

# Lois de conservation scalaires

## Chap I: Analyse théorique des lois de conservation scalaires

### 1) Introduction:

Inconnue  $u(x, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  (le temps)  $x \in \mathbb{R}^d$  (l'espace),

$u: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ou dans  $K$  un convexe de  $\mathbb{R}$ .  $K = \{ \text{états admissibles} \}$ .

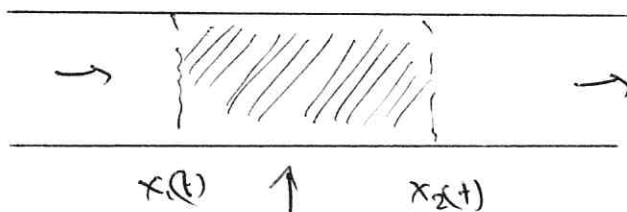
On considère l'EDP du premier ordre:

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f(u)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i}, \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d$$

où  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^\infty$ .

Exemple d'obtention d'une loi de conservation:

- conservation de la masse d'un fluide compressible de densité  $\rho(x, t)$  se déplaçant à la vitesse  $u(x, t)$ .



volume matériel se déplaçant à la vitesse du fluide.

masse du volume: 
$$m(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x, t) dx.$$

conservation de la masse: 
$$\frac{dm}{dt} = 0$$

$$\text{Or } \frac{dm}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) dx + \frac{dx_2}{dt} \rho(x_2(t),t) - \frac{dx_1}{dt} \rho(x_1(t),t) = 0$$

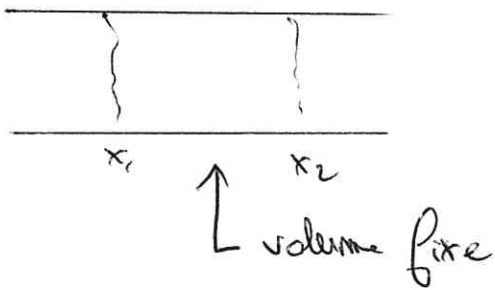
$\uparrow$   $\rho(x_2(t),t)$                        $\uparrow$   $\rho(x_1(t),t)$

Donc 
$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) dx + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}(x,t) dx = 0$$

L'intervalle  $[x_1(t), x_2(t)]$  étant arbitraire on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0.$$

Remarque : autre point de vue.



Variation de la masse dans le fluide :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx = \rho(x_2,t) \frac{dx_2}{dt} - \rho(x_1,t) \frac{dx_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx.$$

### Terminologie.

- $\rho$  = variable conservative
- $f(\rho) = \rho u$  est appelé le flux.
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$  forme conservative de l'équation.
- $\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  forme non conservative de l'éq.
- Pb de Cauchy : on se donne une CI :  $u(x,0) = u^0(x)$

Remarque: Dans tout le cours,  $x \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$ : pas de problèmes de bord, de CL...

### Autres exemples:

- Transport linéaire. Soit  $a \in \mathbb{R}^d$ .  $\rho(x) = a \cdot x$ :

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \partial_t u + \partial_x (a u) = 0$$

- Eq. de Burgers:  $\rho(x) = u^2/2$ .

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (FC)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (FNC)$$

- Modèle de trafic de voitures,

\* un flot de véhicules sur une route rectiligne sans intersections

- $u(x,t)$ : densité linéique de véhicules

- $V(u)$ : vitesse de circulation. on prends

$$V(u) = V_m \left( 1 - \frac{u}{u_m} \right)$$

$V_m$ : vitesse max

$u_m$ : densité critique où tout est bouché.

- Conservation des véhicules.

$$\partial_t u + \partial_x (V(u)u) = 0 \quad (FC)$$

$$\partial_t u + V_m \left( 1 - \frac{u}{2u_m} \right) \partial_x u = 0 \quad (FNC)$$

Remarque: FC et FNC ne sont équivalentes que pour des solutions régulières. or en général les solutions ne sont pas régulières.

## II) Etude des sol. régulières (d=1): méthode des caractéristiques.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (C)$$

On suppose  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ .

Def: | Une sol. régulière est une sol. de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

Not. | on note  $a(u) = f'(u)$ .

Def: | Soit  $u(x, t)$  une sol. classique de (C). on appelle courbe caractéristique la fonction  $t \mapsto x(t)$  où  $x(t)$  est solution du pb de Cauchy (par EDO):

$$\begin{cases} x'(t) = a(u(x(t), t)) , & t > 0. \\ x(0) = y . \end{cases}$$

$y =$  "pied de la caractéristique".

Si  $u$  sol. classique,  $(x, t) \mapsto a(u(x, t)) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Le th. de Cauchy-Lip assure l'existence d'une sol. max. unique sur un intervalle  $[0, T^*[$ .

En fait  $u$  lipschitz suffit.



Prop: Soit  $x = ]0, T^*[ \rightarrow \mathbb{R}$  une courbe caractéristique.

- 1) Le long de la courbe  $t \mapsto x(t)$ , la solution  $u$  est cste.
- 2) La courbe  $t \mapsto x(t)$  est une droite.

Preuve:

1) On a  $t \mapsto u(x(t), t) = cste$ .

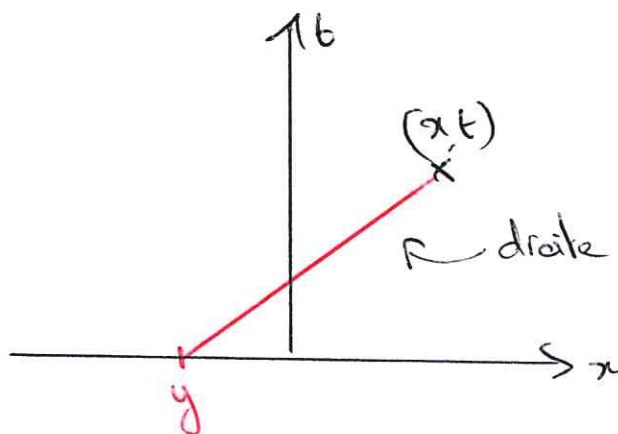
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(x(t), t) &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) \\ &= a(u(x(t), t)) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \phi(u(x(t), t)) + \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) = 0 \end{aligned}$$

2)  $\forall t \in ]0, T^*[ : u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u(y, 0) = u_0(y)$ .

Donc l'eq. de la caractéristique devient  $x'(t) = a(u_0(y))$ .

Soit  $x(t) = y + ta(u_0(y))$ . ▀

Ainsi pour connaître  $u(x, t)$ , il faut trouver  $y$ , pied de la droite caractéristique qui passe par le point  $(x, t)$ .



$$u(x, t) = u_0(y)$$

## Exemple: Transport linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(au) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

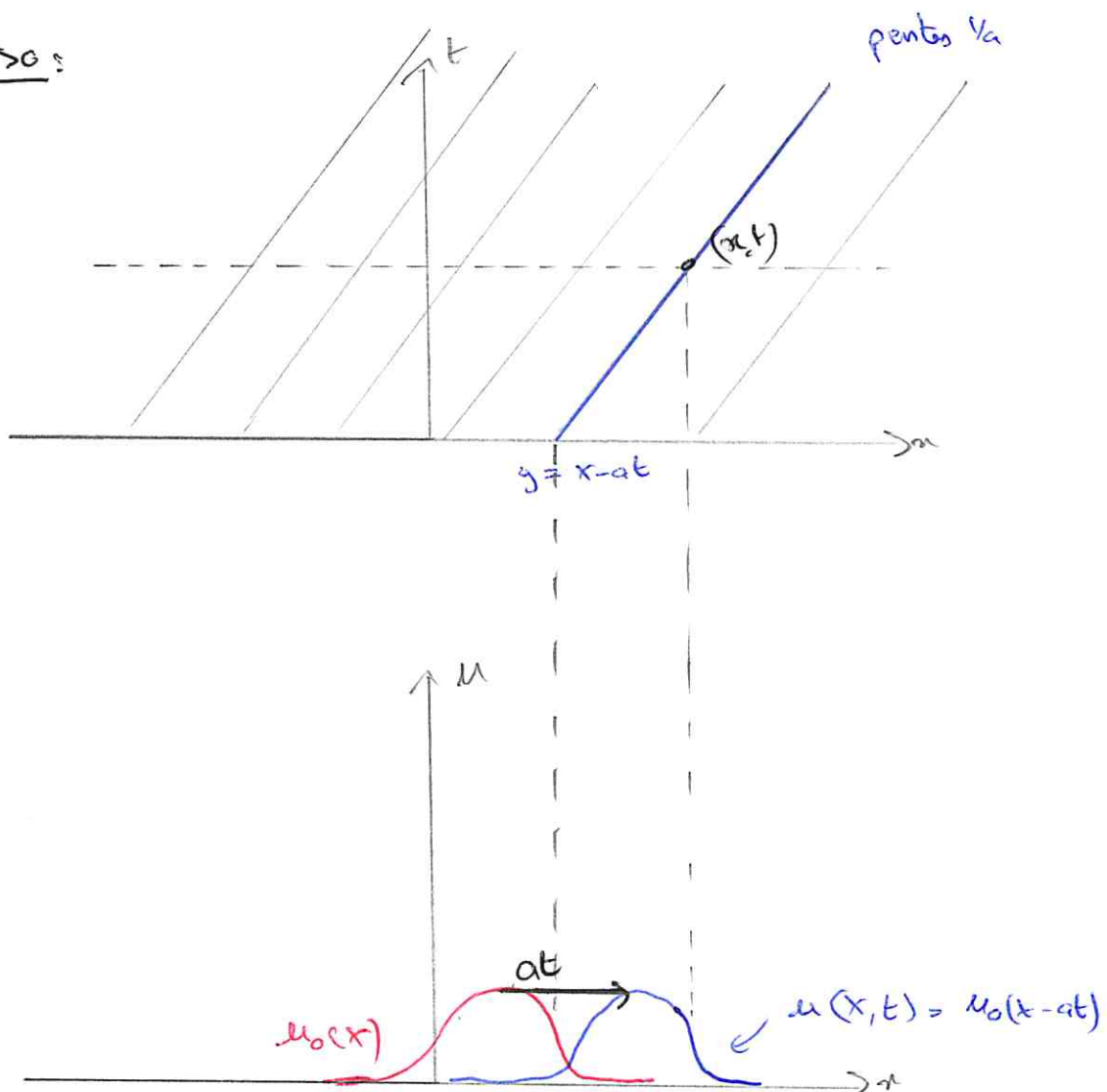
$$f(u) = au, \quad a \in \mathbb{R}. \quad a'(u) = \text{ste} = a.$$

Eq. des caractéristiques:  $x = y + at \Leftrightarrow y = x - at.$

$\forall (x, t)$ , la caractéristique qui passe par  $(x, t)$  a pour pied  $y = x - at$ .  
La sol. étant constante le long de la caractéristique, on a

$$u(x, t) = u_0(y) = u_0(x - at).$$

$a > 0$ :



La condition initiale est "transportée" à la vitesse  $a$ .

Exemple : Burgers :

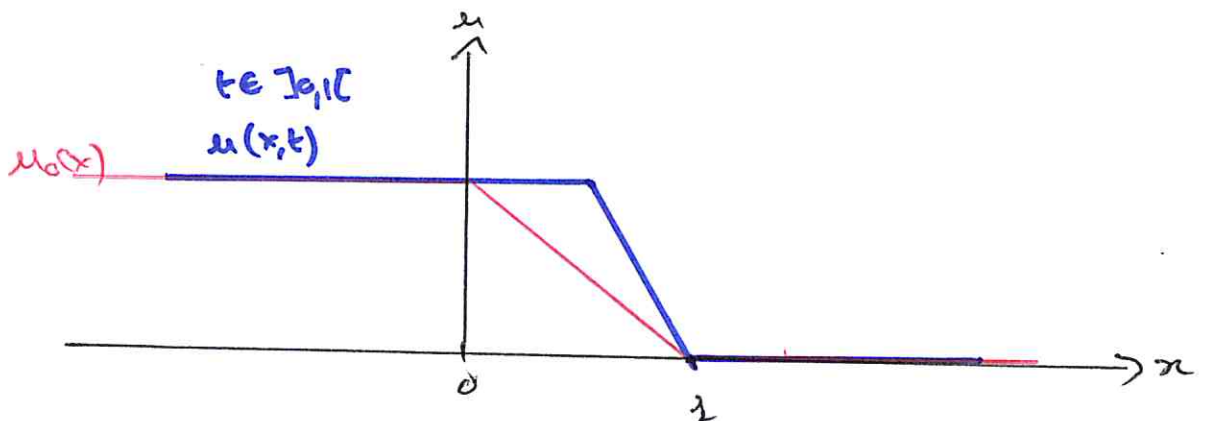
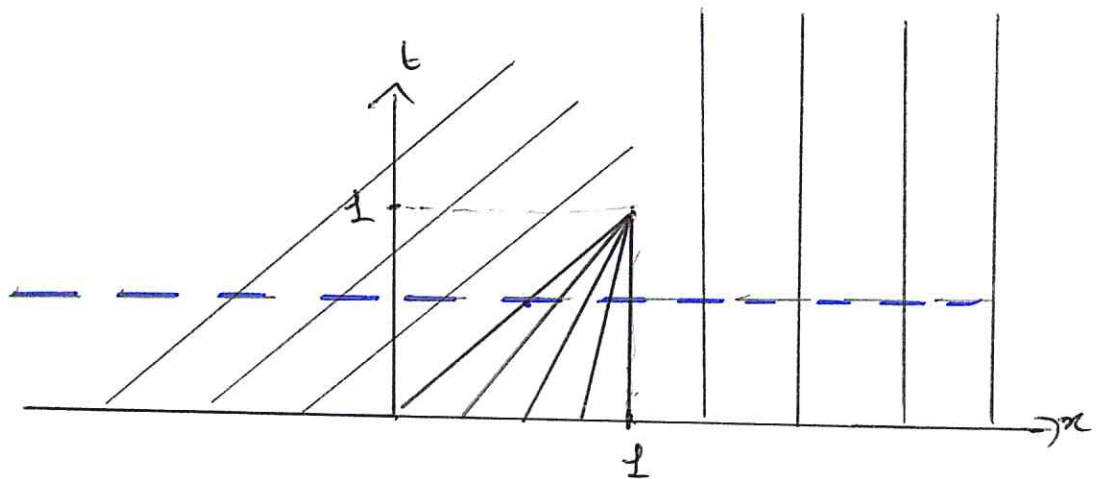
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad a(u) = f'(u) = u.$$

Eq. des caractéristiques:  $x = y + a(u_0(y))t \Leftrightarrow x = y + u_0(y)t$ .

Cette fois-ci les pentes des droites caractéristiques dépendent de  $y$ . Elles peuvent donc se croiser. A l'intersection, la solution classique n'est plus définie, elle est multivaluée.

on obtient :



Fait: Le pb. de l'ex. 2 est générique (intersection des caractéristiques).  
 Dès que  $f(x)$  n'est pas linéaire abus, même si la donnée initiale est aussi régulière que l'on veut, en général les sol. régulières ont une durée d'existence finie.

Théorème: ( $d=1$ ). Soit  $a_0 \in C^1(\mathbb{R})$  bornée et  $a_0'$  bornée.

- \* Si  $a_0 a_0'$  est croissante alors  $\exists!$  sol. régulière sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .
- \* Sinon,  $\exists y_0$  tq  $(a_0 a_0')'(y) < 0$ , on note  $T^* = - \frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} (a_0 a_0')'(y)}$ . Alors il existe une unique solution classique au pb de Cauchy sur  $\mathbb{R} \times [0, T^*]$ .
- \* Pour  $t \geq T^*$ , il n'y a pas de solution régulière.

Preuve

- Si u sol., alors  $x(x,t) = x_0(y)$  où  $y$  tq  $x = y + a_0(y)t$ .  
 Il y a un tel  $y$  existe pour  $t$  jusqu'à  $T^*$ , et que  $y$  est unique.

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} (y + a_0(y)t) = \pm \infty \quad \text{car } a_0 \text{ bornée.}$$

TVI  $\Rightarrow y$  existe. unicité? oui pour  $t < T^*$  car alors

$$\frac{d}{dy} (y + a_0(y)t) = 1 + (a_0 a_0')'(y)t > 0 \text{ si } t < T^*.$$

Donc  $y$  ts  $y + a_0(y)t$  strict  $\nearrow$ .

Pour tout  $(x,t)$ ,  $y$  est unique on le note  $y(x,t)$ .

• Réciproquement, soit  $u(x,t) = u_0(y(x,t))$  pour  $t < T^*$ .

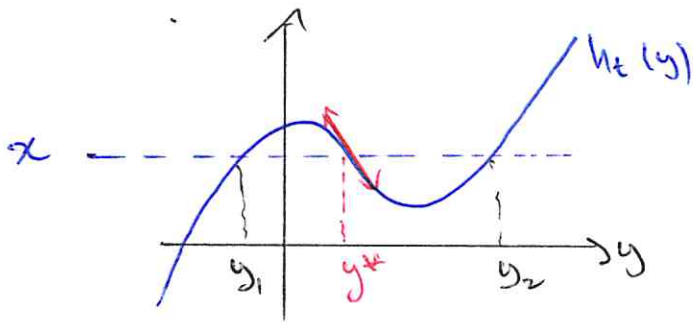
D'après la prop. sur les courbes caractéristiques, on a :

$$\partial_t u + \partial_x (au) = 0 \quad \text{et} \quad u(x,0) = u_0(y(x,0)) = u_0(x).$$

Donc  $u$  sol.

• Soit maintenant  $t > T^*$ . Alors  $\exists y^* \in \mathbb{R}$   
 $y^* + (a \circ u_0)'(y^*) t < 0$

Soit  $h_t(y) = y + (a \circ u_0)'(y) t$ . On a djs  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} h_t(y) = \pm\infty$ .



On veut résoudre  $x = h_t(y)$ . Pour  $x$  bien choisi, cette équation a 3 racines distinctes dont l'une est égale à  $y^*$ .

on alors  $\begin{cases} x = y_1 + (a \circ u_0)'(y_1) \\ x = y^* + (a \circ u_0)'(y^*) \end{cases} \quad (*) \quad \text{et} \quad u(x,t) = u_0(y_1) = u_0(y^*)$

or  $(*) \Rightarrow y_1 - y^* = a \circ u_0'(y^*) - a \circ u_0'(y_1)$ .

Donc  $y_1 \neq y^* \Rightarrow u_0(y^*) \neq u_0(y_1)$ .

Donc  $u(x,t)$  est multivaluée. Impossible ▣

Remarque : Quelle est la régularité de  $u$  en fonction de celle de  $u_0$  et de  $a$ ? on pourra se rappeler du th. des fonctions implicites par la régularité de  $(x,t) \mapsto y(x,t)$ .



### Exercice: (explosion en temps fini)

Soit  $u(x,t)$  une sol. régulière définie sur  $[0, T^*[$  avec  $T^* < +\infty$ .

Abs d existe  $y_0$  tq  $(a_0 u_0)'(y_0) < A_0$ .

Soit  $X(t)$  la caractéristique issue de  $y_0$ , définie sur  $[0, T^*[$ .

Soit  $v(t) = a'(u(X(t), t)) \times \frac{\partial u}{\partial x}(X(t), t)$ .

Montre qu'il existe  $T \leq T^*$  tq  $\lim_{t \rightarrow T} |v(t)| = +\infty$ .

Analogie avec les EDO : la fin d'existence de sol. est due soit à l'explosion de la sol. soit à l'explosion de sa dérivée en temps fini.

Question: Que faire pour  $t \geq T^*$ ?  $\Rightarrow$  sol. faibles.  
ce sol. au sens des distributions.

### III) Solutions faibles

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

(c) on suppose  $d=1$  mais on peut généraliser.

### Définitions

Soit  $u_0 \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ . On dit que  $u$  est sol. faible de (c) sur  $\mathbb{R} \times [0, T[$  si  $u \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R} \times ]0, T[)$  et

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T[).$$

## Remarques importantes:

- Si  $T = \infty$ , on dit que la sol. est globale sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .
- Dans la définition  $\text{supp } \phi \subset \mathbb{R} \times [0, T[$  et non pas  $\mathbb{R} \times ]0, T[$  sinon la condition initiale ne serait pas prise en compte:

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx$$

- Si  $u$  est régulière dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  et  $u$  est sol. faible ssi  $u$  est solution classique. En effet,  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T[)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u_t \phi + (f(u)) \phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx \\ = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x (f(u))) \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

$\Leftarrow$   $u$  sol. classique donc membre de droite nul  $\forall \phi$ . Donc celui de gauche aussi donc  $u$  sol. faible.

$\Rightarrow$   $u$  sol. faible donc membre de gauche nul  $\forall \phi$ . En particulier  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times ]0, T[)$ :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u + \partial_x (f(u))) \phi dx dt = 0. \quad \text{Donc } \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0.$$

Par suite  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T[)$   $\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \phi(x, 0) dx = 0$

$$\Rightarrow \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} (u_0 - u(\cdot, 0)) \psi dx = 0.$$

$$\Rightarrow u_0(x) = u(x, 0) \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Condition de Rankine-Hugoniot:

La déf. admet potentiellement des sol. faibles discontinues.  
Cependant, elle n'admet pas n'importe quelle discontinuité. Le  
th. suivant ce que doit vérifier une sol. faible régulière de  
part et d'autre d'une courbe, régulière, de discontinuité.

