline{v}$  appartiennent aussi à  $V$  et sont donc également nulles sur  $\partial\Omega_D$  ce qui fait disparaître l'intégrale de bord sur  $\partial\Omega_D$ . Au final, on introduit l'espace vectoriel

$$V = \{ \underline{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \overline{\Omega}, \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \}. \quad (1.2.33)$$

En mécanique,  $V$  est appelé l'espace des *déplacements cinématiquement admissibles*. La formulation variationnelle s'écrit alors :

*Trouver une fonction  $\underline{u}$  appartenant à l'espace  $V$  telle que*

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{v} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \underline{v} \cdot \underline{T} ds, \quad \text{pour tout } \underline{v} \text{ dans } V. \quad (1.2.34)$$

**Remarque 1.2.1.** *En mécanique, la formulation variationnelle (1.2.34) n'est autre que le **théorème des travaux virtuels**. Il exprime que le travail de déformation élastique dans le déplacement virtuel admissible  $\underline{v}$  :  $\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{v} d\Omega$ , est égal au travail virtuel des forces extérieures  $\int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \underline{v} \cdot \underline{T} ds$ .*

**Exercice 2** On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène et isotrope où le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  est relié au déplacement  $\underline{u}$  à travers la loi de Hooke. Montrer que la formulation variationnelle (1.2.34) se réécrit sous la forme symétrique suivante :

$$\int_{\Omega} \left( 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) + \lambda (\operatorname{div} \underline{u})(\operatorname{div} \underline{v}) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \underline{v} \cdot \underline{T} ds. \quad (1.2.35)$$



## Chapitre 2

# Calcul de solutions approchées par la méthode des éléments finis

### 2.1 La méthode de Galerkin

On souhaite maintenant trouver une méthode pour calculer des solutions approchées d'un problème tel que le problème de Poisson. Comme nous souhaitons également pouvoir traiter des cas où la solution est peu régulière, nous allons en fait résoudre de façon approchée la formulation variationnelle. Les formulations variationnelles que nous avons vues peuvent toutes être mises sous la forme :

*Trouver une fonction  $u$  dans  $V$ , telle que*

$$(\mathcal{FV}) \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{pour toute fonction } v \text{ de } V, \quad (2.1.1)$$

où

- $V$  est un espace vectoriel de fonctions,
- $(u, v) \mapsto a(u, v)$  est une forme bilinéaire sur  $V \times V$ ,
- $v \mapsto \langle f, v \rangle$  est une forme linéaire sur  $V$ .

Dans le cas du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, l'espace vectoriel où l'on cherche la solution est  $V = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$  et les formes  $a$  et  $\langle f, \cdot \rangle$  sont définies par

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (2.1.2)$$

L'espace de résolution  $V$  étant de dimension infinie, le principe de la méthode de Galerkin consiste à le remplacer par un espace vectoriel  $V_h$  de dimension finie et à résoudre le problème approché :

*Trouver une fonction  $u_h$  dans  $V_h$  telle que*

$$(\mathcal{FV})_h \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \text{pour toute fonction } v_h \text{ de } V_h. \quad (2.1.3)$$

Dans le cadre de ce cours, nous prendrons toujours des espaces  $V_h \subset V$ , on parle alors d'approximation *conforme*. Comme  $V_h$  est de dimension finie, la résolution de  $(\mathcal{FV})_h$  se ramène en fait à la résolution d'un système linéaire (*i.e.* à l'inversion d'une matrice). En effet, si on se donne une base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  de  $V_h$ , la solution recherchée  $u_h$  peut se décomposer sur cette base selon

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x). \quad (2.1.4)$$

Résoudre  $(\mathcal{FV})_h$  est alors équivalent à trouver un vecteur  $U = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, v_h\right) &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, v_h) u_j &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) u_j &= \langle f, \varphi_i \rangle, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

puisque  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  est une base de  $V_h$ . En posant la matrice

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathcal{A}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad (2.1.5)$$

et le vecteur

$$F = (F_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N, \quad F_i = \langle f, \varphi_i \rangle, \quad (2.1.6)$$

nous obtenons le système linéaire

$$\mathcal{A}U = F. \quad (2.1.7)$$

Ainsi, si la matrice  $\mathcal{A}$  est inversible (ce qui sera toujours le cas pour nous), le vecteur  $U$  recherché est donc égal à  $U = \mathcal{A}^{-1}F$  et il est unique, ce qui prouve que le problème  $(\mathcal{FV})_h$  admet une solution unique. La matrice  $\mathcal{A}$  est appelée *matrice de rigidité* en référence aux problèmes de mécanique où elle fut introduite pour la première fois.