### Théorème:

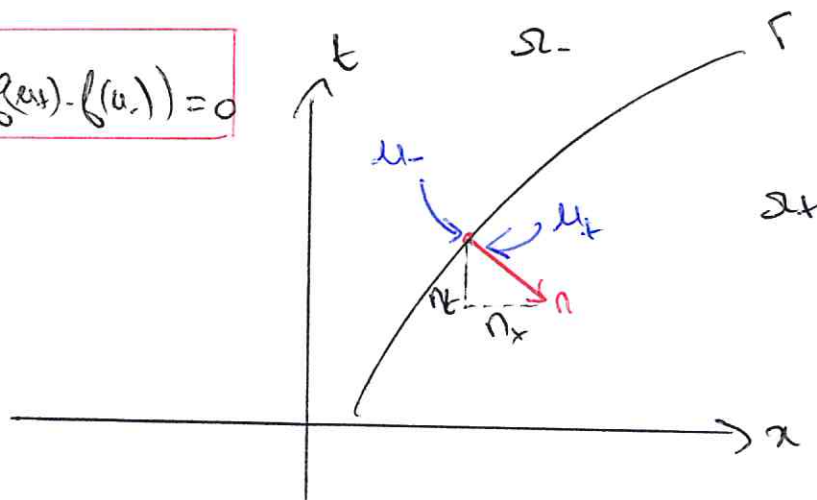
Soit  $u \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R} \times ]0, T[)$  de classe  $C^1$  en dehors  
d'une courbe régulière  $\Gamma$  séparant  $\mathbb{R} \times ]0, T[$  en  
deux composantes connexes  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$ . Alors c'est une  
sol. faible SSI:

- c'est une sol. classique dans  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$
- le long de  $\Gamma$ , les sauts  $[u]$  de  $u$  et  $[f(u)]$  de  $f(u)$  sont reliés par :

$$n_t [u] + n_x [f(u)] = 0 \quad (RH)$$

où  $n = (n_x, n_t)$  est un vecteur unitaire normal  
à  $\Gamma$

$$n_t (u_+ - u_-) + n_x (f(u_+) - f(u_-)) = 0$$



Preuve:

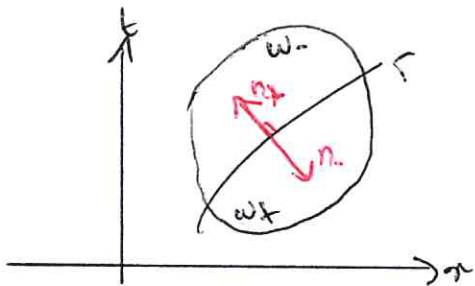
• on suppose en sol. faible. Alors  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times ]0, T[)$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + \beta(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx =$$

$$\left( \iint_{\Omega_-} + \iint_{\Omega_+} \right) (u \partial_t \phi + \beta(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx.$$

En particulier pour  $\phi$  à supp dans  $\Omega_{\pm}$ ; on peut alors encore déduire comme u rég. dans  $\Omega_{\pm}$  que  $\partial_t u + \partial_x \beta(u) = 0$  dans  $\Omega_{\pm}$  puis que  $u(x, 0) = u_0$  dans  $\Omega_{\pm} \cap \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ .

Vérifions la relation de saut (RH): Soit  $\phi$  à support dans  $\omega$  borné, de bord régulier  $\subset \mathbb{R} \times ]0, T[$  et traversé par  $\Gamma$ :



$$0 = \left( \iint_{\omega_-} + \iint_{\omega_+} \right) (u \partial_t \phi + \beta(u) \partial_x \phi)$$

Par la formule de Green dans  $\omega_{\pm}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= - \iint_{\omega_+} \underbrace{\phi (\partial_t u + \partial_x \beta(u))}_{=0} dx dt + \int_{\partial \omega_+} (u n_t^+ + \beta(u) n_x^+) \phi ds \\ &\quad - \iint_{\omega_-} \underbrace{\phi (\partial_t u + \partial_x \beta(u))}_{=0} dx dt + \int_{\partial \omega_-} (u n_t^- + \beta(u) n_x^-) \phi ds \end{aligned}$$

or  $\phi$  est nulle sur  $\partial \omega_{\pm} \setminus \Gamma$  donc:

$$\int_{\Gamma} (u_+ n_t^+ + \beta(u_+) n_x^+ + u_- n_t^- + \beta(u_-) n_x^-) \phi ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} ([u] n_t + [\beta(u)] n_x) \phi ds = 0, \text{ ce qui } \Rightarrow \forall \phi \in \mathcal{D}(\Gamma):$$

$$\int_{\Gamma} ([u] n_t + [\beta(u)] n_x) \phi ds = 0 \Rightarrow [u] n_t + [\beta(u)] n_x = 0.$$



- Réciproquement, si on vérifie cette condition (RH) et si elle est sol. classique dans  $\Omega_{\pm}$ , on remonte les calculs pour  $m, g$  c'est une sol. faible. □

Remarque: Comme  $f$  est  $C^1$ , si  $u$  est bornée à valeurs dans  $[a, b]$  par ex, alors  $\exists M > 0, \forall u \in [a, b] |f'(u)| \leq M |u|$ .

Alors par (RH): en tout point  $(x, t) \in \Gamma$  on a:

$|n_E(x, t)| \leq M |n_x(x, t)|$  et donc  $\Gamma$  peut être paramétrisé par le temps (fonctions implicites),

$$\Gamma = \{ (x, t); x = X(t) \} \quad \text{à} \quad X'(t) = v(t) = - \frac{n_E(x(t), t)}{n_x(x(t), t)}$$

(RH) s'écrit alors  $[f'(u)] = v(t) [u]$ .

Exemple:

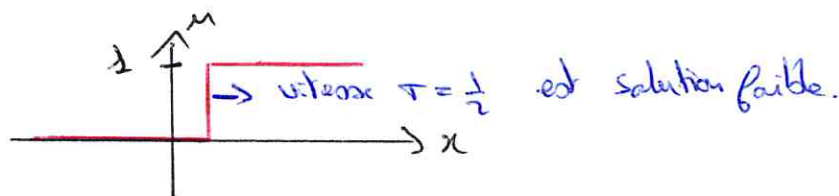
Burgers:  $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$ . On cherche une solution sous la forme:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma t \\ u_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases} \quad \text{avec } u_L, u_R \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma \in \mathbb{R}.$$

ie une discontinuité entre deux états constants se propageant à vitesse constante: Alors:

$$(RH) \Rightarrow \frac{u_R^2}{2} - \frac{u_L^2}{2} = v(u_R - u_L) \Rightarrow v = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

Donc:

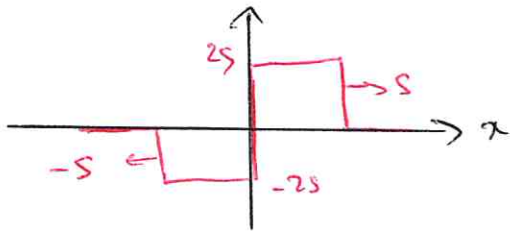




Problème: Il y a trop de sol. faibles: pas d'espoir d'unicité.

ex: Burgers 
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \\ u(x,0) \equiv 0 \end{cases}$$

Pour tout  $s > 0$ , la fonction 
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -st \\ -2s & \text{si } -st < x < 0 \\ +2s & \text{si } 0 < x < st \\ 0 & \text{si } x > st \end{cases}$$



est solution faible. Infinité (non dénombrable!) de sol. faible.

#### IV) Solutions entropiques:

On cherche un critère qui parmi toutes les sol. faibles permet de sélectionner l'unique solution "physique".

Les lois de conservation du type (1)  $\partial_t u + \partial_x \beta(u) = 0$  sont souvent des approximations de lois du type

$$(1-\varepsilon) : \partial_t u + \partial_x \beta(u) = \varepsilon \partial_{xx} u$$

cà l'on a négligé le terme de diffusion  $\varepsilon \partial_{xx} u$  ( $\varepsilon = \text{viscosité}$ )

on peut considérer que les "bonnes" solutions faibles de (1) sont celles qui sont limites de solutions  $u_\varepsilon$  de (1- $\varepsilon$ ) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Il faut donc trouver une information sur les solutions  $u_\varepsilon$  de (1- $\varepsilon$ ) qui "persiste" lors du passage à la limite  $u_\varepsilon \rightarrow u$ .

### Calcul Fondamental

Soit  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe  $e^2$  ie  $E'' \geq 0$ .

On multiplie  $(\#-\varepsilon)$  par  $E'(u_\varepsilon)$ ,

$$E'(u_\varepsilon) \partial_t u_\varepsilon + E'(u_\varepsilon) f'(u_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon = \varepsilon E'(u_\varepsilon) \partial_{xx} u_\varepsilon.$$

Soit  $F(u)$  tq  $F'(u) = E'(u) f'(u)$ . Alors:

$$\partial_t E(u_\varepsilon) + \partial_x F(u_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} (E(u_\varepsilon)) - \underbrace{\varepsilon (\partial_x u_\varepsilon)^2 E''(u_\varepsilon)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \partial_t E(u_\varepsilon) + \partial_x F(u_\varepsilon) - \varepsilon \partial_{xx} (E(u_\varepsilon)) \leq 0$$

Cette forme conservative nous permet d'espérer passer à la limite dans une forme faible.

Formellement: en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\partial_t E(u) + \partial_x F(u) \leq 0.$$

### Définition

Soit  $E$  une fonction convexe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $E$  est une entropie de l'équation

(1)  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  si il existe une fonction  $F(u)$

telle que les solutions régulières de (1) sont aussi solutions faibles de  $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) = 0$ .

$F$  est appelé flux d'entropie associé à  $E$ .

\* Si  $E$  est  $e^2$ , il suffit de prendre  $F(u)$  primitive de  $E'(u) f'(u)$ . On a alors  $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) = 0$  au sens fort donc au sens faible.

\* Si  $E$  est seulement continue, on peut quand même définir un flux d'entropie  $F(u)$ .

En effet : soit  $\rho_n$  une suite régularisante à valeurs positives :



Soit  $E_n(u) = (E * \rho_n)(u) = \int_{\mathbb{R}} E(u-y) \rho_n(y) dy$ .

Alors  $E_n$  est  $C^\infty$  et  $E_n \rightarrow E$  unif. sur tout compact.

On pose alors :

$$F_n(u) = \int_0^u f'(y) E_n'(y) dy$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} f'(u) E_n(u) - f'(0) E_n(0) - \int_0^u f''(y) E_n(y) dy$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} f'(u) E(u) - f'(0) E(0) - \int_0^u f''(y) E(y) dy$$

et la convergence est uniforme sur tout compact.

Soit donc  $F(u) := f'(u) E(u) - f'(0) E(0) - \int_0^u f''(y) E(y) dy$  que l'on peut définir par toute fonction  $E$  continue.

Si  $u$  sol. régulière de  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  alors

$\forall n \in \mathbb{N}$  :  $\partial_t E_n(u) + \partial_x F_n(u) = 0$  au sens fort donc au

sens faible :  $\iint (E_n(u) \partial_t \phi + F_n(u) \partial_x \phi) dx dt = 0$

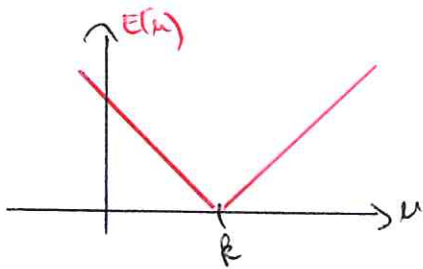
$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\iint (E(u) \partial_t \phi + F(u) \partial_x \phi) dx dt.$$

⚠ on a pas  $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) = 0$  au sens fort si  $E$  seulement continue.

Exemple: les entropies de Kuznetsov:

$$R \in \mathbb{R}: E(u) = |u - R|$$



Si on pose  $F(u) = \beta'(u) E(u) - \beta'(R) E(R) - \int_R^u \beta''(y) E(y) dy$ ,  
on peut montrer que  $F(x) = (\beta(u) - \beta(R)) \operatorname{sgn}(u - R)$ .

Définition:

Soit  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T[)$ . on dit que c'est une solution entropique du problème de Cauchy

$$(1) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x F(u) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Si pour toute entropie continue convexe  $E$ , de flux  $F$  on a:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (E(u) \partial_t \phi + F(u) \partial_x \phi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} E(u_0(x)) \phi(x, 0) dx \geq 0$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times ]0, T[) \text{ et } \phi \geq 0.$$

En fait, la notion de solution entropique contient la notion de solution faible:

Proposition:

Soit  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T[)$  solution entropique de (1), avec  $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $u$  est solution faible de (1)



Preuve:  $u$  et  $u_0$  sont essentiellement à valeurs dans un intervalle borné  $(a, b)$ .

On écrit l'inégalité d'entropie pour  $E(u) = |u - a|$ :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u - a) \partial_t \phi + (p(u) - p(a)) \partial_x \phi \, dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - a) \phi(x, 0) \, dx \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + p(u) \partial_x \phi) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) \, dx &\geq 0 \\ &\geq a \underbrace{\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t \phi + p(a) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_x \phi + a \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) \, dx}_{=0} \end{aligned}$$

L'inégalité d'entropie pour  $E(u) = |u - b|$  donne  $\leq 0$ .

On a donc  $= 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times ]0, T[) \text{ tq } \phi \geq 0$ .

Par  $\phi$  pas positive:  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  avec  $\phi_1, \phi_2 \geq 0$ .

Par linéarité, c'est vrai  $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times ]0, T[)$ . ▣

### Remarques:

1) Les inégalités d'entropie pour les seules fonctions de la forme  $E(u) = |u - k|$  suffisent à obtenir toutes les inégalités d'entropie, en interpolant  $E$  convexe de façon linéaire par morceaux.

2) La définition des sol. entropiques introduit de l'irréversibilité:  
Si  $u(x, t)$  sol. faible entropique sur  $]0, T[ \times \mathbb{R}$ .

Alors  $v(x, t) = u(-x, T - t)$  est sol. faible de

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x p(v) = 0 \\ v(x, 0) = u(-x, T) \end{cases} \quad \text{mais ce n'est pas une sol. entropique car}$$

alors  $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) \geq 0$  au sens faible,  
sauf si les inégalités d'entropie sont des égalités.



3) Si  $f$  est strictement convexe, l'inégalité d'entropie au sens faible pour une seule entropie strictement convexe  $E(u)$  suffit à obtenir toutes les inégalités d'entropie.

4) Sol. classique  $\Rightarrow$  sol. entropique avec  $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) = 0$ .

### Solutions entropiques discontinues:

#### Théorème:

$u \in C_{loc}^{\infty}(\mathbb{R} \times ]0, T[)$  et en dehors de  $\Gamma$  courbe régulière. Alors  $u$  sol. faible entropique ssi

(1) c'est une sol. classique

(2) le long de  $\Gamma$ , on a l'inégalité:

$$n_E [E(u)] + n_x F(u) \leq 0 \quad (*)$$

par toute entropie  $E$ , avec  $\vec{n}$  qui pointe vers la droite:  $n_x > 0$ .

Preuve: idem que par (RH)

Exemple: Burgers  $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$  on sait déjà que la fonction  $u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma t \\ u_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$  avec  $\sigma = \frac{u_L + u_R}{2}$  est sol. faible.

Est-elle entropique? (\*) se réécrit:

-  $\nabla [E(u)] + \nabla [F(u)] \leq 0$ . Prenons  $\begin{cases} E(u) = u^2 & (\text{à seule suffit}) \\ F(u) = \frac{2}{3} u^3 \end{cases}$

-  $\frac{u_R + u_L}{2} (u_R^2 - u_L^2) + \frac{2}{3} (u_R^3 - u_L^3) \leq 0$

$= \frac{1}{6} (u_L - u_R)^3$  donc la sol. est entropique ssi  $\boxed{u_L \geq u_R}$ .

Grâce à ce critère d'entropie on peut énoncer le résultat suivant:

### Théorème de Kuz'kov:

$\forall u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\exists!$   $u \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d) \cap C^0([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$   
solution entropique de (1)

Rappel: • Une fonction des deux variables  $u(x, t)$  peut être vue comme une fonction  $t \mapsto u(\cdot, t)$  de la variable  $t$  à valeurs dans un espace de fonctions de  $x$ , typiquement un espace de Banach  $X = L^p(\Omega)$ ,  $H^m(\Omega)$ , ... de norme  $\|\cdot\|_X$ .

- On appelle  $C^0([0, T], X)$  l'ensemble des fonctions continues en temps à valeurs dans  $X$ , ie

$$u \in C^0([0, T], X) \text{ ssi } ,$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \|u(s, \cdot) - u(t, \cdot)\|_X \xrightarrow{s \rightarrow t} 0.$$

- On appelle  $L^p([0, T], X)$  l'espace des fonctions  $u$  tq pour  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_X^p dt < \infty \text{ et on note } \|u\|_{L^p([0, T], X)} = \left( \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

$$\text{pour } p = +\infty$$

$$\forall t \in [0, T], \|u(\cdot, t)\|_X < \infty \text{ et } \|u\|_{L^\infty([0, T], X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_X.$$

- Remarque:  $C^0([0, T], X) \subset L^\infty([0, T], X)$ .

# I) Existence de solutions entropiques:

## i) Rappels sur les fonctions à variation bornée

Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , on définit la variation totale de  $u$  par:

$$TV_{\Omega}(u) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi, \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)^d, \|\varphi\|_{L^{\infty}(\Omega)^d} \leq 1 \right\}.$$

Définition: Une fonction  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  est dite à variation bornée sur  $\Omega$  si  $TV_{\Omega}(u) < +\infty$ . On note:

$$BV(\Omega) = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega), TV_{\Omega}(u) < +\infty \}.$$

## Exemples:

• Si  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  alors:  $\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi$ .

$$\text{Donc } \sup_{\|\varphi\|_{L^{\infty}} \leq 1} \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \leq \int_{\Omega} |\nabla u| = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.$$

De plus en prenant  $\varphi \sim \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  on obtient  $TV_{\Omega}(u) = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$ .

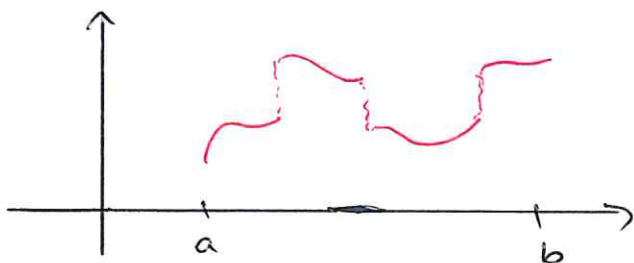
• Il éme chose si  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  (i.e.  $u \in L^1(\Omega)$  et  $\nabla u \in L^1(\Omega)^d$ ).

on a:

$$u \in W^{1,1}(\Omega) \Rightarrow u \in BV(\Omega) \text{ et } TV_{\Omega}(u) = \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Attention cependant:  $W^{1,1}(\Omega) \not\subseteq BV(\Omega)$ .

•  $d=1$ : Soit  $u$  de la forme:  $\mathcal{C}^1$  par morceaux + sauts



En faisant des ITP sur les intervalles où  $u$  est régulière, on peut montrer que :

$$TV_{[a,b]}(u) = \|u'\|_{L^1([a,b])} + \sum |\text{hauteur des sauts}|$$


↑ calculée par morceaux.

Mais la fonction  $u \in W^{1,1}([a,b])$  car sa dérivée distribution contient des mesures de Dirac au niveau des sauts :

$$u'_{\text{dist}} = u'_{\text{par morceaux}} + \sum_{\substack{\text{saut} \\ \text{en } x_0}} (u(x_0^+) - u(x_0^-)) \delta_{x_0}.$$

•  $d \geq 1$  :  $E$  un ensemble régulier de  $\mathbb{R}^d$  :

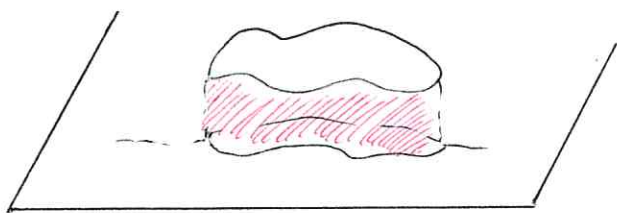
 et  $u = \chi_E$  sa fonction caractéristique,

$$\sup_{|\varphi| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E \operatorname{div} \varphi = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_E \operatorname{div} \varphi = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_{\partial E} \underbrace{\varphi \cdot n}_{\leq 1} \quad \text{()}$$

$$\leq |\partial E|.$$

En fabriquant un  $\varphi = n$  sur  $\partial E$  prolongé de manière e' à  $\mathbb{R}^d$ , on a égalité.

Donc  $\chi_E \in BV(\Omega)$  et  $TV_{\Omega}(\chi_E) = |\partial E|$



Mais  $\chi_E \in W^{1,1}(\Omega)$  car  $D\chi_E$  est une mesure supportée sur  $\partial E$ .

$TV(\chi_E)$  mesure la surface verticale du graphe.

Mais si  $u$  n'est pas "plate",  $u \in BV$  si  $Tu$  est  $L^1$  là où  $u$  est régulière et la surface de la partie verticale est finie.



## Quelques propriétés des fonctions BV:

$$\|u\|_{BV} =$$

Prop: i)  $BV(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  est un Banach pour la norme  $\|u\|_{L^1(\Omega)} + TV_{\Omega}(u)$ .

ii) Les fonctions régulières ne sont pas denses dans

$BV(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  mais:  $\forall u \in BV(\Omega) \cap L^1(\Omega), \exists (u_n)$

fonctions  $C^{\infty}$  tq  $\|u - u_n\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  et  $TV_{\Omega}(u_n) \rightarrow TV_{\Omega}(u)$ .

(Mais  $TV_{\Omega}(u - u_n) \not\rightarrow 0$ ).

iii) Si  $\Omega$  est borné, l'injection  $BV(\Omega) \cap L^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  est compacte ie: si  $(u_n)$  suite telle que  $(\|u_n\|_{BV})$  bornée, alors quitte à extraire:  $\exists u \in BV(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  tq

$$\|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

iv) Si  $u \in BV(\Omega)$  et  $\omega \subset \subset \Omega$ , alors  $\exists h_0 > 0$  tq,  $\forall |h| < h_0$ :

$$\int_{\omega} |u(x+h) - u(x)| dx \leq TV_{\Omega}(u) |h|_{\mathbb{R}^d}.$$

## 2) Existence pour une donnée initiale dans $(L^1 \cap L^{\infty} \cap BV)(\mathbb{R}^d)$ :

$$(P) \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(\beta(u)) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Une approche très classique pour montrer l'existence de solutions faibles (entropiques) est la suivante:



- ① On approche le pb. (P) par un pb. (P<sub>ε</sub>) que l'on sait résoudre et par lequel on sait démontrer des estimations sur la solution u<sub>ε</sub>.
- ② Grâce aux estimations sur u<sub>ε</sub> et à des th. généraux de compacité, on extrait de (u<sub>ε</sub>) une sous-suite qui converge vers une certaine fonction u<sub>0</sub> u<sub>ε</sub> → u, dans des normes suffisamment fortes.
- ③ Dans la formulation faible de (P<sub>ε</sub>), on fait u<sub>ε</sub> → u et on espère que u vérifie bien la formulation faible de (P).

Ce processus est difficile à mettre en œuvre si la donnée initiale u<sub>0</sub> ∈ L<sup>∞</sup>(R<sup>d</sup>). Il faut prendre u<sub>0</sub> plus régulière pour que u<sub>ε</sub> → u dans une norme forte. L'espace BV fournit un bon cadre fonctionnel car il autorise des solutions qui ont des discontinuités sur des hypersurfaces de R<sup>d</sup> (chocs...).

### Théorème 1

Soit u<sub>0</sub> ∈ (C<sup>∞</sup> ∩ L<sup>1</sup> ∩ BV)(R<sup>d</sup>). Alors il existe une solution faible entropique de (P) u ∈ L<sup>∞</sup>(R<sup>d</sup> × R<sup>+</sup>) ∩ C<sup>0</sup>([0, T], L<sup>1</sup>(R<sup>d</sup>)) pour tout T > 0. Cette solution vérifie les estimations :

- (i)  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \quad \forall t \geq 0.$
- (ii)  $u(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R}^d)$  et  $TV(u(\cdot, t)) \leq TV(u_0) \quad \forall t \geq 0.$
- (iii)  $\|u(\cdot, t) - u(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \cdot TV(u_0) |t - s|, \quad t, s \geq 0$
- (iv)  $\int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx \quad \forall t \geq 0$

Preuve:

① Soit  $\varepsilon > 0$ , un petit paramètre destiné à rendre vers 0.