## 2.2 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un cas particulier de la méthode de Galerkin pour laquelle les espaces  $V_h$  sont faciles à construire et pour laquelle la matrice  $\mathcal{A}$  contient beaucoup de zéros (on parle de matrice *creuse*) ce qui rend possible l'utilisation de méthodes numériques performantes pour son inversion. La méthode des éléments finis est avant tout une méthode d'interpolation. Ainsi, pour approcher une fonction, on découpe son domaine de définition en petits *éléments* et sur chaque élément, le comportement local de la fonction est représenté par une fonction simple, comme une fonction polynômiale par exemple. Dans la suite, nous illustrons la méthode sur l'exemple simple du problème de Poisson :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

**Remarque 2.2.1.** En dimension un, le problème de Poisson est tellement simple qu'il admet une solution explicite. En effet si la fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , alors le problème de Poisson admet une solution unique dans  $\mathcal{C}^2([0, 1])$  donnée par (on pourra le vérifier en exercice)

$$u(x) = x \int_0^1 f(t)(1-t)dt - \int_0^x f(t)(x-t)dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (2.2.2)$$

Cependant, pour des problèmes plus compliqués que le problème de Poisson en 1D, de telles formules explicites n'existent pas, d'où la nécessité de développer des méthodes numériques pour calculer des solutions approchées.

## 2.2.1 La méthode des éléments finis en 1D

L'espace que nous cherchons à approcher est

$$V = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0, 1], u(0) = u(1) = 0\}, \quad (2.2.3)$$

et on veut construire des espaces d'approximation  $V_h \subset V$  de dimension finie. On commence par construire un maillage de l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1, \quad (2.2.4)$$

c'est-à-dire qu'on divise l'intervalle  $[0, 1]$  en petits sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0 \dots N$ . Les intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  sont appelés les *cellules* ou les *mailles* ou encore les *éléments* du maillage. On notera  $h_i = x_{i+1} - x_i$  la taille de la maille  $i$  et on définit

$$h = \max_{0 \leq i \leq N} x_{i+1} - x_i \quad (2.2.5)$$

le *pas* du maillage. Dans la suite, et pour des raisons de simplicité, nous serons souvent amenés à considérer des maillages où les points  $x_i$  sont régulièrement espacés si bien que

$$x_i = ih, \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N+1}. \quad (2.2.6)$$

De tels maillages sont dits *uniformes*.

Nous définissons aussi  $\mathbb{P}_k$  l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, a_j \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.2.7)$$

C'est un espace vectoriel de dimension  $k+1$ .

### Approximation par éléments finis $\mathbb{P}_1$

On introduit l'espace fonctionnel de dimension finie composé des fonctions continues sur  $[0, 1]$ , affines sur chaque maille  $[x_i, x_{i+1}]$  du maillage et nulles en 0 et en 1 :

$$V_h^1 = \{v \in \mathcal{C}^0([0, 1]), v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq i \leq N, v(0) = v(1) = 0\}. \quad (2.2.8)$$

L'indice  $h$  de  $V_h^1$  fait référence au pas du maillage. L'espace  $V_h^1$  est un espace vectoriel de dimension  $N$  puisqu'une fonction de  $V_h^1$  est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend en les points intérieurs du maillage  $v(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Une base de  $V_h^1$  est donnée par les fonctions  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  continues, affines sur chaque élément  $[x_i, x_{i+1}]$  et telles que

$$\forall i \in \{1..N\}, \forall j \in \{0..N+1\}, \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (2.2.9)$$