Régularisons la donnée initiale par la fonction  $\rho^\varepsilon$ :

on introduit  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \geq 0$  et symétrique par rapport à  $O_{\mathbb{R}^d}$   
et tel  $\text{supp } \rho \subset B(0, 1)$ .

Soit  $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Et  $\mu_\varepsilon^0 = \rho_\varepsilon * \mu_0$ .

Comme  $\mu_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  on a  $\mu_\varepsilon^0 \rightarrow \mu_0$  dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Pb. de Cauchy avec perturbation visqueuse:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \text{div}(\rho u^\varepsilon) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x, 0) = \mu_\varepsilon^0(x). \end{cases}$$

Le terme  $\varepsilon \Delta u^\varepsilon$  est "prépondérant" dans les régions où il y a beaucoup d'irrégularités et petit dans les autres régions où l'on a essentiellement la loi de conservation.

Lemme (admis): Soit  $\mu_0 \in (L^1 \cap L^\infty \cap BV)(\mathbb{R}^d)$ . Alors à  $\varepsilon$  fixé,

le pb.  $(P_\varepsilon)$  admet une unique solution  $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  vérifiant les estimations suivantes pour  $c$  ind. de  $\varepsilon$  et  $t \geq 0$ :

(i)  $\|u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$

(ii)  $\|\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)^d} \leq TV(\mu_0)$

(iii)  $\|\partial_t u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq c TV(\mu_0)$

(iv)  $\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + c t TV(\mu_0)$

(v)  $\int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_0(x) dx$

② Compacité: En conséquence de ces estimations uniformes en  $\varepsilon$ , la famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \cap W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ .

Rappel: Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$  de frontière  $\text{lip}$ -continue. Alors le th. de Rellich assure que  $W^{1,1}(K)$  injecte compactement dans  $L^1(K)$ .

Soit  $(K_n)_{n \geq 0}$  une suite dénombrable de compacts qui croît vers  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ . Successivement par chaque  $n \geq 0$ , Rellich assure qu'il est possible d'extraire une ss-suite encore notée  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  qui converge fortement dans  $L^1(K_n)$ . Par un procédé d'extraction diagonale, on peut encore extraire une ss-suite, de nouveau notée  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  et une fonction limite  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  telle que  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ .

Quitte à extraire à nouveau,  $u_\varepsilon \rightarrow u$  pp dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ .

Remarque: Si on avait supposé  $u_0$  seulement dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on aurait juste  $u_\varepsilon \rightarrow u$  faible  $\neq$  ie,

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+), \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi \text{ avec } u \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

③ Passage à la limite dans la formulation faible.

Par  $\varepsilon > 0$  fixé,  $u_\varepsilon$  sol. de  $(P_\varepsilon) \Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \underbrace{(\varepsilon^\alpha \partial_t \varphi)}_{(A)} + \underbrace{f(u_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi}_{(B)} dt dx + \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{u_\varepsilon^0(x) \varphi(x, 0)}_{(C)} dx = - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \underbrace{u^\varepsilon \Delta \varphi}_{(D)} dx dt$$



① :  $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u^\varepsilon \Delta_t \varphi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \Delta_t \varphi$  car  $u^\varepsilon \rightarrow u$  pp  
 $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$   
 puis TCD.

idem pour ②

③ : on utilise que  $\mu_\varepsilon^0 \rightarrow \mu^0$  dans  $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^d)$ .

④ :  $\left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u^\varepsilon \Delta_t \varphi \, dt \, dx \right| \leq \|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \|\Delta_t \varphi\|_{\mathcal{L}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}$

donc ④  $\rightarrow 0$ .

Conclusion est vérifiée :  $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (u \Delta_t \varphi + f(x) \cdot \nabla_t \varphi) \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx = 0$ .  
 i.e. sol. faible de (P).

④ Vérifions que  $u$  est aussi solution entropique. Soit  $E(u)$  et  $F(u)$  un couple entropie / flux d'entropie. On multiplie (P) par  $E'(u_\varepsilon)$  :

$$\partial_t E(u_\varepsilon) + \operatorname{div} F(u_\varepsilon) = \varepsilon E'(u_\varepsilon) \Delta u_\varepsilon \quad (*)$$

$$\text{or } E'(u_\varepsilon) \Delta u_\varepsilon = E'(u_\varepsilon) \operatorname{div} (\nabla u_\varepsilon) = \operatorname{div} (E'(u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon) - \underbrace{E''(u_\varepsilon) |\nabla u_\varepsilon|^2}_{\leq 0 \text{ convexité}}$$

$$\text{Donc } E'(u_\varepsilon) \Delta u_\varepsilon \leq \operatorname{div} (E'(u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon) = \Delta (E(u_\varepsilon)).$$

Après multiplication par une fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi \geq 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} (E(u_\varepsilon) \Delta_t \varphi + F(u_\varepsilon) \cdot \nabla_t \varphi) \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} E(u_\varepsilon(x)) \varphi(x, 0) \, dx$$

$$\geq -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} E(u_\varepsilon) \Delta_t \varphi \, dx \, dt$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

car  $\mu_\varepsilon \in \mathcal{L}^\infty$ .



Puis idem par le TCS :  $u$  est sol. faible entropique.

### ⑤ Obtention des estimations sur $u$

$$(i) \quad \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \text{ par le lemme}$$
$$\Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

$$(ii) \quad \|\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq TV(u_0) \text{ par le lemme. Or } u^\varepsilon \text{ étant}$$

régulier :

$$\|\nabla u^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = TV(u_\varepsilon(\cdot, t)) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}'_c(\mathbb{R}^d) \\ \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(\cdot, t) \operatorname{div} \varphi.$$

Donc  $\forall \varphi \in \mathcal{E}'_c(\mathbb{R}^d)$  tq  $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon \operatorname{div} \varphi \leq TV(u_\varepsilon(\cdot, t)) \leq TV(u_0).$$

$$\stackrel{\text{iso}}{\Rightarrow} \forall \varphi \in \mathcal{E}'_c(\mathbb{R}^d) \text{ tq } \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 :$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div} \varphi \leq TV(u_0). \text{ Donc } TV(u(\cdot, t)) \leq TV(u_0).$$

(iii) Montrons la propriété de continuité  $u \in \mathcal{C}^0([0, T], L^1(\mathbb{R}^d))$ .

outil clé : th. d'Ascoli

Soit  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une suite de fonction  $u_\varepsilon : K \rightarrow E$  continues  
où  $K$  compact de  $\mathbb{R}$  et  $E$  espace métrique telle que

2) la famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est équicontinue uniformément en  $E$  :

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in K$$

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow d_E(u_\varepsilon(t_1), u_\varepsilon(t_2)) < \eta \quad \forall \varepsilon > 0.$$

1)  $\forall t \in K, (u_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$  est relativement compacte dans  $E$

Alors  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est relativement compacte dans  $\mathcal{E}'(K, E)$  ie  
 $\exists$  ss-suite tq  $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$  dans  $\mathcal{E}'(K, E)$

Dà : on sait par le lemme que  $\forall \varepsilon > 0$  :

$$\mu_\varepsilon \in \mathcal{E}'([0, T], W^{1,1}(\mathbb{R}^d)) \text{ et } \partial_t u^\varepsilon \in \mathcal{E}'([0, T], L^1(\mathbb{R}^d)).$$

Pb : pour  $t \in [0, T]$  fixé,  $(\mu_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$  n'est pas relativement compacte dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ .

Mais elle l'est dans  $L^1(K)$  à  $K$  compact de  $\mathbb{R}^d$  (Rellick).

puis : 
$$\mu_\varepsilon(x, t_1) - \mu_\varepsilon(x, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \mu_\varepsilon(x, t) dt$$

$$\Rightarrow \|\mu_\varepsilon(x, t_1) - \mu_\varepsilon(x, t_2)\|_{L^1(K)} \leq \|\partial_t \mu_\varepsilon\|_{L^1(K)} |t_2 - t_1| \leq C + TV(\mu_0) |t_2 - t_1|.$$

Donc  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est épicompacte.

Par Ascoli, il existe une sous-suite, encore notée  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  tq  $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$  dans  $\mathcal{E}'([0, T], L^1(K))$ .

En faisant seq. à  $(K_n)$  une suite de compacts qui croît vers  $\mathbb{R}^d$ , un procédé d'extraction diagonale donne :

$$\mu^\varepsilon \rightarrow \mu \text{ dans } \mathcal{E}'([0, T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)).$$

On peut passer à  $\mathcal{E}'([0, T], L^1(\mathbb{R}^d))$  en remarquant que l'estimation :

$$\|\mu(\cdot, t_1) - \mu(\cdot, t_2)\| \leq C + TV(\mu_0) |t_2 - t_1|$$

vérifiée par  $\mu$ , ne dépend pas des compacts  $K_n$ .

(i5) Evident  $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1)$ .

□

## VI Unité des solutions entropiques

### Théorème (Kruzkov)

Soient  $u$  et  $v$  deux sol. entropiques de données initiales  $u_0$  et  $v_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

On suppose que  $u$  et  $v \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \cap C^0([0, T], L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$  pour tout  $T > 0$ .

$$\text{On pose } \eta = \max_{\substack{|d| \leq \|u\|_{L^\infty} \\ |d| \leq \|v\|_{L^\infty}}} |\eta'(d)|. \quad (6.1)$$

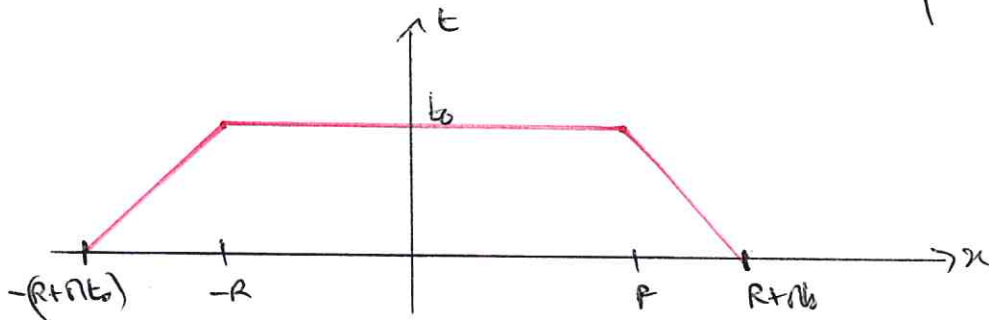
Alors pour tout  $R > 0$  et  $t \geq 0$ ,

$$\int_{|x| \leq R} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{|x| \leq R + \eta t} |u_0(x) - v_0(x)| dx \quad (6.2)$$

### Remarques:

1) Si  $u_0 = v_0$  alors  $u = v$  pp.

2) L'inégalité (6.2) met en avant le "cône d'influence".



3) Ce sont les inégalités d'entropie de Kruzkov qui permettent de démontrer ce résultat.

La démonstration délicate repose sur le lemme suivant que l'on admet :

Lemme : Soient  $u$  et  $v \in C^0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$  des sol. faibles vérifiant toutes les inégalités de Kuznetsov au sens faible :  $\forall R \in \mathbb{R}$  :

$$\partial_t |u - R| + \operatorname{div}(\operatorname{sgn}(u - R)(f(u) - f(R))) \leq 0, \text{ faible}$$

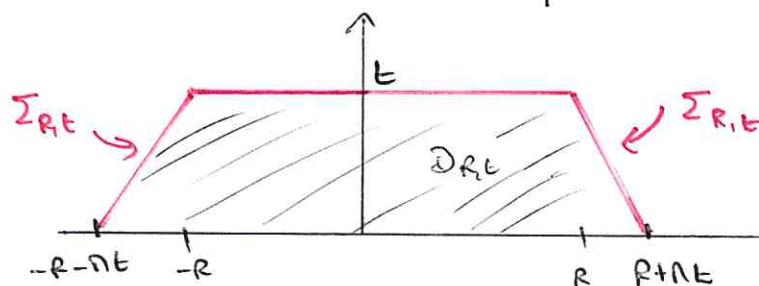
$$\partial_t |v - R| + \operatorname{div}(\operatorname{sgn}(v - R)(f(v) - f(R))) \leq 0, \text{ faible}$$

Alors,

$$(6.3) \quad \partial_t |u - v| + \operatorname{div}(\operatorname{sgn}(u - v)(f(u) - f(v))) \leq 0, \text{ faible.}$$

Idee formelle de la preuve de la th.

Intégrer (6.3) sur le cône d'influence :



on obtient :

$$\int_{|x| \leq R} |u(x,t) - v(x,t)| dx - \int_{|x| \leq R + \eta t} |u_0(x) - v_0(x)| dx + \int_{\Sigma_{R,t}} (|u - v| \eta t + \operatorname{sgn}(u - v)(f(u) - f(v))) \eta dx \leq 0$$

or par (6.1)  $|f(u) - f(v)| \leq M |u - v|$  donc :



$$\begin{aligned}
 |\mu - \sigma| \mathbb{1}_E + \operatorname{sgn}(\mu - \sigma) (\rho(\mu) - \rho(\sigma)) \mathbb{1}_X &\geq |\mu - \sigma| \mathbb{1}_E - \eta |\mu - \sigma| \mathbb{1}_X \\
 &= |\mu - \sigma| (\mathbb{1}_E - \eta \mathbb{1}_X) \\
 &= 0 \text{ par déf. sur } \Sigma_{\eta, E}.
 \end{aligned}$$

donc finalement : 
$$\int_{X \setminus E} |\mu(x, t) - \sigma(x, t)| dx \leq \int_{X \setminus R + \eta E} |\mu_0(x) - \sigma_0(x)| dx.$$

on peut justifier tout ceci rigoureusement.

### Conséquences importantes du th. d'unicité (par $\heartsuit$ )

1) unicité :  $\mu_0 = \sigma_0 \Rightarrow u = \sigma$  pp

2) L'opérateur solution est contractant dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Si  $\mu_0, \sigma_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\mu_0 - \sigma_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors  $u(t) - \sigma(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\|u(t) - \sigma(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu_0 - \sigma_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad \forall t \geq 0,$$

et 
$$\int_{\mathbb{R}^d} (u(x, t) - \sigma(x, t)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_0(x) - \sigma_0(x)) dx$$
 (conservation de la masse)

En particulier : si  $\mu_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors  $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et

$$\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|\mu_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_0(x) dx$$

3) On en déduit le principe des max :  $\mu_0 \leq \sigma_0$  pp  $\Rightarrow u(t) \leq \sigma(t)$  pp.

En effet :

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - \sigma(t)\|_{L^1} &\leq \|\mu_0 - \sigma_0\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} (\sigma_0 - \mu_0) dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\sigma(x, t) - u(x, t)) dx \\
 &\leq \|u(t) - \sigma(t)\|_{L^1}.
 \end{aligned}$$

donc 
$$\int_{\mathbb{R}^d} \sigma - u = \int_{\mathbb{R}^d} |\sigma - u| \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} (|\sigma - u| - (\sigma - u)) = 0 \Rightarrow \sigma - u = |\sigma - u|$$
  

$$\Rightarrow \sigma \geq u$$
 pp

Remarque: unicité par  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$   
 existence par  $u_0 \in (L^\infty \cap L^1 \cap BV)(\mathbb{R}^d)$ .  
 par des techniques de semi-groupes, on peut généraliser  
 les résultats d'existence à  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

## VII) Le problème de Riemann en 1D:

On cherche l'unique solution entropique du problème de Cauchy suivant (appelé p. de Riemann):

$$(\mathbb{R}) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Definition: • On appelle onde de choc une sol. composée de deux états constants  $u = u_L$  et  $u = u_R$  séparés par une discontinuité de vitesse  $\sigma \in \mathbb{R}$ :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma t, \\ u_R & \text{si } x > \sigma t. \end{cases}$$

• on appelle onde de détente une sol. continue et  $e'$  par morceaux du type  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$ .

Lemme: | Les ondes de détente sont du type:  
 $u(x, t) = \sigma t$  ou bien  $= v\left(\frac{x}{t}\right)$  où  $v(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$ .

Preuve: soit  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$  une sol. on injecte dans l'éq.

$$-\frac{x}{t^2} v'\left(\frac{x}{t}\right) + f'\left(v\left(\frac{x}{t}\right)\right) \frac{1}{t} v'\left(\frac{x}{t}\right) = 0, \quad \forall (x, t)$$

$$\text{si } v' \neq 0 \text{ alors } \forall \xi, (f' \circ v)(\xi) = \xi.$$

Remarque, une sd.  $u$  qui ne dépend que de  $\frac{x}{\epsilon}$  est dite auto-sensible ou auto-similaire.

### 1) La condition d'obliquité (olga):

C'est un critère graphique pour savoir si une discontinuité entre deux états distincts  $u_-$  et  $u_+$  se propageant à la vitesse  $\sigma$  est bien entropique:

Par RH: 
$$-\sigma [u] + [f(u)] = 0 \quad (1)$$

La sd. est entropique ssi:  $\forall k \in \mathbb{R} \quad -\sigma [u-k] + [\text{sgn}(u-k)(f(u)-f(k))] \leq 0$

Soit  $I$  l'intervalle d'extrémités  $u_-$  et  $u_+$ .

- Par  $k \in I$ , (2) est vraie (égalité) par (1).
- Par  $k \in I$ ,  $k = a u_- + (1-a) u_+$ ,  $a \in [0, 1]$ .

puis: 
$$\frac{[f(u)]}{[u]} (a - (1-a)) |u_+ - u_-| \geq \text{sgn}(u_+ - u_-) (f(u_+) + f(u_-) - 2f(k))$$

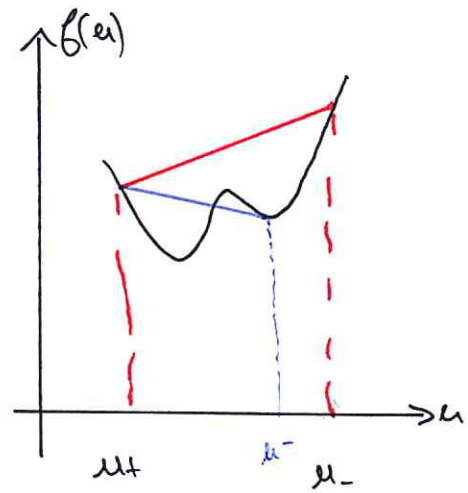
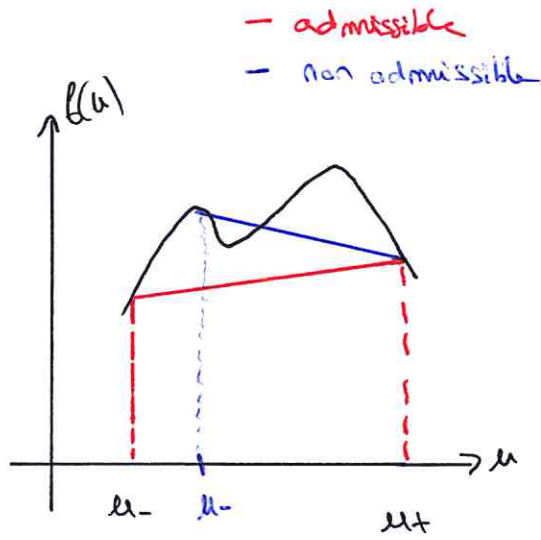
ic 
$$\text{sgn}(u_+ - u_-) (2a-1) [f(u)] \geq \text{sgn}(u_+ - u_-) (f(u_+) + f(u_-) - 2f(k))$$

si  $u_- < u_+$ : 
$$f(a u_- + (1-a) u_+) \geq a f(u_-) + (1-a) f(u_+)$$

si  $u_- > u_+$ : 
$$f(a u_- + (1-a) u_+) \leq a f(u_-) + (1-a) f(u_+)$$

### Proposition (obliquité):

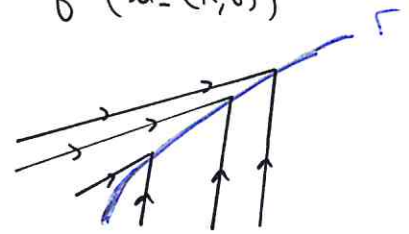
- Une discontinuité  $(u_-, u_+)$  est entropique ssi
- si  $u_- < u_+$ : le graphe de  $f|_{[u_-, u_+]}$  est au dessus de sa corde.
  - si  $u_+ < u_-$ : le graphe de  $f|_{[u_+, u_-]}$  est en dessous de sa corde



Conséquence: Si  $\Gamma$  est une discontinuité entre  $u_-(x,t)$  et  $u_+(x,t)$  se propageant à la vitesse  $\sigma(t)$  alors:

(inégalité de Lax) 
$$f'(u_+(x,t)) \leq \sigma(t) \leq f'(u_-(x,t))$$

Les caractéristiques rentrent dans le choc.



## 2) Résolution pratique du problème de Riemann

Théorème: L'unique solution faible entropique des pb. de Riemann  $(\mathbb{R})$  est constituée des deux états constants  $u_L$  et  $u_R$ , séparés par des chocs et des détenteurs. Cette sol. est auto-similaire.

Preuve:

(i) Commençons par un cas simple: on suppose  $f$  strictement convexe:  $f'' > 0$ .

- Si  $u_R < u_L$ ,  $f$  étant convexe, le graphe de  $f|_{[u_R, u_L]}$  est en dessous de sa corde. La discontinuité  $(u_L, u_R)$  se propageant à la vitesse  $\sigma = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$  est une onde de choc admissible (oblique): c'est l'unique solution.



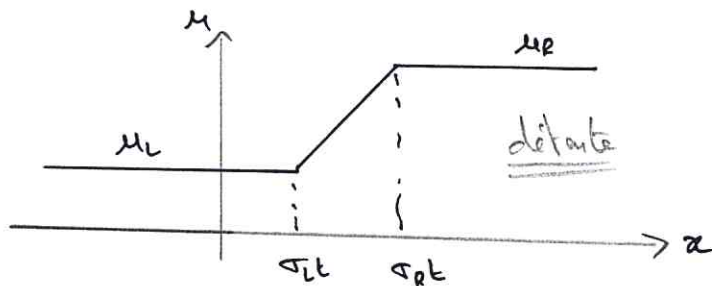
- Si  $u_L < u_R$  : m.g. la sol est une détente  
Comme  $f'' > 0$ ,  $f'$  est monotone : elle est inversible.

$$\text{On pose } u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < \sigma_L t \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } \sigma_L t < x < \sigma_R t \\ u_R & \text{si } \sigma_R t < x. \end{cases}$$

Avec la condition de continuité  $u_L = (f')^{-1}(\sigma_L)$  et  $u_R = (f')^{-1}(\sigma_R)$   
donc  $\sigma_L = f'(u_L)$  et  $\sigma_R = f'(u_R)$ .

On a bien  $\sigma_L < \sigma_R$  car  $f'$  croissante (ce ne marche pas si  $u_L > u_R$ ).

Burgers :  $f'(u) = u$



c'est une sol. classique (m si elle est seulement e' p.m) donc il n'y a pas de condition d'entropie à vérifier.

- (ii) Si  $f$  strictement concave :  $f'' < 0$ , on a le résultat inverse :  
 choc si  $u_L < u_R$ , détente si  $u_L > u_R$ .

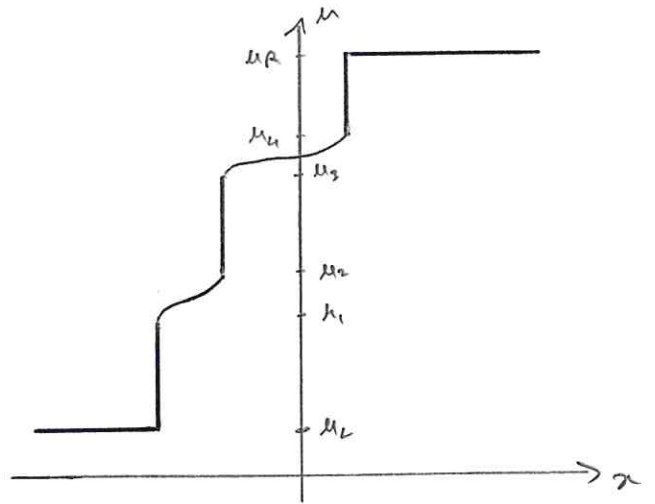
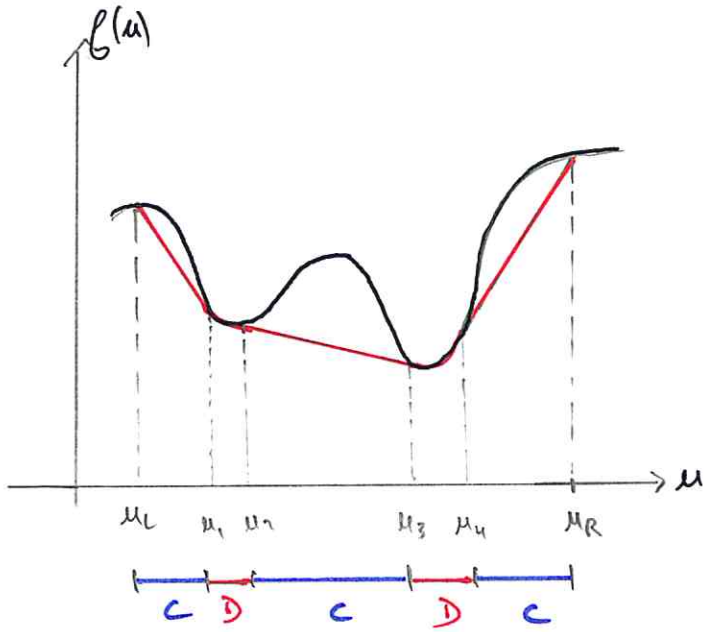
(iii) Cas général où  $f$  a un nombre fini de points d'inflexion.

- si  $u_L < u_R$  : on construit l'enveloppe convexe inférieure  $f_c$  de  $f$  sur le segment  $[u_L, u_R]$ .

Par définition :  $f_c = \sup_{\substack{g \text{ convexe} \\ g \leq f}} g$  sur  $[u_L, u_R]$

La où  $f \equiv f_c$  on a une détente.

La où  $f > f_c$  on a un choc :

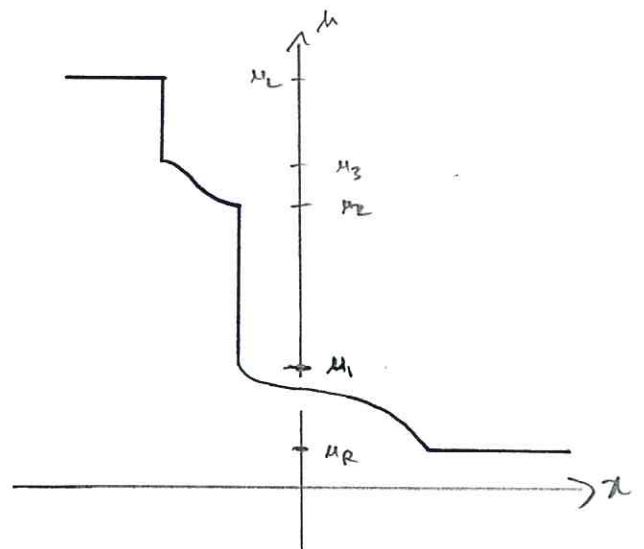
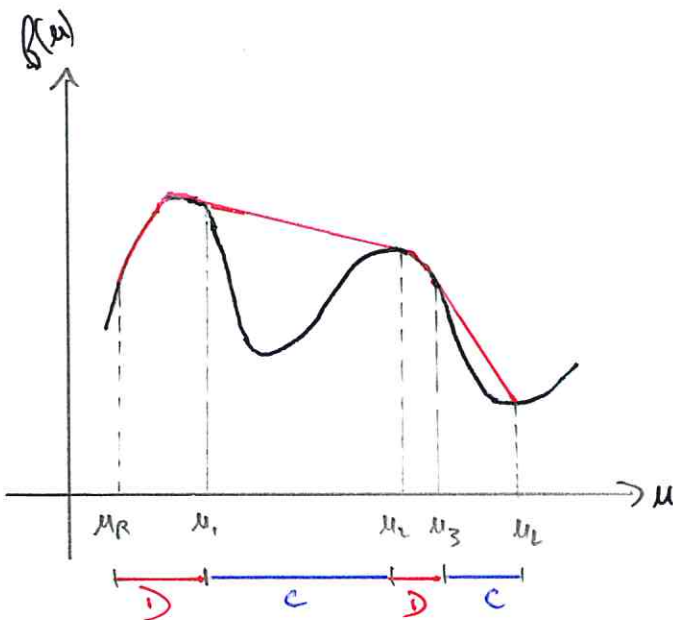


• Si  $\mu_R < \mu_L$  : on construit l'enveloppe concave supérieure  $f_c$  de  $f$  sur le segment  $[\mu_R, \mu_L]$  :

$$f_c = \inf \left\{ \begin{array}{l} g \\ g \geq f \\ g \text{ concave} \end{array} \right\}_{\text{sur } [\mu_R, \mu_L]}$$

La où  $f_c > f$  : choc

La où  $f_c \equiv f$  : détente



Exercice: Trouver les solutions des problèmes de Riemann:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u(1-u) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u^3 = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

construire les enveloppes  
convexes/concaves selon les cas...

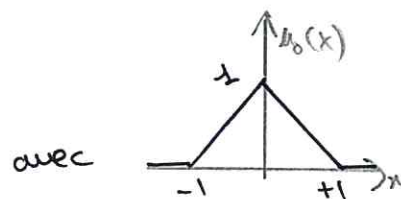
VIII) Résolution d'autres problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad (P)$$

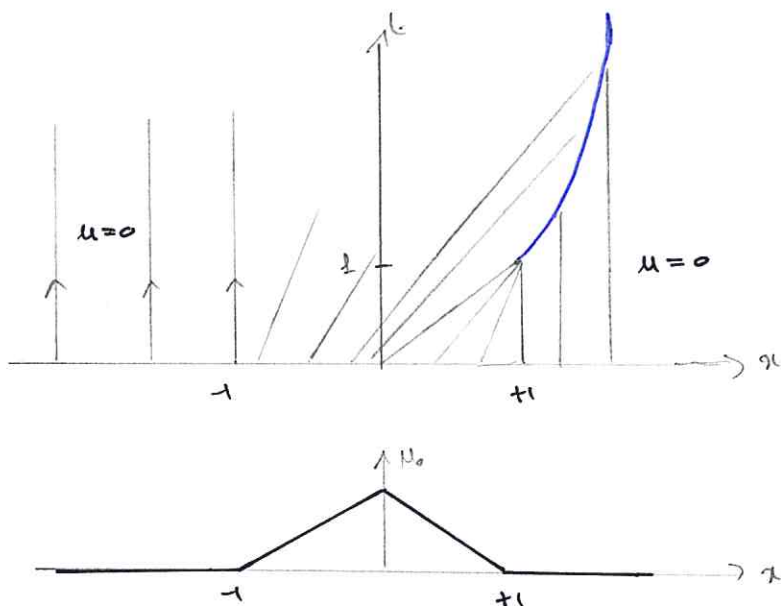
Proposition: Si  $f$  convexe ou concave, par tout point  $(x,t)$  passe une caractéristique qui coupe l'axe des  $x$ . Autrement dit on peut calculer la solution entropique du problème (P) par la méthode des caractéristiques, combinée avec (RH).

Exemple:

Burgers: 
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$



Par  $t \in [0, T^*]$  ( $T^*$  à déterminer) la solution est classique:



En  $t=1$  ( $T^* = 1$ ) apparaît un choc. Soit  $t \mapsto X(t)$  la paramétrisation de cette courbe de choc dans le plan  $(x, t)$ . on a:

$$X(1) = 1 \text{ et par (RH) : } \dot{X}(t) = \frac{u(t)+0}{2} \quad (\text{Burgers})$$

avec  $u^-(t) = u_0(y^-(t))$  où  $y^-(t)$  est le pied de la caractéristique qui remonte de  $(x, t) = (X(t), t)$ .

on a :  $y^-(t) + u_0(y^-(t))t = X(t)$  avec  $y^-(t) \in [-1, 0]$  :

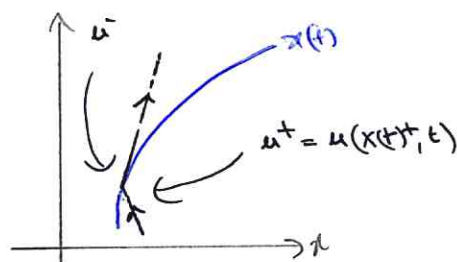
$$y^- + (1+y^-)t = X(t) \Leftrightarrow y^- = \frac{X(t) - t}{1+t} \Rightarrow u_0(y^-(t)) = \frac{1 + X(t)}{1+t}$$

Donc EDO en  $X$  : 
$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + X(t)}{1+t} \right) \\ X(1) = 1 \end{cases}$$

on résoud et on trouve  $X(t) = -1 + \sqrt{2(1+t)}$ .

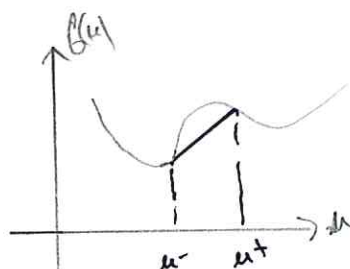
Remarque:

Si  $f$  n'est ni convexe ni concave, toute caractéristique n'atteint pas forcément l'axe des  $x$ . On peut se retrouver avec des caractéristiques qui "s'arrêtent" dans une discontinuité lorsqu'on les remonte.



$$f'(u^-) = x' = \frac{cf(u)}{[u]} > f'(u^+)$$

Cela peut arriver si  $u^-$  et  $u^+$  sont tels que,



$$f'(u^-) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} > f'(u^+)$$

Cela ne peut pas se produire si  $f$  est convexe ou concave.



## Chap II: Schémas numériques par les bits de conservation scalaires

### I) Rapports sur les différences finies ( $d=1$ )

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(x, t=0) = u_0(x) \end{cases} \quad (P)$$

on introduit un maillage de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  :  $\Delta t > 0$  pas de temps  
 $\Delta x > 0$  pas d'espace.

Temps discrets :  $t^n = n\Delta t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

Points discrets :  $x_j = j\Delta x$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

on note  $u_j^n$  l'approximation de  $u(x_j, t^n)$  :  $u_j^n \approx u(x_j, t^n)$ .

On approxime les dérivées par des différences finies :

Exemple:  $\partial_t u(x_j, t^n) \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$

$$\partial_x f(u(x_j, t^n)) \approx \frac{f(u_j^{n+1}) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x}$$

schéma explicite contre  
(pas bon)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f(u_j^{n+1}) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

schéma implicite contre  
(ou mais difficile à  
mettre en œuvre)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f(u_j^{n+1}) - f(u_{j-1}^{n+1})}{2\Delta x} = 0$$

Définition: Un schéma numérique, c'est une formule  $F(u_j^m)_{0 \leq m \leq n} = 0$  qui permet de calculer les valeurs  $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  en fonction des précédentes  $(u_j^m)_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ m < n}}$ . on dit que le schéma est consistant au sens des différences finies si l'erreur de troncature  $E = F(u(t^m, x_j))$  tend vers 0 lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0 (éventuellement avec des conditions du type  $\Delta t/\Delta x$  fixé)ssi  $u$  est sol. régulière de (P).

Dans ce cours, on se contente d'étudier les schémas à 2 niveaux en temps c-a-d :

$$F(u_j^n)_{\substack{n \leq m \leq n+1 \\ j \in \mathbb{Z}}} = \frac{u_j^{n+1} - \hat{u}_j^n}{\Delta t} + G(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}} \quad (\text{explícite})$$

$$= \frac{u_j^{n+1} - \hat{u}_j^n}{\Delta t} + G(u_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}} \quad (\text{implícite})$$

Si  $G$  ne dépend que des  $(u_j^n)$  par  $|j-j'| \leq \kappa$ , on dit que le schéma est à  $2\kappa+1$  points.

Convention: on écrit les schémas sous la forme :

$$F(u_j^n) = u_j^{n+1} - \hat{u}_j^n + \Delta t G(u_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$$

Attention, l'erreur de troncature :  $E = \frac{F(u(t^n, x_j))}{\Delta t}$ .

Définition: on dit que le schéma est d'ordre  $p$  en temps et  $q$  en espace si par la solution régulière de l'équation on a :

$$E = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q).$$

Autres exemples:

• Lax-Friedrichs: 
$$\frac{u_j^{n+1} - \left(\frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

• Lax-Wendroff: Idée de construction. Soit  $u$  la sol. de l'éq :

$$u(t+\Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)$$

$$= u - \Delta t \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial x} f(u) \right) + O(\Delta t^3)$$

$$= \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( f'(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(\Delta t^3)$$

On en déduit le schéma :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \frac{f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n) \frac{f(u_j^n) - f(u_j^n)}{\Delta x} - f'(u_{j-\frac{1}{2}}^n) \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

Il faut préciser la notation  $f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$  :

1<sup>er</sup> choix :  $f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n) = f'\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right)$

2<sup>er</sup> choix :  $f'(u_{j+\frac{1}{2}}^n) = \frac{f'(u_{j+1}^n) + f'(u_j^n)}{2}$

Exemple de calcul d'erreur de troncature, montrons que le schéma explicite central est d'ordre 1 en temps et 2 en espace :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

On remplace  $u_j^n$  par  $u(x_j, t^n)$  dans le membre de gauche :

$$E = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + \frac{f_{ou}(x_{j+1}, t^n) - f_{ou}(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}$$

on fait des développements de Taylor autour de  $u(x_j, t^n)$ ,

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + o(\Delta t^2)$$

$$f_{ou}(x_{j+1}, t^n) = f_{ou}(x_j, t^n) + \Delta x \frac{\partial f_{ou}}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f_{ou}}{\partial x^2} + o(\Delta x^3)$$

$$f_{ou}(x_{j-1}, t^n) = f_{ou}(x_j, t^n) - \Delta x \frac{\partial f_{ou}}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f_{ou}}{\partial x^2} + o(\Delta x^3)$$

$$\text{D'où } E = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right)(x_j, t^n) + o(\Delta t) + o(\Delta x^2)$$

Donc  $E \xrightarrow[\Delta t, \Delta x \rightarrow 0]{} 0$  si  $u$  est sol. et dans ce cas  $E = o(\Delta t) + o(\Delta x^2)$ .

Exo : Montrer que Lax-Wendroff est d'ordre 2 en temps et espace.

## II) Stabilité $L^2$ dans le cas linéaire

On considère l'éq. linéaire  $\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u, & a \in \mathbb{R}. \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$

On se limite aux schémas explicites à 3 points :

$$u_j^{n+1} = C_{-1} u_{j-1}^n + C_0 u_j^n + C_1 u_{j+1}^n.$$

On ne regarde que les schémas consistants :

$$\text{Erreur de troncature: } E = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - C_{-1} u(x_{j-1}, t^n) - C_0 u(x_j, t^n) - C_1 u(x_{j+1}, t^n)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \text{Par Taylor: } E &= \frac{1 - C_{-1} - C_0 - C_1}{\Delta t} u(x_j, t^n) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + O(\Delta t) \\ &\quad + (C_{-1} - C_1) \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

On suppose que le rapport  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  est fixe. On note  $\tau = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

$$\left( E \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{} 0 \text{ si } u \text{ sol.} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} C_{-1} + C_0 + C_1 = 1 \\ C_{-1} - C_1 = a \frac{\Delta t}{\Delta x} = a \tau \end{cases}$$

On va paramétrer ces schémas consistants par  $q \in \mathbb{R}$ .

$$C_0 = 1 - q$$

$$C_{-1} = \frac{1}{2}(q + a\tau)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(q - a\tau)$$

Donc :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{q}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Ce sont tous les schémas consistants à 3 points.

Q: sont-ils stables ?



Definition:

On définit  $\|u_j^n\|_{L^2} = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x |u_j^n|^2 \right)^{1/2}$  la norme  $L^2$  de la sol. approché (constante par morceaux) au temps  $t^n$ .  
On dit que le schéma est stable en norme  $L^2$ , s'il existe  $c > 0$ , indépendante de  $\Delta t$  et  $\Delta x$  telle que :

$$\|u_j^n\|_{L^2} \leq c \|u_j^0\|_{L^2} \quad \forall \Delta t, \Delta x \text{ tq } \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ fixé, } \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall u_j^0$  donné initial du schéma.

Proposition: Le schéma est  $L^2$ -stable si  $2a^2 \leq q \leq 1$ .

Preuve: On utilise la transformée de Fourier  $\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx$ .

si  $(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x+h)$  alors  $\widehat{\tau_h \varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) e^{i h \xi}$ .

On note  $u^n(x)$  la fonction ste par morceaux égale à  $u_j^n$  pour  $x \in ]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$  où  $x_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta x$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

Le schéma se réécrit sous la forme:

Fourier ↙

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) - \frac{a\Delta t}{2} (\tau_{\Delta x} u^n(x) - \tau_{-\Delta x} u^n(x)) + \frac{q}{2} (\tau_{\Delta x} u^n(x) - 2u^n(x) + \tau_{-\Delta x} u^n(x))$$

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{u}^n(\xi) - \frac{a\Delta t}{2} (e^{i\xi \Delta x} - e^{-i\xi \Delta x}) \hat{u}^n(\xi) + \frac{q}{2} (e^{i\xi \Delta x} - 2 + e^{-i\xi \Delta x}) \hat{u}^n(\xi)$$

soit  $\hat{u}^{n+1}(\xi) = h(\xi) \hat{u}^n(\xi)$  avec  $h(\xi) = 1 - a i \Delta t \sin(\xi \Delta x) + \frac{q}{2} (\cos(\xi \Delta x) - 1)$

Par le théorème de Plancherel on a :

$$\begin{aligned} \|u_j^n\|_{L^2} &= \|u^n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \max_{\xi \in \mathbb{R}} |h(\xi)| \|\hat{u}^0\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \max_{\xi \in \mathbb{R}} |h(\xi)| \|\hat{u}_j^0\|_{L^2} \end{aligned}$$

Condition suffisante de stabilité :  $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |h(\xi)| \leq 1$ .

En fait cette condition est nécessaire car s'il existe  $\xi$  tel que  $|h(\xi)| > 1$ , alors on construit  $u^0(x)$  dont un des modes de Fourier est proche de  $S_0$ , autant que l'on veut par  $\Delta x$  petit.

$$\text{On a } |h(\xi)|^2 = \Delta^2 a^2 \sin^2(\xi \Delta x) + (1 + q(\cos(\xi \Delta x) - 1))^2$$

En posant  $y = \sin^2(\xi \Delta x / 2)$  on obtient :

$$|h(\xi)|^2 = 4\Delta^2 a^2 y(1-y) + (1 - 2qy)^2. \text{ En étudiant cette}$$

fonction de  $y$  pour  $y \in [0, 1]$  on voit que :

$$(|h(\xi)| \leq 1 \forall \xi \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Delta^2 a^2 \leq q \leq 1 \quad \square$$

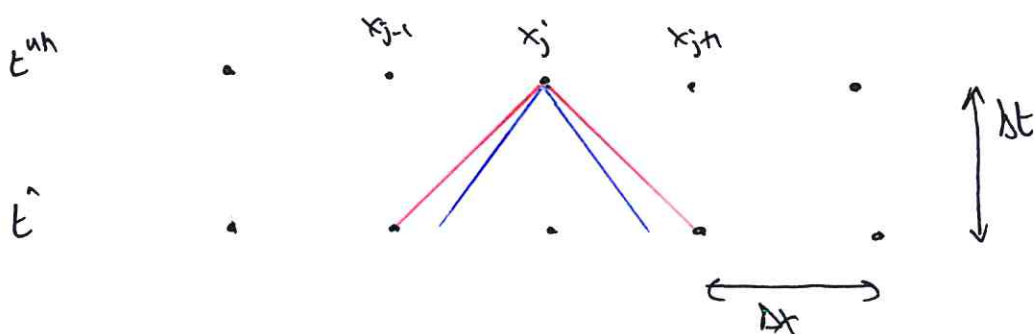
### Interprétation :

1) Condition nécessaire de stabilité :  $\Delta |a| \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$$

c'est la condition CFL. Elle s'interprète de la manière suivante :

En un point  $(x_j, t^{n+1})$  on définit le cône de dépendance numérique comme le plus petit cône de sommet  $(x_j, t^{n+1})$  contenant les points  $(x_j, t^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  impliqués dans le calcul de  $u_j^{n+1}$  :



Pente du cône de dépendance numérique :  $\pm \frac{\Delta t}{\Delta x}$

La vraie solution en  $(x_j, t^{nn}) = u(x_j, t^{nn})$  n'est elle affectée que par les valeurs comprises dans la base du vrai cône de dépendance, de pente  $\pm \frac{1}{\max_{\xi} |g'(\xi)|} = \pm \frac{1}{|a|}$  ici.

La condition CFL exprime que le cône de dépendance numérique doit contenir le vrai cône de dépendance, autrement dit, pour calculer une approximation  $u_j^{nn}$  de  $u(x_j, t^{nn})$ , les approximations disponibles au temps  $t^n$  doivent recouvrir la zone qui affecte la solution exacte en  $(x_j, t^{nn})$ .