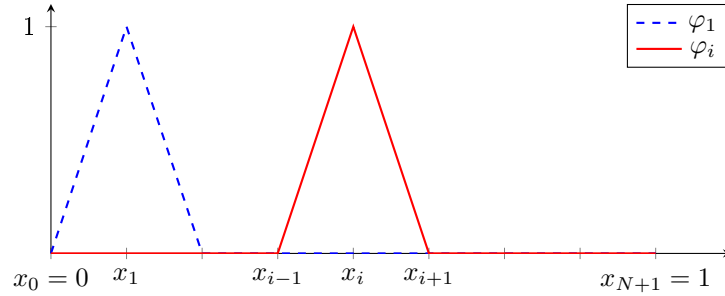
où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Introduisons la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Si le maillage est uniforme, alors chaque fonction  $\varphi_i$  a pour expression  $\varphi_i(x) = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$ . Dans la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ , une fonction  $v$  appartenant à  $V_h^1$  a pour expression

$$v(x) = \sum_{i=1}^N v(x_i) \varphi_i(x). \quad (2.2.11)$$

Tout l'intérêt de la méthode des éléments finis réside dans le fait que chaque fonction de base  $\varphi_i$  a un *support* très réduit, c'est-à-dire que l'ensemble des  $x$  tels que  $\varphi_i(x) \neq 0$  est petit devant le domaine de résolution  $[0, 1]$ .



Ceci a pour conséquence que la plupart des coefficients de la matrice de rigidité  $\mathcal{A} = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq N}$  sont nuls. En effet, pour le problème de Poisson 1D, on a

$$\mathcal{A}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx, \quad (2.2.12)$$

et si  $j$  n'est pas égal à  $i - 1$ ,  $i$  ou  $i + 1$ , alors les fonctions  $\varphi_j$  et  $\varphi_i$  ont des supports disjoints et l'intégrale dans (2.2.12) est nulle. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i-1,i} &= a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_{i-1}'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h} \frac{1}{h} dx = -\frac{1}{h}, \\ \mathcal{A}_{i,i} &= a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i'(x)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx = \frac{2}{h}, \\ \mathcal{A}_{i+1,i} &= a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_{i+1}'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \frac{-1}{h} dx = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Finalement, la matrice de rigidité est une matrice tridiagonale

$$\mathcal{A} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.13)$$

En notant  $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$  le produit scalaire canonique de deux vecteurs  $X = (x_1, \dots, x_N)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_N)$  de  $\mathbb{R}^N$ , la proposition suivante permet de montrer que la matrice  $\mathcal{A}$  est inversible :

**Proposition 2.2.1.** *La matrice  $\mathcal{A}$  est définie positive c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall U \in \mathbb{R}^N - \{0\}, \quad \langle \mathcal{A}U, U \rangle > 0. \quad (2.2.14)$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons pourquoi elle implique l'inversibilité de la matrice  $\mathcal{A}$ . En effet, si  $\mathcal{A}$  n'est pas inversible, alors il existe un vecteur  $U \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^N$  tel que  $\mathcal{A}U = 0$ . Ceci implique en particulier que  $\langle \mathcal{A}U, U \rangle = 0$  avec  $U \neq 0$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{A}$  est définie positive.

**Démonstration.** Soit  $U = (u_1, \dots, u_N) \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le vecteur  $\mathcal{A}U$  a pour coordonnées

$$\left( \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_{1j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_{Nj} u_j \right) = \left( \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_1) u_j, \dots, \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_N) u_j \right).$$

On a donc

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) u_j u_i = a \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \right) = a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \int_0^1 |\tilde{u}'(x)|^2 dx, \quad (2.2.15)$$

où  $\tilde{u}(x)$  est la fonction de  $V_h^1$  définie par  $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$ . Comme les  $(u_1, \dots, u_N)$  sont non tous nuls, on vérifie aisément que  $\tilde{u}$  est non nulle ce qui implique que  $\int_0^1 |\tilde{u}'(x)|^2 dx > 0$ .  $\square$

Pour obtenir le second membre  $F = (\langle f, \varphi_i \rangle)_{1 \leq i \leq N}$ , il faut calculer les intégrales

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx. \quad (2.2.16)$$

En général, cette intégrale ne peut être calculée de façon exacte car la fonction  $f$  peut être compliquée. Dans la pratique, on utilise des techniques d'intégration numérique où, sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , on approche l'intégrale par une formule de quadrature. En voici quelques exemples :

Formule du point milieu :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) \theta\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right). \quad (2.2.17)$$