- 2)  $q=0$  (schéma centré explicite) est forcément instable.
- 3)  $q=1$  (schéma le plus diffusif au visqueux possible)  $\Leftrightarrow$  Lax-Friedrichs. ce schéma est stable  $\Leftrightarrow |a| \leq 1$ .
- 4) Lax-Wendroff  $\Leftrightarrow q = \frac{1}{2} a^2$  : schéma le moins diffusif possible. stable  $\Leftrightarrow |a| \leq 1$ .
- 5) Schéma décentré amont (upwind en anglais)  $\Leftrightarrow q = |a|$ . stable  $\Leftrightarrow |a| \leq 1$ :

$$u_j^{nn} = \hat{u}_j - \Delta x (u_j^{\hat{}} - u_{j-1}^{\hat{}}) \quad \text{si } a \geq 0,$$

$$u_j^{nn} = u_j^{\hat{}} - \Delta x (u_{j+1}^{\hat{}} - u_j^{\hat{}}) \quad \text{si } a \leq 0.$$

on a toujours besoin d'un peu de viscosité numérique :

Remarque. Le terme de diffusion numérique provient du fait qu'on peut réécrire :

$$\frac{u_j^{nn} - u_j^{\hat{}}}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^{\hat{}} - u_{j-1}^{\hat{}}}{2\Delta x} = q \frac{\Delta x}{2\Delta t} \frac{u_{j+1}^{\hat{}} - 2u_j^{\hat{}} + u_{j-1}^{\hat{}}}{\Delta x^2}$$

$$\approx \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \quad \approx \frac{\Delta x}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n)$$



### III) Schémas conservatifs

Idee naïve: On généralise les schémas précédents au cas non-linéaire.  
par approcher la solution de Burgers par exemple:  $\partial_t u + \partial_x (u^2/2)$  par

$$\text{la donnée initiale } u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{on écrit } \partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (*)$$

Essayons le schéma upwind pour (\*):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } j < 0 \\ 0 & \text{si } j \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_j^n = 1 & \text{si } j < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

c'est un choc stationnaire, or la vraie solution est un choc de vitesse  $\sigma = \frac{1+0}{2}$ . Ce schéma ne calcule pas la bonne vitesse de choc.

Essayons encore: 
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq 0 \\ 0 & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad \text{et } \sigma = 1.$$

$\Rightarrow$  choc numérique qui avance à la vitesse  $\sigma = 1$ !

Conclusion: Pour calculer des solutions faibles (discontinues), il faut abandonner certains idées des différences finies valables uniquement pour les solutions régulières.

Définition: Un schéma explicite à 3 points est dit conservatif s'il existe une fonction continue  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que le schéma s'écrive:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n) \quad \text{avec } g_{j+1/2}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

on dit qu'un tel schéma est conservatif au sens faible si  $g(u, u) = \beta(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$ .



Remarques :

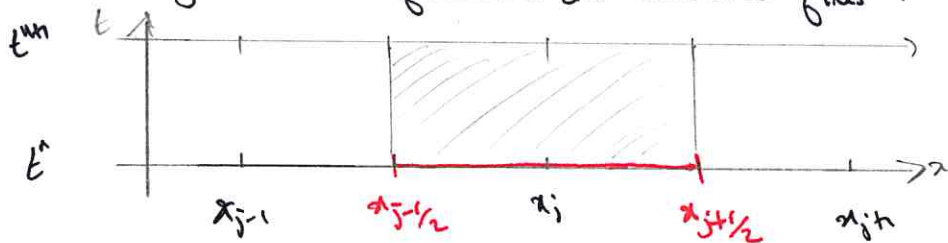
1)  $g$  est défini à une constante additive près

$$2) \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{n+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{u}_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 \quad \text{qte conservée.}$$

A rapprocher de  $\int_{\mathbb{R}} u(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}} u^0(x) dx$  par la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 & \text{dès que } u_0 \in L^1(\mathbb{R}). \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

3) Il s'agit d'une formule de volumes finis :



Principe de construction ou ID d'un schéma volumes finis :

on intègre l'équation sur la maille  $]\!]\! x_{j-1/2}, x_{j+1/2} [ \times ] t^n, t^{n+1} [$  :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\partial_t u + \partial_x f(u)) dx dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx$$

$$+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt = 0$$

on pose  $u_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx$  et on définit  $g_{j+1/2}^n$  une

approximation de  $\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt$  calculée à partir de  $u_j^n$  et  $u_{j+1}^n$ .

on obtient :

$$\Delta x (u_j^{n+1} - u_j^n) + \Delta t (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n) = 0$$

Def. plus générale, Un schéma explicite à  $(2k+1)$  points est conservatif

$$s'il s'écrit  $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [g(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k}^n) - g(u_{j-k}^n, \dots, u_{j+k-1}^n)]$$$

avec  $g$  fonction continue de  $\mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$ .

le schéma est dit consistant si  $g(u, \dots, u) = f(u) \forall u \in \mathbb{R}$ .

Proposition: | Tout schéma explicite consistant est au moins d'ordre 1 au sens des différences finies.

Preuve:

$$\begin{aligned} E &= \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + \frac{g(u(x_{j-1}, t^n), u(x_j, t^n)) - g(u(x_j, t^n), u(x_{j+1}, t^n))}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + o(\Delta t) + \frac{1}{\Delta x} \left( g(u, u) + \frac{\partial g}{\partial u_2} \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + o(\Delta x^2) - g(u, u) - \frac{\partial g}{\partial u_1} (-\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + o(\Delta x^2) \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + o(\Delta t) + \left( \frac{\partial g}{\partial u_1} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + o(\Delta x). \end{aligned}$$

Or  $g(u, u) = f(u) \Rightarrow f'(u) = \frac{\partial g}{\partial u_1} + \frac{\partial g}{\partial u_2}$ . Donc  $E = o(\Delta t + \Delta x)$  si  $u$  est solution. ▢

Les schémas conservatifs sont adaptés pour le calcul des solutions faibles.

### Théorème (Lax-Wendroff)

Si un schéma conservatif consistant converge, alors il converge vers une solution faible de l'équation (en particulier, les conditions de saut de R-H sont satisfaites).

Énoncé précis: Soit  $\epsilon_R$  une suite de  $\mathbb{R}^+$  qui  $\rightarrow 0$ . On prend une suite de solutions discrètes  $u_R(x, t)$  calculées avec le maillage  $\Delta x = \epsilon_R$  et  $\Delta t = \delta \epsilon_R$ ,  $\delta$  fixé:

$$u_R(x, t) = u_j^n \text{ pour } x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \text{ et } t^n < t < t^{n+1}.$$

$$\text{La donnée initiale discrète est } u_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^0(x) dx.$$

On suppose que (i)  $\|u_R\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq C \forall R \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $\exists \epsilon_R \rightarrow \epsilon$  de  $\mathbb{R}^+$  et pp de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Alors  $u$  est sol. faible.

Lemme 1: Soit  $u_k^\pm(x, t) = u_R(x \pm \frac{\Delta x}{2}, t)$ . Alors  $u_k^\pm \rightarrow u$  dans  $L^1_{loc}$  et pp par une sous-suite.

Preuve 1: Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \iint_K |u_k^\pm - u| dt dx &= \iint_K |u_R(\underbrace{x \pm \frac{\Delta x}{2}}_{x'}, t) - u(x, t)| dt dx \\ &= \iint_{K \mp \Delta x} |u_R(x', t) - u(x' \mp \frac{\Delta x}{2}, t)| dt dx' \\ &\leq \iint_{K' \supset K} \left\{ |u_R - u| + |u(x', t) - u(x' \mp \frac{\Delta x}{2}, t)| \right\} dt dx' \end{aligned}$$

Le premier terme  $\rightarrow 0$ . Par le 2<sup>nd</sup> terme, on sait  $u \in L^1_{loc}$  et par un argument de densité de  $C^1$  dans  $L^1_{loc}$ :  $\iint_{K'} |u(x', t) - u(x' \mp \frac{\Delta x}{2}, t)| dt dx' \rightarrow 0$ .  
Donc  $u_k^\pm \rightarrow u$  dans  $L^1_{loc}$  et donc pp par une sous-suite.

Lemme 2: Soit  $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ . On pose pour  $R$  fixe,  $\varphi_j^\wedge = \varphi(x_j, t^\wedge)$ . Soit  $\varphi_R(x, t)$  constante par morceaux définie par:  
 $\varphi_R(x, t) = \varphi_j^\wedge$  par  $x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}$  et  $t^\wedge < t < t^{\wedge+1}$ . Alors:

- (i)  $\varphi_R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \varphi$  unif. sur  $\Pi$  compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- (ii)  $\frac{\varphi_R(x, t + \Delta t) - \varphi_R(x, t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)$  unif. sur  $\Pi$  compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\frac{\varphi_R(x + \frac{\Delta x}{2}, t) - \varphi_R(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$  unif. sur  $\Pi$  compact de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Preuve: en exo.

Preuve du th. de Lax-Wendroff.

Soit  $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  quelconque et soit  $\varphi_j^\wedge = \varphi(x_j, t^\wedge)$  et  $\varphi_R$  comme dans le lemme 2.



On multiplie le schéma par  $\hat{\varphi}_j^n$  puis on somme sur  $j$  et  $n$ :

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{Z}}} [\Delta x \hat{\varphi}_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + \Delta t (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n) \hat{\varphi}_j^n] = 0.$$

Intégration par parties discrète :

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{Z}}} \Delta x u_j^{n+1} (\hat{\varphi}_j^n - \hat{\varphi}_j^{n+1}) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x u_j^0 \hat{\varphi}_j^0 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{Z}}} \Delta t g_{j+1/2}^n (\hat{\varphi}_j^n - \hat{\varphi}_{j+1/2}^n) = 0$$

Soit  $g_B(x,t) = \hat{g}_{j+1/2}^n$  par  $x_j < x < x_{j+1}$ ,  $t_n < t, t_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \underbrace{\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}} u_B(x,t) \frac{\varphi_B(x,t) - \varphi_B(x,t+\Delta t)}{\Delta t} dt dx}_{\textcircled{A}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u_B(x,0) \varphi_B(x,0) dx}_{\textcircled{B}} \\ & + \underbrace{\int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}} g_B(x,t) \frac{\varphi_B(x - \frac{\Delta x}{2}, t) - \varphi_B(x + \frac{\Delta x}{2}, t)}{\Delta x} dt dx}_{\textcircled{C}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{A} &= \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}} u \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt dx + \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}} (u_B - u) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt dx + \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}} u_B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varphi_B(x,t+\Delta t) - \varphi_B(x,t)}{\Delta t} \right) dt dx \\ &\leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \|u_B - u\|_{L^1(\mathbb{C})} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \leq \|u_B\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varphi_B(x,t+\Delta t) - \varphi_B(x,t)}{\Delta t} \right\|_{L^1(\mathbb{C})} \times |\mathbb{C}| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

où  $\mathbb{C} = \text{supp}(\varphi)$ .

De même  $\textcircled{B} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} u_B(x) \varphi(x,0) dx$ .

La fonction  $g$  est continue et  $g_B(x) = g(u_B(x - \frac{\Delta x}{2}, t))$ ,  $u_B(x + \frac{\Delta x}{2}, t) = g(u_B^-, u_B^+)$  avec  $u_B^\pm \rightarrow u$  dans l'ac et p. Donc par convergence dominée :  $g(u_B^-, u_B^+) \rightarrow g(u, u) = f(u)$  dans l'ac.

donc  $\textcircled{C} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \int_0^{t_0} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx$ .

Conclusion : on obtient la forme faible de l'éq. pour  $u$ .



Exercice: Les schémas centrés, de Lax-Friedrichs et de Lax-Wendroff se réécrivent sous la forme de schémas conservatifs. Trouver ces écritures.

#### IV) Schémas de Godunov

Eq:  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$

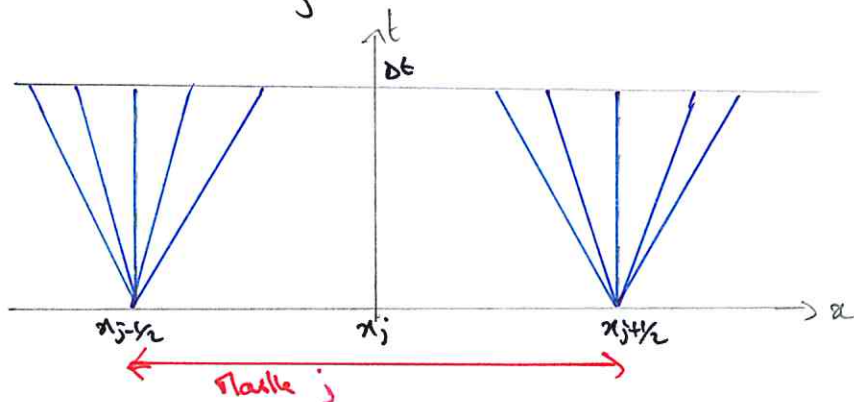
Sch. conservatif:  $u_j^{n+1} = \hat{u}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n)).$

Définition: Le schéma de Godunov est défini par la fonction  $g(u, v)$  telle que  $g(u_L, u_R) = f(u^*)$  où  $u^* = u(x, t)$  avec  $u(x, t)$  la solution entropique exacte du problème de Riemann entre  $u_L$  et  $u_R$ .

Remarque: La solution du pb. de Riemann est auto-similaire:  $u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$ , donc  $u(x, t) = v(x)$  est indépendante de  $t$ .  
 Si  $u_L = u_R$  alors  $u^* = u_L = u_R$  donc le schéma de Godunov est consistant.  
 De plus la fonction  $\xi \mapsto f(v(\xi))$  est toujours continue en 0.

Autre définition: ce même schéma admet une autre définition, qui se décompose en deux étapes:

- (i) On résout des pb. de Riemann indépendants à chaque interface  $x_{j+1/2}$  avec la donnée initiale  $u_j^n$  si  $x < x_{j+1/2}$  et  $u_{j+1}^n$  si  $x > x_{j+1/2}$ .
- (ii) Après un pas de temps  $\Delta t$  (à préciser) on moyenne les solutions exactes sur chaque maille pour obtenir une nouvelle donnée initiale constante par morceaux  $u_j^{n+1}$ .



On choisit  $\Delta t$  de telle manière que les pb de Riemann n'interagissent pas:

Si  $\max_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{\hat{}}| \leq M$  alors les vitesses d'ondes  $\nabla_x f(u(x,t))$  à  $u(x,t)$

sol. exacte sont toutes plus petites que  $\max_{|u| \leq M} |f'(u)| =: C_{\max}$ .

Donc on impose une condition CFL :  $\frac{\Delta x}{2} \geq C_{\max} \Delta t$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2 C_{\max}}}$$

Sous cette condition CFL, la sol. dans la maille  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  est

$$u(x,t) = \begin{cases} u_{j-1/2}(x,t) & \text{si } x < x_j \\ u_{j+1/2}(x,t) & \text{si } x > x_j \end{cases}$$

avec  $u_{j-1/2}(x,t)$  sol. des pb. de Riemann en  $x_{j-1/2}$  entre  $u_{j-1}^{\hat{}}$  et  $u_j^{\hat{}}$ .

$u_{j+1/2}(x,t)$  —————  $x_{j+1/2}$  —————  $u_j^{\hat{}}$  et  $u_{j+1}^{\hat{}}$ .

On moyenne, et on pose :

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} u_{j-1/2}(x, t^{n+1}) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} u_{j+1/2}(x, t^{n+1}) dx \right).$$

Vérifions que c'est le même schéma que le précédent :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\partial_t u + \partial_x f(u)) dx dt = 0 \quad \text{avec } t^{n+1} = t^n + \Delta t.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx}_{= \Delta x u_j^{n+1}} - \underbrace{\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx}_{= \Delta x u_j^{\hat{}}} + \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u_{j+1/2}(x_{j+1/2}, t)) dt}_{\substack{\text{ne dépend pas du temps à} \\ \text{cause du caractère auto-similaire} \\ = \Delta t f(u_{j+1/2}^{\hat{}})}} - \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u_{j-1/2}(x_{j-1/2}, t)) dt}_{= \Delta t f(u_{j-1/2}^{\hat{}})} = 0$$

Remarque : d'un point de vue pratique, on programme la première définition du schéma.

Par exemple, par  $f$  convexe.

$$g(u_L, u_R) = \begin{cases} f(u_L) & \text{si } \begin{cases} u_L > u_R \text{ (choc)} \text{ et } f'(u_L) > f'(u_R) \Rightarrow v > 0 \\ u_L < u_R \text{ (détente)} \text{ et } f'(u_L) > 0 \end{cases} \\ f(u_R) & \text{si } \begin{cases} u_L > u_R \text{ et } f'(u_L) < f'(u_R) \Rightarrow v < 0 \\ u_L < u_R \text{ et } f'(u_R) < 0 \end{cases} \\ f \circ (f')^{-1}(0) & \text{si } u_L < u_R \text{ et } f'(u_L) < 0 < f'(u_R) \\ & (x=0 \text{ est dans la détente}) \end{cases}$$

Remarque: Si  $f$  convexe et monotone alors  $g(u_L, u_R) = f(u^*)$   
 avec  $u^* = \begin{cases} u_L & \text{si } f' \geq 0 \\ u_R & \text{si } f' \leq 0 \end{cases}$ . Le schéma de Godunov se confond  
 avec le schéma upwind.

Exercice: | Dans le cas général  $f \in C^2$ . Montrer que  

$$g(u, v) = \begin{cases} \min_{u \leq w \leq v} f(w) & \text{si } u \leq v. \\ \max_{v \leq w \leq u} f(w) & \text{si } v \leq u \end{cases}$$

Remarque sur la CFL: on peut prendre juste  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{C_{\max}}$  car  
 on veut seulement que  $u_{j+1/2}^*$  soit la solution du pb. de Riemann en  
 $x_{j+1/2}$  et les pb. de Riemann peuvent interagir dans les mailles, mais  
 pas sur les bords des mailles.

II) Variantes du schéma de Godunov



# 1) Schéma de Roe - Numman

C'est une simplification de Godunov par linéarisation.

On introduit  $a(u, v) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$  si  $u \neq v$ ,  $a(u, u) = f'(u)$ .

On remplace le vrai pb. de Riemann par son linéarisé :

$$\partial_t u + a(u_L, u_R) \partial_x u = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Solution très simple :  $u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < a(u_L, u_R)t \\ u_R & \text{si } x > a(u_L, u_R)t \end{cases}$ .

Schéma :  $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{Roe}(u_j^n, u_{j+1}^n) - g_{Roe}(u_{j-1}^n, u_j^n))$

avec  $g_{Roe}(u_L, u_R) = \begin{cases} f(u_L) & \text{si } a(u_L, u_R) > 0 \\ f(u_R) & \text{si } a(u_L, u_R) < 0. \end{cases}$

\* Si la sol. du pb. de Riemann est un choc, le schéma de Roe donne la vraie solution.

\* Sans correction, le schéma de Roe peut converger vers de fausses solutions (ie pas entropiques).

exple:  $f$  strictement convexe,  $u_L < u_R$  (détente) &  $f(u_L) = f(u_R)$ .

La vraie sol. est une détente. On calcule  $a(u_L, u_R) = 0$  donc

$g_{Roe}(u_L, u_R) = f(u_L) = f(u_R)$ . Donc tous les qtes  $g_{j+\frac{1}{2}} - g_{j-\frac{1}{2}}$

sont nuls  $\forall n, \forall j$ :  $u_j^{n+1} = u_j^n$ . Donc la sol. numérique du

schéma de Roe est un choc stationnaire.

Autre écriture du schéma:

$$g_{Roe}(u_L, u_R) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(u_L) + f(u_R))}_{\text{schéma centre}} + \underbrace{|a(u_L, u_R)| \frac{u_L - u_R}{2}}_{\text{viscosité numérique}}$$



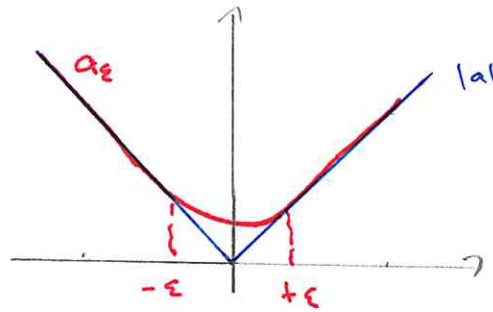
En effet :

$$u_j^{n+1} = \hat{u}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \underbrace{\frac{1}{2} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))}_{\text{partie centrale d'ordre 2 en espace et instable}} - \frac{1}{2} \underbrace{|\hat{a}_{j+\frac{1}{2}}|}_{\Delta x \partial_x u_{j+\frac{1}{2}}} (u_{j+1}^n - \hat{u}_j) + \frac{1}{2} \underbrace{|\hat{a}_{j-\frac{1}{2}}|}_{\Delta x \partial_x u_{j-\frac{1}{2}}} (u_j^n - \hat{u}_{j-1}^n) \right]$$
$$\approx \Delta x \partial_x (|\hat{a}| \partial_x u)$$

viscosité numérique petite de l'ordre de  $\Delta x$ .

Quand  $|\hat{a}| = 0$ , le schéma de Roe n'a pas de viscosité numérique et R peut ne pas converger à converger vers une sol. non entropique.

Correction entropique : Dans la formule ci-dessus, on remplace  $|\hat{a}|$  par  $a_\epsilon$  qui est strictement  $> 0$  :



2) Schéma de Engquist - Osher :

$$u_j^{n+1} = \hat{u}_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |f'(\xi)| d\xi - \int_{u_{j-1}^n}^{u_j^n} |f'(\xi)| d\xi \right).$$

c'est un schéma conservatif donc le flux numérique est :

$$g(u, v) = \frac{1}{2} \left( f(u) + f(v) - \int_u^v |f'(\xi)| d\xi \right).$$

Dans les domaines en  $u$  où le signe de  $f'$  est constant, on retrouve le schéma upwind.

## Vj) Schémas monotones et entropiques

Definition: Un schéma explicite du type  $u_j^{n+1} = H(u_j^n)$   $j-k \leq j \leq j+k$  est dit monotone si la fonction  $H$  est croissante par rapport à chacun de ses arguments.

Proposition: Si  $u_j^{n+1} = H(u_j^n)$  est un schéma monotone alors:  
 $(u_j^n \geq v_j^n, \forall j \in \mathbb{Z}) \Rightarrow u_j^{n+1} \geq v_j^{n+1}, \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Proposition: Soit un schéma explicite, conservatif à 3 points:  
 $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))$  avec  $g$  de classe  $C^1$ .  
S'il est monotone alors  $u \mapsto g(u, v) \nearrow$  et  $v \mapsto g(u, v) \searrow$ .  
Réciproquement, si  $u \mapsto g(u, v) \nearrow$  et  $v \mapsto g(u, v) \searrow$  alors sous condition CFL, le schéma est monotone.

Preuve:  $H(u, v, w) = v - d(g(v, w) - g(u, v))$  avec  $d = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

$u \mapsto H(u, v, w)$  est  $\nearrow$  et varie comme  $u \mapsto g(u, v)$ .