Formule des trapèzes :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) \frac{\theta(x_i) + \theta(x_{i+1})}{2}. \quad (2.2.18)$$

Formule de Simpson :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \theta(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) \frac{\theta(x_i) + 4\theta\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \theta(x_{i+1})}{6}. \quad (2.2.19)$$

Ainsi, si on utilise la formule des trapèzes, le système à résoudre s'écrit

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}, \quad (2.2.20)$$

d'inconnues  $(u_1, \dots, u_N)$  et la solution approchée est alors donnée par

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x). \quad (2.2.21)$$

### Approximation par éléments finis $\mathbb{P}_2$

Dans certaines applications, on peut considérer que l'approximation par des droites sur chaque élément du maillage  $[x_i, x_{i+1}]$  est trop grossière, c'est-à-dire qu'elle fournit une fonction approchée trop éloignée de la fonction exacte  $u$ . On peut alors chercher à approcher  $u$  sur chaque maille par des polynômes de plus haut degré. L'approximation par éléments finis  $\mathbb{P}_2$  consiste à approcher la solution  $u$  par une fonction continue sur  $[a, b]$ , et polynomiale de degré 2 sur chaque maille  $[x_i, x_{i+1}]$ . L'espace d'approximation est alors défini par

$$V_h^2 = \{v \in \mathcal{C}^0([a, b]), v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_2, 0 \leq i \leq N, v(0) = v(1) = 0\}. \quad (2.2.22)$$

En notant

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i \in \{0 \dots N\},$$

les centres des mailles, on voit que toute fonction de  $V_h^2$  est entièrement déterminée par la donnée des valeurs qu'elle prend en les points intérieurs du maillage  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  ainsi qu'aux points  $x_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $i \in \{0 \dots N\}$ . L'espace vectoriel  $V_h^2$  est donc de dimension  $2N + 1$ . Une base de  $V_h^2$  est donnée par les fonctions  $\psi_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq N$  telles que

$$\psi_i \in V_h^2, \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \psi_i(x_{j+\frac{1}{2}}) = 0, \quad \forall j, \quad (2.2.23)$$

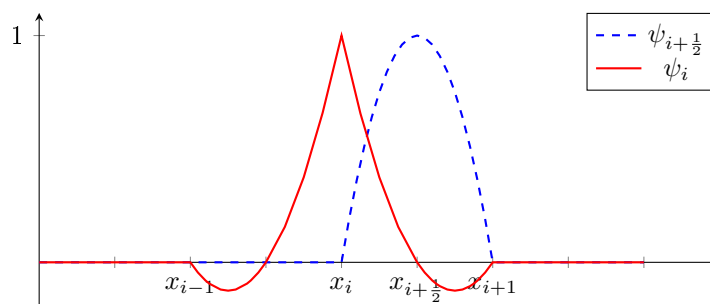
et par les fonctions  $\psi_{i+\frac{1}{2}}(x)$ ,  $0 \leq i \leq N$  telles que

$$\psi_{i+\frac{1}{2}} \in V_h^2, \quad \psi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0, \quad \psi_{i+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}, \quad \forall j. \quad (2.2.24)$$

On définit aussi deux fonctions qui permettent de donner les expressions des fonctions de base :

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1-4x^2 & \text{si } x \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } x > 1/2. \end{cases} \quad (2.2.25)$$

Si le maillage est uniforme, alors  $\psi_i(x) = \varphi\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$  et  $\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \psi\left(\frac{x-x_{i+\frac{1}{2}}}{h}\right)$ .



**Exercice 3** Ecrire la matrice de rigidité obtenue pour l'approximation par éléments finis  $\mathbb{P}_2$ . On pourra changer l'indexation des points  $(x_0, x_{\frac{1}{2}}, x_1, \dots, x_{N+\frac{1}{2}}, x_{N+1})$  en les notant  $(x_{\frac{k}{2}})_{0 \leq k \leq 2N+2}$ , et celle des fonctions de base  $(\psi_{\frac{1}{2}}, \psi_1, \dots, \psi_{N+\frac{1}{2}})$  en les notant  $(\psi_{\frac{k}{2}})_{1 \leq k \leq 2N+1}$ .