$w \mapsto H(u, v, w)$  est  $\searrow$  et varie comme  $w \mapsto -g(v, w)$ .

$$\text{Enfin: } \frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w) = 1 - d \left( \frac{\partial g}{\partial 1}(v, w) - \frac{\partial g}{\partial 2}(u, v) \right)$$

$| \cdot | \leq M$  quand  $u, v, w \in \text{compact}$

Donc sous la CFL  $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{M}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial v}(u, v, w) \geq 0$ . ▣

Exemples:

Lax-Friedrichs:  $u_j^{n+1} = u_j^n - d(g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))$

avec  $g(u, v) = \frac{1}{2}(\beta(u) + \beta(v)) - \frac{1}{2d}(v - u)$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2} f'(u) + \frac{1}{2t} \geq 0 \quad \text{si } \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_{u \in K} |f'(u)|} \quad K \text{ comp.}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{2} f'(v) - \frac{1}{2t} \leq 0 \quad \text{sous la même condition.}$$

Donc Lax-Friedrichs est monotone sous condition CFL.

Lax-Wendoff: n'est pas monotone!

Contreexemple:  $\partial_t u - \partial_x u = 0$ ,  $u_j^0 = \begin{cases} 0 & j \leq 0 \\ 1 & j \geq 1 \end{cases}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{d}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{d^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad \text{stable si } 0 \leq d \leq 1.$$

$$u_{\frac{1}{2}}^1 = 1 + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{2} (1 - 2 + 0) = 1 + \frac{d}{2} (1 - d) > 1 \quad \text{si } d < 1.$$

Donc pas de principe du max donc non monotone.

Enquist-Gashar:  $g(u, v) = \frac{1}{2} (f(u) + f(v) - \int_u^v |f'(\xi)| d\xi)$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2} (f'(u) + |f'(u)|) \geq 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{2} (f'(v) - |f'(v)|) \leq 0$$

} schéma monotone.

Godunov: 2 étapes:

- 1) Résolution exacte d'un pb. de Riemann par intégrale
- 2) Moyennisation par maille.

Ces deux étapes sont monotones donc le schéma de Godunov est monotone.

En effet: 1) principe de comparaison des solutions exactes:

$$u^0 \geq v^0 \Rightarrow u(t) \geq v(t) \quad \forall t \geq 0.$$

$$2) u(x) \geq v(x) \Rightarrow \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x) dx \geq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v(x) dx.$$

## Notations :

Pour une suite discrète  $(u_j^{\wedge})_{\substack{j \geq 0 \\ j \in \mathbb{Z}}}$ , on définit :

$$u_{\Delta}(x, t) = u_j^{\wedge} \quad \text{si} \quad t^n \leq t < t^{n+1}, \quad x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}.$$

On introduit les normes et semi-normes discrètes suivantes :

$$\|u_{\Delta}(t^n, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x |u_j^{\wedge}|$$

$$\|u_{\Delta}(t^n, \cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} = \max_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{\wedge}|$$

$$TV(u_{\Delta}(t^n, \cdot)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^{\wedge} - u_j^{\wedge}|$$

## Définitions :

Un schéma est dit TVD (variation totale décroissante) si on a  $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$ ,  $u_j^{n+1} = H(u_j^n)$ .

Un schéma est dit stable  $L^{\infty}$  s'il existe  $c > 0$ , indépendant de  $n$  et de  $\Delta t$  tq  $\|u_{\Delta}(t^n, \cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq c$ .

théorème : Soit un schéma explicite conservatif et monotone. Alors il est TVD et stable  $L^{\infty}$  et il vérifie :

(i)  $\|u_{\Delta}(t, \cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \|u_{\Delta}(0, \cdot)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}$

(ii)  $\|u_{\Delta}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_{\Delta}(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$

(iii)  $TV(u_{\Delta}(t, \cdot)) \leq TV(u_{\Delta}(0, \cdot))$

(iv)  $\|u_{\Delta}(t, \cdot) - v_{\Delta}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_{\Delta}(0, \cdot) - v_{\Delta}(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$

(v) Si  $g$  est lip-continue alors :

$$\|u_{\Delta}(t^n, \cdot) - u_{\Delta}(t^m, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C |n-m| \Delta t TV(u_{\Delta}(0, \cdot))$$

$$\|u_{\Delta}(t, \cdot) - u_{\Delta}(s, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C (|t-s| + \Delta t) TV(u_{\Delta}(0, \cdot))$$



### Lemme (de Crandall - Tartar - Naja)

Soit  $(\Omega, \mu)$  un espace mesurable et  $\mathcal{E}$  un sous-espace de  $L^1(\Omega)$  tel que  $(f \text{ et } g \in \mathcal{E}) \Rightarrow \max(f, g) \in \mathcal{E}$ .

Soit  $T: \mathcal{E} \rightarrow L^1(\Omega)$  un opérateur qui vérifie :  
 $f \mapsto T(f)$

$$\int_{\Omega} T(f) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{E}.$$

Alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \forall (f, g) \in \mathcal{E}, \quad f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$$

$$(2) \quad \int_{\Omega} (T(f) - T(g))_+ d\mu \leq \int_{\Omega} (f - g)_+ d\mu$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} |T(f) - T(g)| d\mu \leq \int_{\Omega} |f - g| d\mu.$$

### Preuve

(1)  $\Rightarrow$  (2) on part de  $\max(f, g) = g + (f - g)_+ \geq g$ .

$\Rightarrow T(\max(f, g)) \geq T(g)$  et aussi  $T(\max(f, g)) \geq T(f)$ .

donc  $T(\max(f, g)) \geq \max(T(f), T(g))$ . Retrançons alors  $T(g)$ ,

$$T(\max(f, g)) - T(g) \geq \underbrace{\max(T(f), T(g)) - T(g)}_{(T(f) - T(g))_+}$$

on intègre :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (T(f) - T(g))_+ d\mu &\leq \int_{\Omega} (T(\max(f, g)) - T(g)) d\mu \\ &= \int_{\Omega} \max(f, g) - \int_{\Omega} g \quad \text{car } T \text{ conservatif} \\ &= \int_{\Omega} (f - g)_+ d\mu \quad \text{d'après (2)}. \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) On utilise  $|f-g| = (f-g)_+ + (g-f)_+$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit donc } \int_{\Omega} |T(f) - T(g)| d\mu &= \int_{\Omega} (T(f) - T(g))_+ d\mu + \int_{\Omega} (T(g) - T(f))_+ d\mu \\ &\leq \underbrace{\int_{\Omega} (f-g)_+ d\mu + \int_{\Omega} (g-f)_+ d\mu}_{= \int_{\Omega} |f-g| d\mu} \text{ d'après (3)}. \end{aligned}$$

(3)  $\Rightarrow$  (2) On utilise  $(f-g)_+ = \frac{1}{2} (|f-g| + (f-g))$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (T(f) - T(g))_+ d\mu &= \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |T(f) - T(g)| d\mu + \int_{\Omega} (T(f) - T(g)) d\mu \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega} |f-g| d\mu + \int_{\Omega} (f-g) d\mu}_{\substack{\uparrow \\ \text{par conservation}}} \\ &= \int_{\Omega} (f-g)_+ d\mu \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Supposons  $f \geq g$  i.e.  $\int_{\Omega} (g-f) d\mu = 0$ .

$$\text{donc } 0 \leq \int_{\Omega} (T(g) - T(f))_+ d\mu \leq 0 \Rightarrow T(g) \leq T(f) \quad \square$$

Par un opérateur qui conserve la mesure dans  $L^1(\nu)$ , la monotonie est équivalente au caractère contractant  $L^1$ .

Preuve du théorème :

(i) Montrons que  $\min_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 \leq u_j^1 \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

On a  $u_j^1 = H(u_j^0)$  et  $H$  monotone donc :

$$(u_j^0 \leq M, \forall j \in \mathbb{Z}) \Rightarrow u_j^1 = H(u_j^0) \leq H(M) = \pi, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

$\uparrow$   
conservatif.

De même par la borne min.

$\Rightarrow$  stabilité  $L^\infty$ .

(i) est une conséquence de (iv) avec  $v_\Delta = 0$ .

(ii) Montrons que le schéma est TVS:

$$\begin{aligned} TV(u_j^{n+1}) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x |H(u_{j+1}^n) - H(u_j^n)| \\ &= \frac{1}{\Delta x} \|H(u_{j+1}^n) - H(u_j^n)\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Par (iv) appliqué en  $t = \Delta t$ ,

$$TV(u_j^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \|u_{j+1}^n - u_j^n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^n - u_j^n| = TV(u_j^n)$$

(iv) On utilise le lemme de Crandall-Tartar-Rajda dans  $L^1(\mathbb{R})$  avec  $\mathcal{E} = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ constante par maille}\}$  et l'opérateur  $T = H^n$ .

$$\int_{\mathbb{R}} H^n(u_\Delta(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} u_\Delta(x) dx \quad \text{pour } u \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n \Delta x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 \Delta x$$

car le schéma est conservatif.

Donc  $H$  monotone  $\Rightarrow H^n$  monotone  $\Rightarrow$  contraction pour  $H^n$  dans  $L^1 \Leftrightarrow$  (iv).

$$\begin{aligned} (v) \quad \|u_\Delta(t^n, \cdot) - u_\Delta(t^m, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \sum_{p=m}^{n-1} \|u_\Delta(t^{p+1}, \cdot) - u_\Delta(t^p, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq |n-m| \|u_\Delta(\Delta t, \cdot) - u_\Delta(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (iv) \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} \|u_\Delta(\Delta t, \cdot) - u_\Delta(0, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x |H(u_j^0) - u_j^0| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta t |g_{j+\frac{1}{2}}^0 - g_{j-\frac{1}{2}}^0| \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad u_j^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{j+\frac{1}{2}}^0 - g_{j-\frac{1}{2}}^0) \qquad \qquad \qquad g(u_j^0, u_{j+1}^0) \\ &\leq c \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} (|u_j^0 - u_{j+1}^0| + |u_j^0|) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad g\text{-lip} \\ &\leq 2c \Delta t TV(u_\Delta(0, \cdot)). \end{aligned}$$

Pour  $t, s$  quelconques. Soient  $n$  et  $m$  tels que  $t_m \leq s \leq t_{m+1}$  et  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ .

Alors  $|t_n - t_m| \leq |t - s| + \Delta t$  et  $u_\Delta(t, \cdot) - u_\Delta(s, \cdot) = u_\Delta(t^n, \cdot) - u_\Delta(t^m, \cdot)$ .

D'où le résultat.  $\square$



### Définition:

Soit la condition d'entropie  $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) \leq 0$  avec  $E$  fonction convexe et  $F$  son flux d'entropie.

- Un schéma explicite du type  $u_{ij}^{n+1} = H(u_{ij}^n, u_{ij}^n, u_{ij}^n)$  est dit consistant avec cette condition d'entropie s'il existe une fonction  $\mathcal{J}(u, v)$  telle que :

(i) consistence avec le flux d'entropie :  $\mathcal{J}(u, u) = F(u), \forall u \in \mathbb{R}$

(ii) Inégalité d'entropie discrète :

$$E(u_{ij}^{n+1}) - E(u_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{J}(u_{ij}^n, u_{ij}^n) - \mathcal{J}(u_{ij-1}^n, u_{ij}^n)) \leq 0.$$

- Si le schéma est consistant avec toutes les conditions d'entropie, alors on dit qu'il est entropique.

Vocabulaire:  $\mathcal{J}(u, v)$  est appelé le flux d'entropie numérique.

### Remarque:

En pratique, on dira que le schéma est entropique s'il est consistant avec toutes les entropies de Kuznetsov. Cela sera suffisant pour les démos (cf plus loin).

Théorème: Un schéma explicite conservatif, consistant et monotone est entropique.

Preuve: (Crandall - Rajda)

Montrons la consistence avec toutes les entropies de Kuznetsov.

Soit  $E(u) = |u - b|$  et  $F(u) = \text{sgn}(u - b) (f(u) - f(b))$ .

on note  $a \vee b = \max(a, b)$  et  $a \wedge b = \min(a, b)$ .

on pose  $\mathcal{J}(u, v) = g(u \vee b, v \vee b) - g(u \wedge b, v \wedge b)$ . On vérifie les pts (i) et (ii)

$$(i) \mathcal{J}(u, u) = g(u \vee b, u \vee b) - g(u \wedge b, u \wedge b) = f(u \vee b) - f(u \wedge b)$$

$$= \text{sgn}(u - b) (f(u) - f(b)) \quad \uparrow \text{consistence du schéma}$$



(ii) Montrons d'abord que

$$(A :=) |u_j - k| - \Delta(\mathcal{J}(u_j, u_{j+h}) - \mathcal{J}(u_{j-1}, u_j)) \\ = H(u_{j-1}vk, u_jvk, u_{j+h}vk) - H(u_{j-1}k, u_jk, u_{j+h}k).$$

On a :

$$A = |u_j - k| - \Delta \left[ g(u_{j-1}vk, u_{j+h}vk) - g(u_{j-1}k, u_{j+h}k) - g(u_{j-1}vk, u_jvk) + g(u_{j-1}k, u_jk) \right] \\ = H(u_{j-1}vk, u_jvk, u_{j+h}vk) - u_jvk.$$

Donc  $A = \cancel{|u_j - k|} + H(u_{j-1}vk, u_jvk, u_{j+h}vk) - \cancel{u_jvk} - H(u_{j-1}k, u_jk, u_{j+h}k) - \cancel{u_jk}$  donc ok.

Puis :

$$|u_j^{nh} - k| - |u_j^h - k| + \Delta(\mathcal{J}(u_j^h, u_{j+h}^h) - \mathcal{J}(u_{j-1}^h, u_j^h)) \\ = |u_j^{nh} - k| - \underbrace{H(u_{j-1}^hvk, u_j^hvk, u_{j+h}^hvk)} + \underbrace{H(u_{j-1}^hk, u_j^hk, u_{j+h}^hk)}$$

$$H \text{ monotone} \Rightarrow \leq -\max(H(k, k, k), H(u_{j-1}^h, u_j^h, u_{j+h}^h)) \leq \min(H(k, k, k), H(u_{j-1}^h, u_j^h, u_{j+h}^h))$$

$$\leq |u_j^{nh} - k| - \underbrace{\max(H(\underbrace{k}_{=k}, \underbrace{u_{j-1}^h, u_j^h, u_{j+h}^h}_{=u_j^{nh}}))}_{k \vee u_j^{nh}} + \underbrace{\min(H(\underbrace{k}_{=k}, \underbrace{u_{j-1}^h, u_j^h, u_{j+h}^h}_{=u_j^{nh}}))}_{k \wedge u_j^{nh}} \\ \leq 0.$$

Conclusion :

$$|u_j^{nh} - k| - |u_j^h - k| + \frac{\Delta b}{\Delta x} (\mathcal{J}(u_j^h, u_{j+h}^h) - \mathcal{J}(u_{j-1}^h, u_j^h)) \leq 0. \quad \square$$

Exemples :

Les schémas de Godunov, Lax-Friedrichs, Engquist-Osher sont entropiques (éventuellement sous CFL).

Le schéma de Roe peut être corrigé de manière à être entropique.

Théorème de type Lax-Wendroff: consistance, lorsque le pas du maillage tend vers 0, avec la formulation faible de l'équation et des inégalités d'entropie:

On suppose que le schéma vérifie:

(i) conservatif, explicite, consistant et entropique.

(ii) Quand  $\Delta x \rightarrow 0$  avec  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  fixe, la suite de sol. discrètes  $u_\Delta$  vérifie:

$$\bullet \|u_\Delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq C$$

$$\bullet u_\Delta \rightarrow u \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \text{ et pp dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Alors la limite  $u$  est solution faible entropique de l'équation.

Preuve: la même que le th. de Lax-Wendroff. On multiplie l'inégalité d'entropie par  $\varphi_j^\Delta$ , on "intègre par parties" et on passe à la limite.

Théorème: (Convergence des schémas)

Soit un schéma explicite, conservatif, consistant et monotone (il est donc entropique). Soit  $u^0(x) \in (L^1 \cap L^\infty \cap BV)(\mathbb{R})$ .

Soit  $v^0(x) = v_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^0(x) dx$  dans chaque maille  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ .

Soit une suite de pas d'espace  $\Delta x \rightarrow 0$  avec  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  fixe et  $u_\Delta$  la suite de solutions discrètes associée.

Alors il existe une solution  $u$  faible entropique de donnée initiale  $u^0$ , telle que, par une sous-suite,  $u_\Delta \rightarrow u$  pp et dans  $L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T[; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ ,  $\forall T > 0$ .

Théorème de type Lax-Wendroff: consistance, lorsque le pas du maillage tend vers 0, avec la formulation faible de l'équation et des inégalités d'entropie:

On suppose que le schéma vérifie:

(i) conservatif, explicite, consistant et entropique.

(ii) Quand  $\Delta x \rightarrow 0$  avec  $d = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  fixe, la suite de sol. discrètes  $u_\Delta$  vérifie:

$$\bullet \|u_\Delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} \leq C$$

$$\bullet u_\Delta \rightarrow u \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \text{ et pp dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Alors la limite  $u$  est solution faible entropique de l'équation.

Preuve: la même que le th. de Lax-Wendroff. on multiplie l'inégalité d'entropie par  $\varphi_j^n$ , on "intègre par parties" et on passe à la limite.

Théorème: (Convergence des schémas)

Soit un schéma explicite, conservatif, consistant et monotone (il est donc entropique). Soit  $u^0(x) \in (L^1 \cap L^\infty \cap BV)(\mathbb{R})$ .

Soit  $v^0(x) = \sigma_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^0(x) dx$  dans chaque maille  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ .

Soit une suite de pas d'espace  $\Delta x \rightarrow 0$  avec  $d = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  fixe et  $u_\Delta$  la suite de solutions discrètes associée.

Alors il existe une solution  $u$  faible entropique de donnée initiale  $u^0$ , telle que, par une sous-suite,  $u_\Delta \rightarrow u$  pp et dans  $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ .

En particulier:  $u_\Delta \rightarrow u$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ .



Corollaire: Par le théorème d'unicité de Kruzkov, toute la suite  $u_n$  converge vers  $u$ .

Hint: utiliser le fait que dans un espace topologique quelconque  $u_n$  converge vers  $u$ ,ssi de toute sous-suite de  $u_n$ , on peut extraire une sous-suite qui converge vers  $u$ .

Preuve du théorème:

Vérifions que  $u^0 \in (L^1 \cap L^\infty \cap BV)(\mathbb{R})$ .

on a bien  $\|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  et  $\|u^0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .

De plus:

$$TV(u^0) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_{j+1}^0 - u_j^0|$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^0 dx - \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{3}{2}}} u^0 dx \right|$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u^0(x) - \hat{u}(x + \Delta x)) dx \right|$$

$$\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |u^0(x) - u^0(x + \Delta x)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{u^0(x) - u^0(x + \Delta x)}{\Delta x} \right| dx \leq TV(u^0).$$

↑  
pour  $\Delta x$  assez petit.

On peut donc appliquer le théorème sur les estimations a priori des schémas monotones:  $\exists C$  tq:

$$(*) \quad \|u_\Delta(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|u_\Delta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + TV(u_\Delta(\cdot, t)) \leq C, \forall t \geq 0.$$

Montrons que  $\forall T > 0$ ,  $\forall K$  compact de  $\mathbb{R}$ , on peut extraire une sous-suite notée  $u_\Delta$  tq  $u_\Delta \rightarrow u$  dans  $L^\infty([0, T]; L^1(K))$ .



Puis par une extraction diagonale sur  $(n \times km)_{n,m \in \mathbb{N}}$ , on pourra extraire une sous-suite  $\mu_\Delta \rightarrow \mu$  dans  $L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^+)$ ,  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ .

Soit donc  $T > 0$  et  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une famille de temps dénombrable et dense dans  $[0, T]$ .

Rappel:  $(L^1 \cap BV)(K) \xrightarrow{\text{compact}} L^1(K)$  pour tout  $K$  compact (Helly).

- Par (\*) la suite  $(\mu_\Delta(\cdot, S_1))_{\Delta > 0}$  est bornée dans  $L^1 \cap BV(K)$ .  
Donc  $\exists$  une sous-suite  $\mu_{\Delta^k}$  de  $\mu_\Delta$  tq  $\mu_{\Delta^k}(\cdot, S_1)$  dans  $L^1(K)$  vers une fonction qu'on note  $\mu(\cdot, S_1)$ . ↑  
converge
  - La suite  $(\mu_{\Delta^k}(\cdot, S_2))_{k > 0}$  est bornée dans  $L^1 \cap BV(K)$ . Donc  $\exists$  une sous-suite  $\mu_{\Delta^{k_2}}$  de  $\mu_{\Delta^k}$  tq  $\mu_{\Delta^{k_2}}(\cdot, S_2)$  converge dans  $L^1(K)$  vers  $\mu(\cdot, S_2)$ . Mais on a aussi  $\mu_{\Delta^{k_2}}(\cdot, S_1) \rightarrow \mu(\cdot, S_1)$ .
- Par extraction diagonale, on a une sous-suite  $\mu_\Delta$  tq  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_\Delta(\cdot, S_n) \rightarrow \mu(\cdot, S_n)$  dans  $L^1(K)$ .
- Montrons que  $\mu_\Delta(x, t)$  est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T], L^1(K))$ .  
Soit  $\varepsilon > 0$ . On cherche  $\Delta_0(\varepsilon)$  tq

$$\Delta, \Delta' \leq \Delta_0 \Rightarrow \|\mu_\Delta(\cdot, t) - \mu_{\Delta'}(\cdot, t)\|_{L^1(K)} \leq C\varepsilon, \forall t \in [0, T],$$

où  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ .

On partitionne  $[0, T]$  en  $N_\varepsilon$  intervalles  $(t_i, t_{i+1})$  où chaque  $t_i$  est pris dans la famille dense  $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et tels que chaque intervalle est de taille au plus  $\varepsilon$ .

Ainsi, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\exists t_i$  tq  $|t - t_i| \leq \varepsilon$ .

On écrit alors pour tout  $t \in [0, T]$ :

$$\|u_\Delta(\cdot, t) - u_{\Delta'}(\cdot, t)\|_{L^1(K)}$$

$$\begin{aligned} &\leq \underbrace{\|u_\Delta(\cdot, t) - u_\Delta(\cdot, t_i)\|_{L^1(K)}}_{\leq C(|t-t_i| + \Delta t) \text{TV}(u_0)} + \|u_\Delta(\cdot, t_i) - u_{\Delta'}(\cdot, t_i)\|_{L^1(K)} + \underbrace{\|u_{\Delta'}(\cdot, t_i) - u_{\Delta'}(\cdot, t)\|_{L^1(K)}}_{\leq C(|t-t_i| + (\Delta t)') \text{TV}(u_0)} \\ &\leq C \varepsilon \text{TV}(u) + C \Delta t \text{TV}(u_0) \qquad \leq C \varepsilon \text{TV}(u_0) + C (\Delta t)' \text{TV}(u_0) \end{aligned}$$

Or il ya un nombre fini de  $t_i : i \in \{0, N_\varepsilon\}$  et pour tout  $i$ , la suite  $u_\Delta(\cdot, t_i)$  est de Cauchy dans  $L^1(K)$  car convergente.

Donc  $\exists \Delta_0$ , indépendant de  $i \in \{0, N_\varepsilon\}$  et donc de  $t$  tq

$$\Delta, \Delta' \leq \Delta_0 \Rightarrow \|u_\Delta(\cdot, t_i) - u_{\Delta'}(\cdot, t_i)\|_{L^1(K)} \leq \varepsilon \text{TV}(u_0).$$

On prend  $\Delta_0$  tq  $\Delta t$  et  $(\Delta t)' \leq \varepsilon$  et on a :

$$\|u_\Delta(\cdot, t) - u_{\Delta'}(\cdot, t)\|_{L^1(K)} \leq 5C \text{TV}(u_0) \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc  $u_\Delta(x, t)$  est de Cauchy dans  $L^\infty([0, T], L^1(K))$ , elle est donc convergente dans  $L^\infty([0, T], L^1(K))$ .

Puis par extraction diagonale  $u_\Delta \rightarrow u$  dans  $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^1_{loc}(\mathbb{R}))$  et pp et donc aussi dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ .

On applique alors le théorème de type Lax-Wendroff pour montrer que  $u$  est forcément une solution faible entropique de l'équation.



Remarque: Ce th. donne une nouvelle preuve d'existence de solutions faibles entropiques par l'eq  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ .

On peut comparer les deux approches pour prouver l'existence:

	Approx. par problème visqueux	Approx. par un schéma
Existence de sol. au pb approché	Difficile	Facile
Estimations et compacité		Peut être + difficile
Passage à la limite dans la formulation faible	Facile	Difficile (IPP discrètes...)

Malheureusement, on a le résultat négatif suivant:

théorème: || Un schéma explicite, conservatif, consistant monotone avec  $H \in \mathcal{C}^3$  et au plus précis d'ordre 1 (sauf une exception dans le cas linéaire  $f(u) = au$ ).

Preuve:

$$u_j^{n+1} = \hat{u}_j - \Delta (g(\hat{u}_j, u_{j+1}^n) - g(\hat{u}_{j-1}, \hat{u}_j))$$

Erreur de troncature:

$$E = \frac{\Delta}{\Delta t} \left[ u(E^n, x_j) - u(E^n, x_j) + \Delta g(u(E^n, x_j), u(E^n, x_{j+1})) - \Delta g(u(E^n, x_{j-1}), u(E^n, x_j)) \right]$$

avec  $u$  fonction régulière.



$$E = \frac{1}{\Delta t} \left[ \Delta t \partial_t u + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \partial_{tt} u + o(\Delta t)^3 + \Delta g(u, u) + \Delta \partial_2 g(u, u) (\Delta x \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Delta \partial_{22} g(u, u) (\Delta x \partial_x u)^2 - \Delta g(u, u) - \Delta \partial_1 g(u, u) (-\Delta x \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} u) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Delta \partial_{11} g(u, u) (-\Delta x \partial_x u)^2 + o(\Delta x^3) \right]$$

$$E = \partial_t u + \partial_x f(u) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \partial_{tt} u + o(\Delta t^2) + o(\Delta x^2) \\ + \Delta x \left[ \frac{1}{2} \partial_{xx} u (\partial_2 g(u, u) - \partial_1 g(u, u)) + \frac{1}{2} (\Delta x u)^2 (\partial_{22} g(u, u) - \partial_{11} g(u, u)) \right] \\ = \partial_t u + \partial_x f(u) + o(\Delta t^2) + o(\Delta x^4) \\ + \frac{\Delta x}{2} \left[ \Delta \partial_{tt} u + \underbrace{(\partial_2 g(u, u) - \partial_1 g(u, u)) \partial_{xx} u + (\partial_{22} g(u, u) - \partial_{11} g(u, u)) (\Delta x)^2}_{= \partial_x (\partial_2 g(u, u) - \partial_1 g(u, u)) \partial_x u} \right]$$

Pour une solution, on a  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  et

$$\partial_{tt} u = \partial_t (-f'(u) \partial_x u) = -f'(u) \partial_x \partial_t u - \partial_x u \partial_t f'(u) \\ = -f'(u) \partial_x (-f'(u) \partial_x u) - \partial_x u f''(u) \partial_x (-f'(u) \partial_x u) \\ = \partial_x (f'(u)^2 \partial_x u).$$

Donc : pour une solution

$$E = o(\Delta t^2) + o(\Delta x^2) + \Delta x \left[ \Delta \partial_x (f'(u)^2 \partial_x u) + \partial_x (\partial_2 g(u, u) - \partial_1 g(u, u)) \partial_x u \right] \\ = o(\Delta t^4) + o(\Delta x^4) - \Delta x \partial_x (\beta(u) \partial_x u)$$

avec  $\beta(u) = \partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u) - \Delta f'(u)^2$ . Il faut montrer que  $\beta(u) \neq 0$ .

Le schéma est monotone donc :  $H(u, v, w)$

- $\frac{1}{2} - \Delta (\partial_1 g(v, w) - \partial_2 g(u, v)) \geq 0 \Rightarrow \partial_2 g(u, u) - \partial_1 g(u, u) \leq \frac{1}{\Delta}$
- $\partial_1 g(u, v) \geq 0 \Rightarrow \partial_2 g(u, u) \geq 0$
- $-\partial_2 g(v, w) \geq 0 \Rightarrow \partial_1 g(u, u) \leq 0$



on a  $|f'(u)| = |\partial_1 g(u, u) + \partial_2 g(u, u)| \leq \partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u) \leq \frac{1}{d}$   
 car  $\partial_1 g(u, u) \geq 0$  et  $\partial_2 g(u, u) \leq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \beta(u) &\geq \partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u) - d (\partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u))^2 \\ &\geq \partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u) - \frac{1}{d} (\partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Dans quel cas a-t-on  $\beta(u) \equiv 0$ ? on a utilisé deux inégalités qui doivent être des égalités :

$$|f'(u)| = \partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u) \text{ et } \partial_1 g(u, u) - \partial_2 g(u, u) = \frac{1}{d}.$$

$$\text{Donc } \left( f'(u) = \frac{1}{d}, \forall u \right) \text{ ou } \left( f'(u) = -\frac{1}{d}, \forall u \right).$$

$$\text{ie } f(u) = au \text{ et } d = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{a} \text{ ou } d = \frac{\Delta b}{\Delta a} = -\frac{1}{a}.$$

De plus comme  $|f'(u)| = \partial_1 g(u, u) + \partial_2 g(u, u)$  ou  $-(\partial_1 g(u, u) + \partial_2 g(u, u))$

on a soit  $(\partial_1 g(u, u) \equiv 0 \text{ et } \partial_2 g(u, u) \equiv -\frac{1}{d})$  soit

$$(\partial_2 g(u, u) \equiv 0 \text{ et } \partial_1 g(u, u) = +\frac{1}{d}).$$

Par exemple  $g(u, v) = f(v) = -\frac{v}{d}$  ou  $g(u, v) = f(u) = \frac{u}{d}$ .

La seule exception est une équation linéaire et un schéma adapté tel que  $\frac{1}{d} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm$  vitesse constante de l'éq.  $\square$

Remarque: La preuve peut être étendue à des schémas à  $2k+1$  points.

Pour les schémas à 3 points (et seulement ceux là) on a des résultats équivalents en remplaçant "monotone" par "TVD" ou "entropique".

## VIII) Schémas TV2 d'ordre 2:

Par conséquent, ces schémas sont non-monotones et à formule non-régulière.

Idee de base: construire un schéma d'ordre 2 là où la solution est régulière et qui devient d'ordre 1 et TVD en présence de choc.

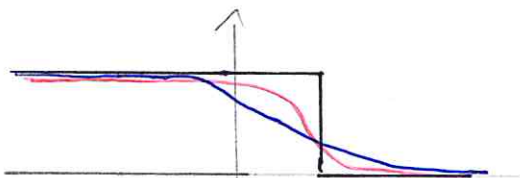
### i) Cas linéaire: notion de limiteur de flux

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad a > 0.$$

Si on simule une solution de type Riemann  $u^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

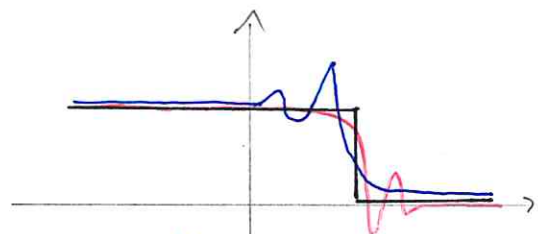
avec des schémas d'ordre 1 et 2, on observe:

ordre 1:



- Lax-Friedrichs  
- upwind

ordre 2:



- Lax-Wendroff  
- Beam-Warming

⇒ Ordre 2 plus précis là où la solution est régulière mais l'ordre 1 est plus stable près des discontinuités.

Le schéma de Lax-Wendroff est le seul schéma à 3 points d'ordre 2:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{da}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{d^2 a^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ &= u_j^n - da (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{da}{2} (da - 1) (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

upwind

On propose un schéma hybride:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda a}{2} (\lambda a - 1) \left( \varphi_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - \varphi_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \right)$$

$\uparrow$  poids à déterminer

Si  $\varphi_{j+\frac{1}{2}}^n = \varphi_{j-\frac{1}{2}}^n = 1 \implies$  Lax-Wendroff,

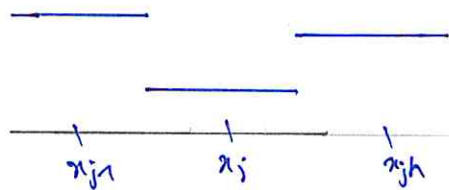
Si  $\varphi_{j+\frac{1}{2}}^n = \varphi_{j-\frac{1}{2}}^n = 0 \implies$  upwind.

on choisit  $\varphi_{j+\frac{1}{2}}^n = \varphi \left( \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} \right)$  où  $\varphi$  fonction continue

telle que :

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ 1 & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Ainsi,  $\varphi_{j+\frac{1}{2}}^n = 0$  si  $j$  est un extremum local par rapport à  $j-1$  et  $j+1$ :



Si  $u$  est régulière croissante :  $\partial_x u \geq 0$ :

$$\varphi_{j+\frac{1}{2}}^n = \varphi \left( \frac{\Delta x \partial_x u + O(\Delta x^2)}{\Delta x \partial_x u + O(\Delta x^2)} \right) = \varphi(1 + O(\Delta x)) = 1 + O(\Delta x).$$

Lemme:

Soit une fonction continue  $\varphi(r)$  telle que

$$\begin{cases} \varphi(r) = 0 & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(r) \leq \min(2, 2r) & \text{si } r \geq 0 \end{cases}$$

Alors le schéma hybride est stable  $L^\infty$  et TVD sous la condition CFL  $0 \leq \lambda a \leq 1$ .

Remarque: Cela contient le cas intéressant  $\varphi(r) = 1 \implies$  schéma d'ordre 2 là où la sol. est monotone régulière.

Preuve:

$$\text{On note } \Delta \hat{\mu}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{\mu}_{j+1} - \hat{\mu}_j.$$

$$\begin{aligned} \mu_j^{\text{th}} &= \hat{\mu}_j - \lambda a \Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\lambda b}{2} (2a-1) \left( \psi \left( \frac{\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \hat{\mu}_{j+\frac{1}{2}}} \right) \Delta \hat{\mu}_{j+\frac{1}{2}} - \psi \left( \frac{\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}} \right) \Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \hat{\mu}_j - \Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}} \left[ \lambda a + \frac{\lambda b}{2} (2a-1) \left( \frac{\psi(r_{j+\frac{1}{2}})}{r_{j+\frac{1}{2}}} - \psi(r_{j-\frac{1}{2}}) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{avec } r_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \hat{\mu}_{j+\frac{1}{2}}} \quad S_{j-\frac{1}{2}}$$

On montre que  $0 \leq S_{j-\frac{1}{2}} \leq 1$ . Alors:

$$\begin{aligned} \mu_j^{\text{th}} &= \hat{\mu}_j (1 - S_{j-\frac{1}{2}}) + \hat{\mu}_{j+\frac{1}{2}} S_{j-\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{combinaison convexe} \\ &\Rightarrow \text{principe du max discret} \\ &\Rightarrow \text{stabilité } L^\infty. \end{aligned}$$

C'est aussi TVD car:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mu_j^{\text{th}} - \mu_{j-1}^{\text{th}}| &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}_j - \Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}} S_{j-\frac{1}{2}} - \hat{\mu}_{j-1} + \Delta \hat{\mu}_{j-\frac{3}{2}} S_{j-\frac{3}{2}}| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}} (1 - S_{j-\frac{1}{2}}) + \Delta \hat{\mu}_{j-\frac{3}{2}} S_{j-\frac{3}{2}}| \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 - S_{j-\frac{1}{2}}) |\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-\frac{1}{2}} |\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}| \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta \hat{\mu}_{j-\frac{1}{2}}| = \text{TV}(\hat{\mu}). \end{aligned}$$

on a décalé les indices de 1

Montrons donc que  $0 \leq S_{j-\frac{1}{2}} \leq 1$ , pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Montrons que: } 0 \leq \lambda a + \frac{\lambda b}{2} (2a-1) \left( \frac{\psi(r)}{r} - \psi(s) \right) \leq 1$$



(i) Si  $r \leq 0$  et  $s \leq 0 \Rightarrow \varphi(r) = \varphi(s) = 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda a \leq 1$  ok CFL.

(ii) Si  $r \geq 0$  et  $s \leq 0 \Rightarrow \varphi(r) = 0$  :

$$0 \leq \lambda a + \frac{\lambda a}{2} (\lambda a - 1) \frac{\varphi(r)}{r} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + \frac{1}{2} (\lambda a - 1) \frac{\varphi(r)}{r} \quad \text{et} \quad - \frac{\lambda a}{2} \frac{\varphi(r)}{r} \leq 0$$

↑  
toujours vrai

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi(r)}{r} \leq \frac{2}{1 - \lambda a} \quad \text{vrai si} \quad \frac{\varphi(r)}{r} \leq 2 \quad (\text{ok par def. de } \varphi).$$

(iii)  $r \leq 0$  et  $s \geq 0 \Rightarrow \varphi(r) = 0$  et :

$$0 \leq \lambda a - \frac{\lambda a}{2} (\lambda a - 1) \varphi(s) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \lambda a + \frac{\lambda a}{2} (1 - \lambda a) \varphi(s) \leq 1$$

↑  
tjs vrai

⇔

$$\frac{\lambda a}{2} \varphi(s) \leq 1 \Leftrightarrow \varphi(s) \leq \frac{2}{\lambda a}$$

↑  
vrai si  $\varphi(s) \leq 2$ ,  
ok par def de  $\varphi$ .

(iv)  $r \geq 0$  et  $s \geq 0$  :

$$0 \leq \lambda a + \frac{\lambda a}{2} (1 - \lambda a) \left( \varphi(s) - \frac{\varphi(r)}{r} \right) \leq 1$$

↑

$$0 \leq \lambda a - \frac{\lambda a}{2} (1 - \lambda a) \times 2 \quad \text{et} \quad \lambda a + \frac{\lambda a}{2} (1 - \lambda a) \times 2 \leq 1$$

ie  $0 \leq \lambda a$

ie  $\lambda a \leq 1$

Exemples :

i) Le plus ancien et le plus célèbre : le min-mod :

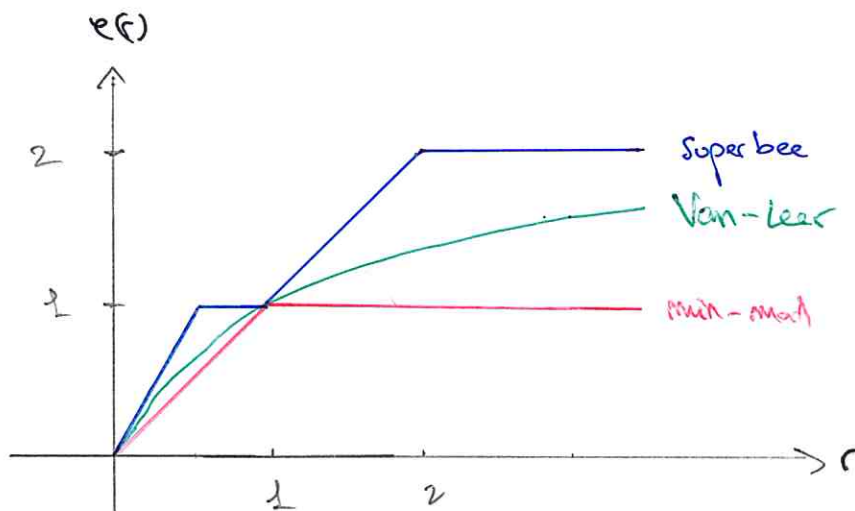
$$\varphi(r) = \max(0, \min(1, r)) = \text{minmod}(r, 1)$$

2) Limiteur superbe :  $\psi(r) = \max(0, \min(r, 2), \min(r, 2))$

3) Limiteur de Van-Leer :  $\psi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}$

4) Limiteur Ultrabee (ou Depres-Lagoutiere) : limite de stabilité :

$$\psi(r) = \min\left(\frac{2r}{1+r}, \frac{2}{1+r}\right)$$



Remarque: ce sont des schémas non-linéaires et en pratique à 5 points.  
(les schémas TVD à 3 points sont d'ordre 1 sauf si on adopte d à a).  
On peut démontrer qu'ils convergent. Ça se généralise aux équations non-linéaires.

2) Cas non-linéaire : méthode MUSCL de Van-Leer

C'est une extension à l'ordre 2 de la méthode de Godunov, où l'on remplace l'approximation constante par maille par une approximation affine par maille.

La méthode se décompose en 3 étapes.

Etape 1 : On part de  $(\hat{u}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  constante sur chaque maille  $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$  et on construit une fonction  $\tilde{u}(x, t^n)$  affine sur chaque maille :

$$\tilde{u}(x, t^n) = u_j^\wedge + \delta_j^\wedge \frac{x - x_j}{\Delta x}, \quad x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$$

$\uparrow$   
 pente.

Remarque : Comme  $x_j$  centre de  $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$  on a que  $u_j^\wedge =$  moyenne de  $\tilde{u}(x, t^n)$  sur  $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ .

Etape 2 : On résout de façon exacte (ou approchée) l'edp avec pour donnée initiale  $\tilde{u}(x, t^n)$  :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0, \\ w(x, 0) = \tilde{u}(x, t^n). \end{cases}$$

Etape 3 : Après un pas de temps  $\Delta t$ , on moyenne la solution  $w(x, \Delta t)$  de l'étape 2 pour obtenir la nouvelle donnée  $(\hat{u}_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} w(x, \Delta t) dx.$$

On reviendra plus tard sur les étapes 2 et 3.

a) Etape 1 : reconstruction affine :

On cherche à définir  $\tilde{u}(x, t^n) = u_j^\wedge + \delta_j^\wedge \frac{x - x_j}{\Delta x}$  sur chaque maille  $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ .

Idee naturelle mais naïve :  $\frac{\delta_j^\wedge}{\Delta x}$  est une approximation de  $\partial_x u$ . On peut penser à une approximation centrée :

$$\frac{\hat{\delta}_j}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j)}{\Delta x} + \frac{(\hat{u}_j - \hat{u}_{j-1})}{\Delta x} \right] \text{ ie } \hat{\delta}_j = \frac{\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_{j-1}}{2}$$

Problème: comme c'est centré, c'est instable. On observe des oscillations comme avec le schéma de Lax-Wendroff.

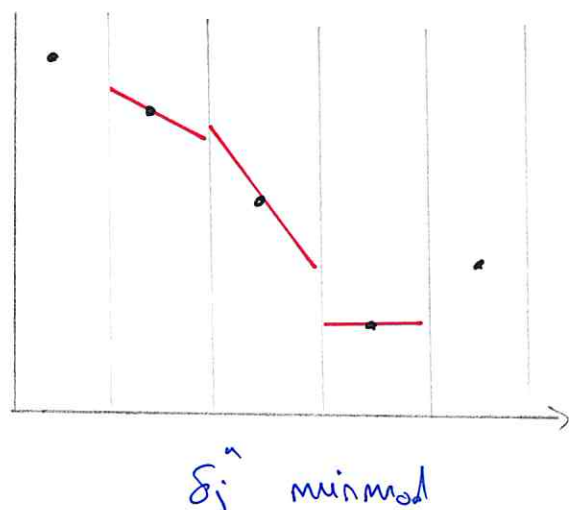
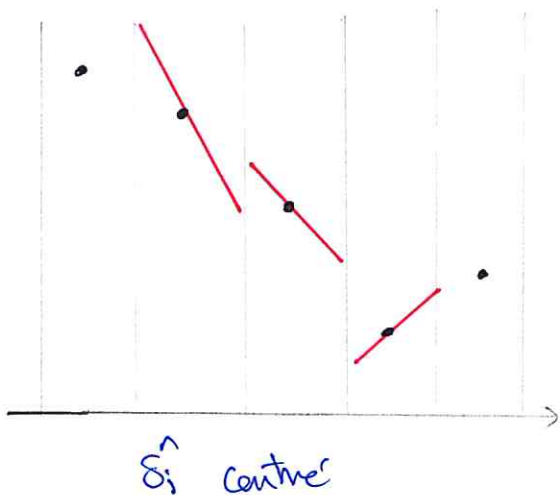
Par limiter les oscillations, on limite les pentes :

$$\hat{\delta}_j = \min \text{mod} \left( \underbrace{\Delta \hat{u}_{j+\frac{1}{2}}}_{:= \hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j}, \underbrace{\Delta \hat{u}_{j-\frac{1}{2}}}_{:= \hat{u}_j - \hat{u}_{j-1}} \right)$$

avec  $\min \text{mod}(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0, \\ \text{sign}(a) \min(|a|, |b|) & \text{si } ab \geq 0. \end{cases}$

\* Si  $(\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j)(\hat{u}_j - \hat{u}_{j-1}) \leq 0$  alors  $\hat{u}_j$  est un extremum local donc on tue cette oscillation naissante  $\Rightarrow \hat{\delta}_j = 0$  donc schéma de Godunov standard ie fonction constante par maille.

\* Sinon, la sol. discontinue et monotone et on prend la plus petite des deux pentes (en valeur absolue) à droite ou à gauche.