## 2.2.2 La méthode des éléments finis en 2D

En deux dimensions, nous illustrons toujours la méthode des éléments finis sur le cas du problème de Poisson :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2.26)$$

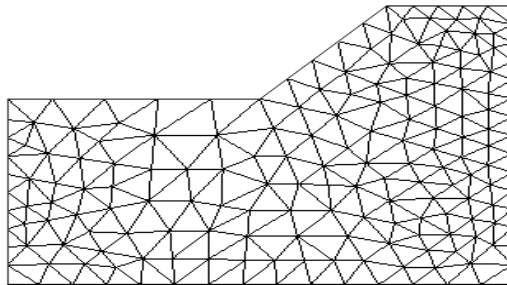
où cette fois-ci  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que la formulation variationnelle de ce problème admet une solution  $u$  dans l'espace

$$V = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } \bar{\Omega}, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (2.2.27)$$

et on cherche à l'approcher par une fonction  $u_h$  solution du même problème variationnel mais où l'espace  $V$  est remplacé par un espace d'approximation  $V_h$ . On commence par définir ce qu'est un maillage du domaine  $\Omega$  en dimension deux.

**Définition 2.2.1.** Un maillage triangulaire (ou une triangulation) du domaine  $\Omega$  est un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de triangles  $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$  non aplatis qui "subdivisent" le domaine  $\Omega$ . Par convention, le paramètre

$h$  désigne la longueur de la plus grande arête du maillage. On suppose que les triangles ne se recouvrent pas et que l'intersection entre deux triangles  $K_i$  et  $K_j$  est soit vide, soit égale à un sommet commun aux deux triangles, ou à une arête commune aux deux triangles. Par ailleurs, on appelle **sommets** ou **noeuds** du maillage les sommets des triangles composant le maillage.



Un exemple de maillage triangulaire.

**Remarque 2.2.2.** On considère ici une subdivision du domaine  $\Omega$  en triangles, mais on pourrait aussi construire des maillages composés de quadrilatères ou de façon générale par des polygones.

De même qu'en dimension un, nous définissons  $\mathbb{P}_k$  l'espace des polynômes de deux variables de degré inférieur ou égal à  $k$  :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x, y) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq k}} a_{ij} x^i y^j, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.2.28)$$

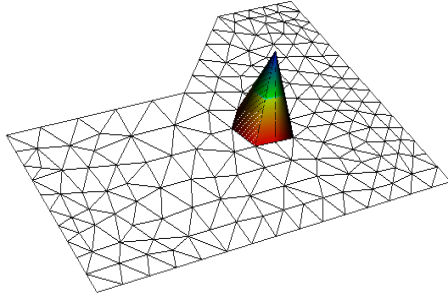
Par exemple, un polynôme de degré un s'écrit de manière générique  $p(x, y) = a + bx + cy$ , tandis qu'un polynôme de degré deux s'écrit  $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$ .

Les espaces d'approximations  $V_h$  sont définis de la même façon qu'en dimension un, en choisissant des fonctions qui sont globalement continues sur  $\bar{\Omega}$  et qui sont polynômiales sur chaque triangle  $K_i$  du maillage. Pour l'approximation  $\mathbb{P}_1$  par exemple, on a

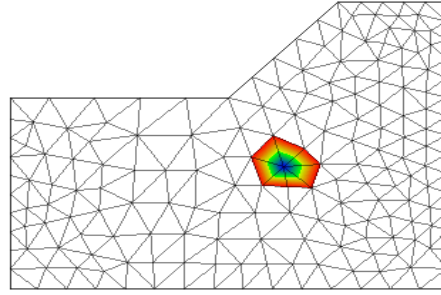
$$V_h^1 = \{u \text{ continue sur } \bar{\Omega}, u|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Cet espace admet pour fonctions de base, les fonctions *chapeau*  $\varphi_i$  qui prennent la valeur 1 en un noeud  $(x_i, y_i)$  du maillage et la valeur 0 aux autres noeuds  $(x_j, y_j)$  du maillage.





Fonction de base *chapeau*.



Support de la fonction de base.

La matrice de rigidité se calcule tout comme pour la dimension un par la formule

$$\mathcal{A}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j(x, y) \cdot \nabla \varphi_i(x, y) dx dy, \quad (2.2.29)$$

et le second membre

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy \quad (2.2.30)$$

se calcule de façon approchée par des formules de quadrature.

## 2.3 Erreur d'approximation et convergence de la méthode

La méthode des éléments finis consiste à calculer une solution approchée  $u_h$  d'un problème variationnel en remplaçant l'espace  $V$  dans lequel est recherchée la vraie solution  $u$  par un sous-espace vectoriel  $V_h$  de dimension finie. Une question légitime qui doit être posée est : quelle est l'erreur commise lorsque l'on remplace  $V$  par  $V_h$ , c'est-à-dire quelle est l'erreur entre les fonctions  $u$  et  $u_h$ ? Pour répondre à cette question, on doit se doter d'un outil permettant de mesurer la distance entre deux fonctions. Pour une fonction  $v$  définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on appelle *norme  $L^2$  de  $v$*  le réel positif

$$\|v\|_{L^2(0,1)} := \left( \int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et la distance entre deux fonctions  $v_1$  et  $v_2$  est alors définie par  $\|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}$ . On peut aussi définir une norme qui permet de mesurer à la fois la distance entre deux fonctions mais aussi la distance entre leurs dérivées. C'est le cas de la norme  $H^1$  défini par

$$\|v\|_{H^1(0,1)} := \left( \|v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^1 |v(x)|^2 dx + \int_0^1 |v'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Exercice 4** Soit  $V = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$ . Montrer que les applications  $u \mapsto \|u\|_{L^2(0,1)}$  et  $u \mapsto \|u\|_{H^1(0,1)}$  définissent bien des normes sur  $V$ . Montrer aussi que l'application  $u \mapsto \|u'\|_{L^2(0,1)}$  définit également une norme sur  $V$ .

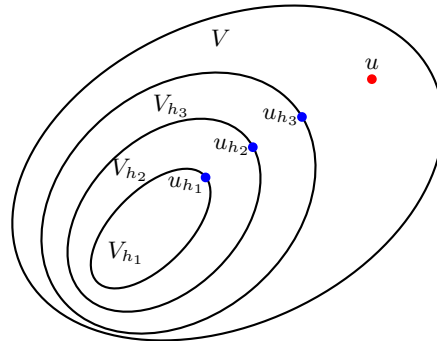
Il s'agit donc d'évaluer la quantité  $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)}$  pour savoir si elle est raisonnablement petite. On ne considère ici que le cas du problème de Poisson en une dimension, mais les résultats peuvent être généralisés au cas d'autres problèmes et à des dimensions supérieures. Le lemme suivant, dû au mathématicien français Jean Céa, et dont nous admettrons la démonstration, permet de majorer l'erreur  $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)}$  entre la solution exacte et la solution approchée :

**Lemme 2.3.1.** *On suppose qu'il existe une solution  $u \in V$  au problème de Poisson 1D où  $V = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux sur } [0, 1], u(0) = u(1) = 0\}$ . Soit  $V_h \subset V$  un sous-espace d'approximation de dimension finie quelconque et soit  $u_h \in V_h$  la solution approchée. Alors il existe une constante  $C \geq 1$  indépendante de  $V_h$  telle que*

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \text{dist}(u, V_h) \quad (2.3.1)$$

où  $\text{dist}(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)}$  est la distance de  $u$  à l'espace d'approximation  $V_h$ .

Ainsi, l'erreur commise est, à une constante multiplicative près, majorée par la distance entre la solution et l'espace d'approximation  $V_h$ . L'étape naturelle suivante est d'estimer la quantité  $\text{dist}(u, V_h)$  en fonction de la *taille* de l'espace d'approximation  $V_h$  ou plus précisément en fonction du paramètre  $h$  qui fixe la taille des éléments du maillage. Intuitivement, plus  $h$  est petit, plus la dimension de  $V_h$  est grande (pour l'approximation  $\mathbb{P}_1$  par exemple, on a  $\dim V_h = N$  où  $N = 1/h - 1$ ), *i.e.* plus l'espace  $V_h$  est "gros" et plus il s'approche de l'espace total  $V$  et de la solution exacte  $u$ .

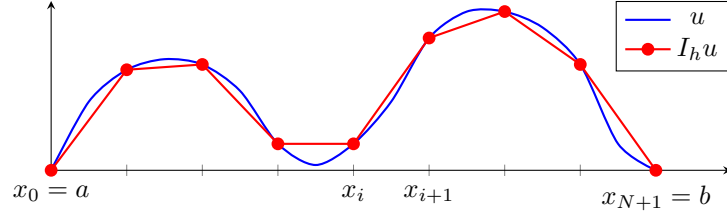


Plus  $V_h$  est "gros", plus  $u_h$  s'approche de  $u$ .

En fait, dans le cadre de l'approximation par éléments finis  $\mathbb{P}_k$ , on peut affirmer que  $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(u, V_h) = 0$  si bien que la solution approchée **converge** vers la solution exacte lorsque le pas du maillage tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0. \quad (2.3.2)$$

Pour prouver que  $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(u, V_h) = 0$ , il suffit de trouver une fonction  $v_h \in V_h$  telle que  $\|u - v_h\|_{H^1(0,1)}$  tende vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0. Considérons le cas de l'approximation par éléments finis  $\mathbb{P}_1$  et introduisons l'unique fonction  $I_h u(x)$  de  $V_h^1$  qui prend les mêmes valeurs que  $u$  aux points  $x_i$  du maillage :



La fonction approchée  $I_h u$  s'appelle *l'interpolée* de  $u$ . Elle s'exprime dans la base  $(\varphi_0, \dots, \varphi_N)$  comme suit

$$I_h u(x) = \sum_{i=1}^N u(x_i) \varphi_i(x). \quad (2.3.3)$$

La proposition suivante permet de mesurer la qualité de l'approximation d'une fonction  $v \in V$  quelconque par son interpolée  $I_h v$  :

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $v$  une fonction de  $V$ , et soit  $I_h v$  son interpolée dans  $V_h^1$ . Alors on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - I_h v\|_{H^1(0,1)} = 0. \quad (2.3.4)$$

*Si de plus la fonction  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors il existe une constante  $K > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|v - I_h v\|_{H^1(0,1)} \leq Kh \|v''\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.3.5)$$

**Démonstration.** Admise □

Finalement, pour démontrer la convergence de la solution approchée  $u_h$  vers la solution exacte  $u$ , il suffit d'invoquer à la fois le lemme de Céa 2.3.1 et la proposition ci-dessus 2.3.2 :

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - I_h u\|_{H^1(0,1)} \rightarrow 0, \quad (2.3.6)$$

et dans le cas où la solution  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a en plus que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq CKh \|u''\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0. \quad (2.3.7)$$

**Remarque 2.3.1.** *Dans l'inégalité (2.3.7), le pas du maillage  $h$  apparaît avec un exposant 1. On dit alors que la convergence est linéaire pour la norme  $H^1$ , et on peut montrer que cette vitesse de convergence est optimale. En utilisant l'inégalité triviale  $\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}$ , on voit que pour la norme  $L^2$ , la convergence est elle aussi au moins linéaire. Mais cette vitesse n'est pas optimale. En effet, une méthode plus compliquée, dite méthode de dualité d'Aubin-Nitsche, permet de montrer que pour la norme  $L^2$ , la convergence est quadratique au sens où*

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2(0,1)}, \quad (2.3.8)$$

*pour une certaine constante  $C$  indépendante de  $h$ .*

**Remarque 2.3.2.** *Le lecteur un peu endormi pourrait se demander pourquoi l'on ne se contente pas d'approcher la solution exacte  $u$  par son interpolée  $I_h u$ . La réponse est toute simple : comme  $u$  est inconnue, on ne connaît pas les valeurs qu'elle prend aux points du maillage  $u(x_i)$ , et on ne peut donc pas calculer  $I_h u$  en pratique. L'introduction de  $I_h u$  n'est donc qu'un intermédiaire théorique pour montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(u, V_h) = 0$ , et on mesure là tout l'intérêt du lemme de Céa...*

# Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École Polytechnique. <http://blanche.polytechnique.fr/~allaire/livre2.html>, 2005.
- [2] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrancois. *Méthode des éléments finis*. Éditions Lavoisier, 2005.
- [3] F. Hecht, O. Pironneau, J. Morice, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. *Freefem++*. <http://www.freefem.org/ff++/index.htm>.