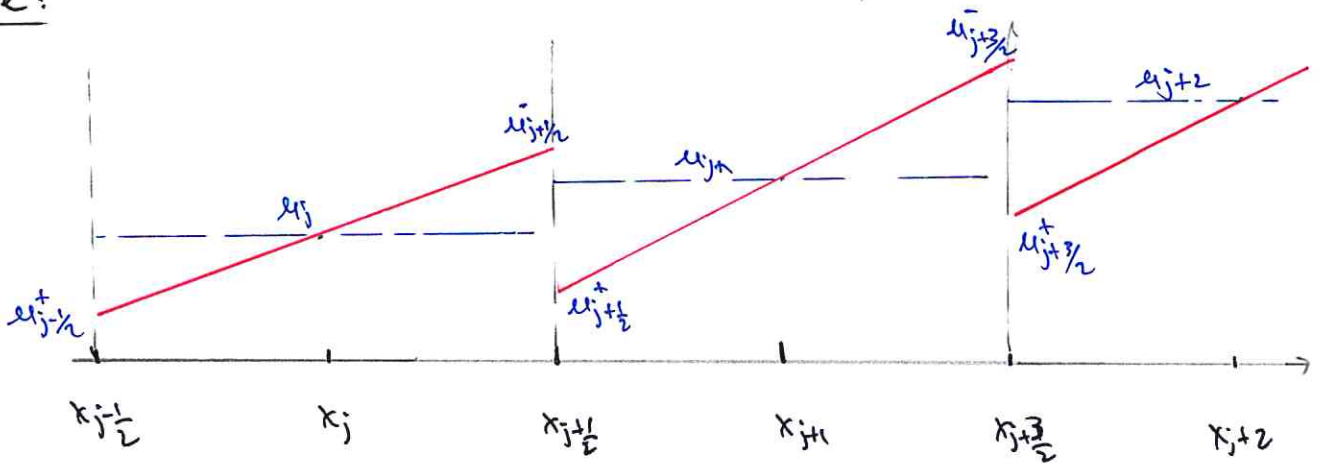




Lemme: Soit une suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . On note  $u(x)$  la fonction constante par maille  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  égale à  $u_j$  et  $\tilde{u}(x)$  la fonction  $\tilde{u}(x) = u_j + \delta_j \frac{x-x_j}{\Delta x}$  sur  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ , avec la formule minmod par  $\delta_j$ . Alors :

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \text{ et } TV(\tilde{u}) = TV(u)$$

Preuve:



On a :

$$TV(\tilde{u}) = \sum_j TV(\tilde{u}|_{(x_j, x_{j+1})}) = \sum_j |u_{j+1/2}^- - u_j| + |u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-| + |u_{j+1} - u_{j+1/2}^+|$$

1<sup>er</sup> cas:  $u_{j+2} \geq u_{j+1} \geq u_j$  (même chose si  $u_{j+2} \leq u_{j+1} \leq u_j$ ).

$\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j \geq 0$  et  $\Delta u_{j+3/2} \geq 0$ . Donc  $\delta_{j+1} = \min(\Delta u_{j+1/2}, \Delta u_{j+3/2}) \geq 0$

donc  $u_{j+1/2}^+ = u_{j+1} - \frac{1}{2} \delta_{j+1} \leq u_{j+1}$ .

Et  $u_{j+1/2}^+ \geq u_{j+1} - \frac{1}{2} \Delta u_{j+1/2} = \frac{u_{j+1} + u_j}{2}$ .

$u_{j+1/2}^- = u_j + \frac{1}{2} \delta_j$  avec  $\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta u_{j-1/2} \leq 0 \\ \min(\Delta u_{j+1/2}, \Delta u_{j-1/2}) & \text{si } \Delta u_{j-1/2} \geq 0. \end{cases}$

$$\text{Donc : } \mu_{j+\frac{1}{2}}^- = \begin{cases} \mu_j \leq \frac{\mu_j + \mu_{j+1}}{2} \leq \mu_{j+\frac{1}{2}}^+ & \text{si } \Delta \mu_{j-\frac{1}{2}} \leq 0 \\ \mu_j + \frac{1}{2} \delta_j \leq \mu_j + \frac{1}{2} \Delta \mu_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_j + \mu_{j+1}}{2} \leq \mu_{j+\frac{1}{2}}^+ & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les deux cas :  $\mu_{j+\frac{1}{2}}^- \leq \mu_{j+\frac{1}{2}}^+$ . (le dessin ci-dessous est faux).

Le même type de calcul montre que  $\mu_j \leq \mu_{j+\frac{1}{2}}^-$ .

$$\text{Au total : } \mu_j \leq \mu_{j+\frac{1}{2}}^- \leq \mu_{j+\frac{1}{2}}^+ \leq \mu_{j+1}.$$

$$\text{Dans ce cas } TV(\tilde{u}|(x_j, x_{j+1})) = \mu_{j+1} - \mu_j = TV(u|(x_j, x_{j+1})).$$

2<sup>a</sup> cas :  $\mu_{j+2} \leq \mu_{j+1} \geq \mu_j$  (même chose si  $\mu_{j+2} \geq \mu_{j+1} \leq \mu_j$ ).

$$\text{On a } (\mu_{j+2} - \mu_{j+1})(\mu_{j+1} - \mu_j) \leq 0 \Rightarrow \delta_{j+1} = 0.$$

$$\text{Comme } (\mu_{j+1} - \mu_j) \geq 0 \Rightarrow \delta_j \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \mu_{j+\frac{1}{2}}^- &= \mu_j + \frac{\delta_j}{2} \geq \mu_j \text{ et } \mu_{j+\frac{1}{2}}^- = \mu_j + \frac{\delta_j}{2} \\ &\leq \mu_j + \frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{2} = \frac{\mu_{j+1} + \mu_j}{2} \\ &\leq \mu_{j+1} = \mu_{j+\frac{1}{2}}^+. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } TV(\tilde{u}|(x_j, x_{j+1})) = \cancel{\mu_{j+\frac{1}{2}}^-} - \mu_j + \mu_{j+\frac{1}{2}}^+ - \cancel{\mu_{j+\frac{1}{2}}^-} + 0 = \mu_{j+1} - \mu_j.$$

Dans tous les cas :  $TV(\tilde{u}|_{\text{maille}}) = TV(u|_{\text{maille}})$ . (Maille décalée).

Dans le 1<sup>er</sup> cas : on voit que  $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\text{maille})} \leq \|u\|_{L^\infty(\text{maille})}$ .

Dans le 2<sup>er</sup> cas aussi. ▣

Lemme : La reconstruction de Van-Leer (en fonctions affines) est d'ordre 2 en espace en dehors des extrema de la solution.

Preuve: Soit  $u(x)$  fonction régulière. Soit  $u_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} u(x) dx$ .

Soit  $\tilde{u}(x) = u_j + \delta_j \frac{x - x_j}{\Delta x}$  avec  $\delta_j = \min \text{mod}$ .

Montrons que  $u(x) = \tilde{u}(x) + O(\Delta x^2)$ .

Taylor au point  $x_j$ :

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} \left[ u(x_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_j)(y - x_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j)(y - x_j)^2 + O((y - x_j)^3) \right] dy \\ &= u(x_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_j) \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} (y - x_j) dy}_{= 0} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j) \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} (y - x_j)^2 dy}_{= \frac{1}{24} (\Delta x)^2} + O(\Delta x^3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_j = u(x_j) + \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j) + O(\Delta x^3).$$

On se place dans les zones où  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ . Par exemple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j) > 0 &\Rightarrow \delta_j = \min(u_{j+1} - u_j, u_j - u_{j-1}) \\ &= \min\left(\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j) + O(\Delta x^2), \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j) + O(\Delta x^2)\right) \\ &= \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j) + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{u}(x) &= u(x_j) + O(\Delta x^2) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j) + O(\Delta x)\right)(x - x_j) \\ &= u(x) + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Si on est soigneux, le  $O(\Delta x^2)$  est optimal □

Etapes 2 et 3:

$$\text{On résout } \begin{cases} \partial_t w + \partial_x (f(w)) = 0, & \text{sur } (0, \Delta t) \\ w(x, 0) = \tilde{u}(x, t^n) \end{cases}$$

puis on moyenne sur  $(x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2})$  par obtenir  $u_j^{n+1}$ .

On suppose que ce pb. de Cauchy est résolu exactement et on intègre l'équation sur  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (0, \Delta t)$  :

$$0 = \int_0^{\Delta t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (\partial_t w + \partial_x f(w)) dx dt$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(x, \Delta t) dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(x, 0) dx \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(w(x_{j+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(w(x_{j-1/2}, t)) dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n) \\ \text{avec } g_{j+1/2}^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(w(x_{j+1/2}, t)) dt \end{aligned}$$

où  $w$  est la solution exacte du problème de Cauchy. Pour calculer  $w$  de façon exacte, cela revient à résoudre des problèmes de Riemann généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w) = 0 \\ w(x, 0) = \begin{cases} w_L(x) & \text{si } x < 0 \\ w_R(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

où  $w_L$  et  $w_R$  sont des fonctions non constantes.

lorsque  $f$  est linéaire, on peut résoudre le pb. de Riemann généralisé de façon explicite. Sinon, il faut en général, il faut introduire des approximations des quantités  $g_{j+1/2}^n$ .



Plusieurs méthodes existent pour approcher  $g_{j+\frac{1}{2}}^n$ . Le but étant de garder l'ordre 2 en espace et d'obtenir un ordre 2 en temps.

Méthode 1: On linéarise  $f(w)$  en le remplaçant par  $\hat{f}(w)$ , fonction linéaire par morceaux obtenue en interpolant linéairement les valeurs de  $w$  entre  $(u_j^n)$  et  $(u_{j+1}^n)$ . On résout alors de façon exacte  $\partial_t \hat{w} + \partial_x \hat{f}(\hat{w}) = 0$ .

Méthode 2: (Hancock et Van Leer)

2 demi-pas de temps :  $\rightarrow$  schéma de type centré  
 $\rightarrow$  problème de Riemann exact.

$\hookrightarrow$  schéma théoriquement d'ordre 2 en  $t$  et  $x$  mais coûteux en pratique.

Méthode 3: de Van Leer:

On fait d'abord un schéma d'ordre 2 en  $x$  et 1 en temps.  
Puis on l'améliore après coup pour être d'ordre 2 en temps.

Définition:

Soit un schéma conservatif explicite de flux numérique  $g(u, v)$ .  
On dit qu'il est d'ordre 2 en espace si  $\forall u(x)$  fonction régulière :

$$\frac{1}{\Delta x} (g(u(x), u(x+\Delta x)) - g(u(x-\Delta x), u(x))) = \partial_x f(u) + O(\Delta x^2)$$

Lemme:

Soit n'importe quel schéma explicite conservatif consistant de flux numérique  $g(u, v)$ . Alors le schéma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( g(u_{j+\frac{1}{2}}^{n-}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+}) - g(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-}, u_{j-\frac{1}{2}}^{n+}) \right)$$

$$\text{ou } u_{j+\frac{1}{2}}^{n-} = u_j^n + \frac{\delta_j^n}{2} \text{ et } u_{j+\frac{1}{2}}^{n+} = u_{j+1}^n - \frac{\delta_{j+1}^n}{2} \text{ et les}$$

$\delta_j^n = \min_{\text{mod}}$ , est d'ordre 2 en espace dans les régions où la solution est strictement monotone et régulière.

Preuve: essentiellement des développements de Taylor

Extension au 2<sup>nd</sup> ordre en temps:

On fait du Runge-Kutta à 2 pas d'ordre 2 en temps par l'EDO:

$$u_t = F(u(x)).$$

$$\text{Schéma explicite, } \begin{cases} u^{n+1/2} = u^n + \Delta t F(u^n) \\ u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + u^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2} F(u^{n+1/2}) \end{cases}$$

Lemme:

Avec les notations du précédent lemme: On considère le schéma à deux pas:

$$\begin{cases} u_j^{n+1/2} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta g(u_{j+\frac{1}{2}}^{n-}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+}) \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \Delta g(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1/2-}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1/2+}) \end{cases}$$

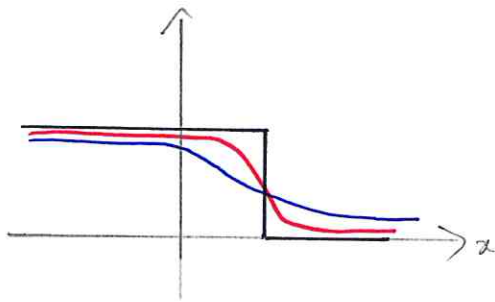
Ce schéma est du second ordre en temps et en espace.

### VIII) Comportement qualitatif des schémas numériques :

Une méthode utile pour l'étude du comportement qualitatif des schémas numériques est l'étude de l'équation modifiée.

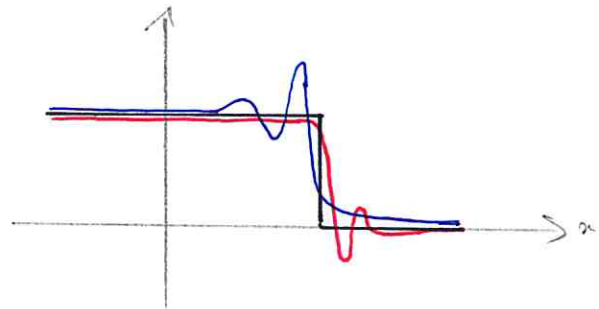
Rappel :

ordre 1 :



- Lax-Friedrichs
- upwind

ordre 2 :



- Lax-Wendroff
- Beam-Warming

Exemple de calcul de l'équation modifiée par le schéma de Lax-Friedrichs sur l'advection linéaire :

$$\partial_t u + \partial_x u = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta t} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Le calcul de l'équation modifiée est très lié au calcul de l'erreur de troncature :

Par une fonction  $u$  régulière quelque on a :

$$E(u) = \partial_t u + a \partial_x u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \partial_{xx} u + O(\Delta x^2)$$

$$\text{si } \frac{\Delta t}{\Delta x} = c = \text{cte.}$$

Donc si  $u$  est solution de  $\partial_t u + a \partial_x u = 0$  alors l'erreur commise en utilisant le schéma est  $E = O(\Delta x)$ .

Mais si  $u$  est une solution de l'EDP :

$$\partial_t u + a \partial_x u + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u - \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \partial_{xtt} u = 0, \quad (*)$$

alors l'erreur commise en utilisant le schéma de Lax-Friedrichs pour approcher les solutions de cette EDP est en  $O(\Delta x^2)$ .

Ainsi, encore plus que l'EDP d'origine, l'EDP (\*) est un meilleur candidat pour décrire le comportement des solutions discrètes du schéma de L-F.

(\*) est appelée l'EDP modifiée du schéma de Lax-Friedrichs.

On obtient une autre EDP, plus facile à analyser comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u &= \partial_t \left( -a \partial_x u - \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt} u + \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \partial_{xtt} u \right) \\ &= -a \partial_x \partial_t u - \frac{\Delta t}{2} \partial_{ttt} u + \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \partial_{xtt} \partial_t u \\ &= -a (-a \partial_{xx} u + O(\Delta x)) + O(\Delta x) \\ &= a^2 \partial_{xx} u + O(\Delta x). \end{aligned}$$

Dans (\*) on remplace  $\partial_{tt} u$  par  $a^2 \partial_{xx} u$  et on obtient :

$$\partial_t u + a \partial_x u = \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \left( 1 - \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} a^2 \right) \partial_{xtt} u$$

Soit

$$\partial_t u + a \partial_x u = \frac{\Delta x}{2 \Delta t} (1 - (a \Delta t)^2) \partial_{xtt} u$$

Par les autres schémas, on obtient les équations modifiées suivantes :



Upwind:  $\partial_t u + a \partial_x u = \frac{\Delta x}{2} a (1 - da) \partial_{xx} u$

Lax-Wendroff:  $\partial_t u + a \partial_x u = \frac{(\Delta x)^2}{6} a ((da)^2 - 1) \partial_{xxx} u$

Beam-Warming:  $\partial_t u + a \partial_x u = \frac{(\Delta x)^2}{6} a (2 - 3da + (da)^2) \partial_{xxx} u$

### 1) Méthodes d'ordre 1 et diffusion:

Les équations modifiées des schémas d'ordre 1 s'écrivent sous la forme générale:

$$\partial_t u + a \partial_x u = D \partial_{xx} u \quad (*)$$

On utilise l'analyse de Fourier pour prédire le comportement des solutions:

On décompose  $u_0(x)$  en Fourier:  $u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(\xi) e^{i\xi x} d\xi$

Par linéarité de la transformée de Fourier et de l'équation, il suffit de regarder une donnée initiale qui a un seul mode de Fourier:  $u_0(x) = e^{i\xi x}$ .

On cherche la solution de (\*) sous la forme  $u(x,t) = e^{i(\xi x - \omega t)}$ .

Alors  $\partial_t u = -i\omega u$ ,  $\partial_x u = i\xi u$ ,  $\partial_{xx} u = -\xi^2 u$ .

(\*)  $\Rightarrow \omega = a\xi + id\xi^2$  (Relation de dispersion).

Donc  $u(x,t) = e^{-d\xi^2 t} e^{i\xi(x-at)} = e^{-d\xi^2 t} u_0(x-at)$

Donc si  $d > 0$ :  $u_0$  est translatée et amortie.

Or  $d > 0$  pour l'upwind et L-F, car la condition CFL implique que  $da^2 \leq 1$ .

Comparons  $d_{L-F}$  et  $d_{\text{upwind}}$ . On suppose que  $a = 1$ .

$$\text{Prenons } \Delta x = 0,1 \text{ et } \Delta t = 0,05 \Rightarrow d = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5.$$

$$d_{L-F} = \frac{\Delta x}{2\Delta t} (1 - d^2) = \frac{0,1}{1} (1 - 0,25) = 0,075.$$

$$d_{\text{upwind}} = \frac{\Delta x}{2} (1 - d) = 0,05 (1 - 0,5) = 0,05 \times 0,5 = 0,025.$$

Donc  $d_{L-F} > d_{\text{upwind}}$ . Le schéma de L-F est plus diffusif ce qui explique que le profil est plus amorti avec les Friedrichs.

Autre remarque: On retrouve la condition CFL. Si  $d \Delta x^2 > 1$ , on a  $d < 0 \Rightarrow$  la solution est instable.

## 2) Méthodes d'ordre 2 et dispersion:

Les schémas de L-W et B-W ont tous les deux une équation modifiée de la forme:

$$\partial_t u + a \partial_x u = \mu \partial_{xxx} u.$$

Cherchons une solution de la forme  $u(x,t) = e^{i(\xi x - \omega t)}$ .

On injecte dans l'équation et on trouve:

$$\omega = \omega(\xi) = a\xi + \mu\xi^3.$$

Cette onde se propage à la vitesse  $\frac{\omega(\xi)}{\xi} = a + \mu\xi^2$ . Donc chaque onde se déplace à une vitesse différente!!

$\frac{\omega(\xi)}{\xi}$  est appelée la vitesse de phase, c'est la vitesse à laquelle les pics d'amplitude de l'onde se déplacent.

Une vitesse plus importante est la vitesse de groupe :

$$c_g(\xi) = w'(\xi) = a + 3\mu\xi^2.$$

Importance de la vitesse de groupe :

On considère un paquet d'ondes dont les fréquences sont dans un voisinage  $V$  de  $\xi_0$  :

$$u(x,t) = \int_V A(\xi) e^{i(\xi x - w(\xi)t)} d\xi.$$

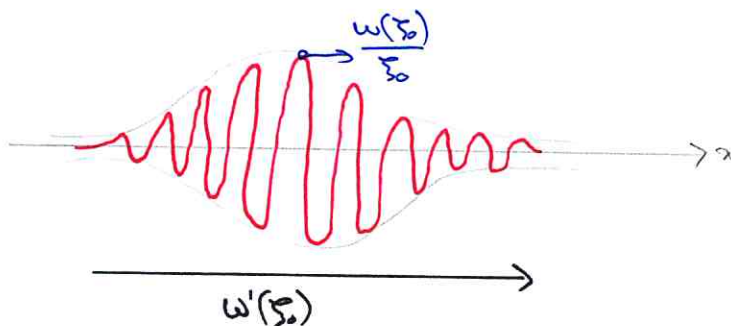
$$w(\xi) \approx w(\xi_0) + w'(\xi_0)(\xi - \xi_0) \quad \text{par } \xi \text{ proche de } \xi_0.$$

on injecte dans  $u(x,t)$  et on trouve :

$$u(x,t) \approx M(x,t) e^{i(\xi_0 x - w(\xi_0)t)} \quad \text{avec } M(x,t) = \int_V A(\xi) e^{i(x - tw'(\xi_0))(\xi - \xi_0)} d\xi.$$

$M(x,t)$  est l'enveloppe de l'onde  $\xi_0$ . Cette enveloppe est petite par  $x - tw'(\xi_0) \gg 0$  (Th. de Riemann - Lebesgue).

La vitesse de propagation de la partie importante de cette enveloppe est  $w'(\xi_0)$  la vitesse de groupe.



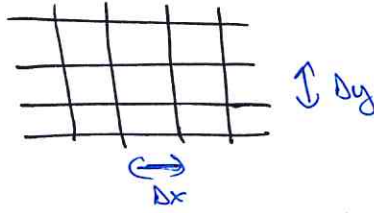
Par Lax-Wendroff on a  $\mu = \frac{1}{6}(A')^2 a (Aa)^{-1} < 0$ .

Donc  $c_g(\xi) = w'(\xi) = a + 3\mu\xi^2 < a$ . Toutes les fréquences se propagent moins rapidement que le front ce qui explique les oscillations derrière le front. Par B-W on a  $\mu > 0$  donc  $w'(\xi) > a \Rightarrow$  oscillations devant le front.

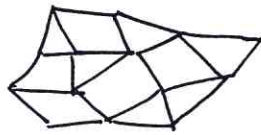
## III) Schémas numériques en dimension $d \geq 2$ :

Deux possibilités:

(i) Maillage cartésien bien adapté aux différences finies:



(ii) Maillage non structuré: bien adapté aux volumes finis



### i) Schémas sur maillages cartésiens:

$$\partial_t u + \partial_x f_1(u) + \partial_y f_2(u) = 0 \quad \tilde{u} \quad \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (f_1(u), f_2(u)) \end{cases}$$

#### 1.a) Construction directe de schéma 2D

Exemple: Lax-Friedrichs,  $\Delta x = j \Delta t$ ,  $y_R = k \Delta y$ ,  $t_n = n \Delta t$ .

$u_{j,k}^n \approx u(x_j, y_R, t^n)$  donné par:

$$\begin{aligned} u_{j,k}^n &= \frac{1}{4} (u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_1(u_{j+1,k}^n) - f_1(u_{j-1,k}^n)) \quad \left( \approx \frac{\partial f_1(u)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_R, t^n)} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta y} (f_2(u_{j,k+1}^n) - f_2(u_{j,k-1}^n)) \quad \left( \approx \frac{\partial f_2(u)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_R, t^n)} \right) \end{aligned}$$

Rappel: En 1D, Lax-Friedrichs s'écrit:

$$u_j^n = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))$$



## 1.b) Méthode de séparation d'opérateurs (ou splitting):

Explication du principe sur le cas linéaire:

$$\partial_t u + a \partial_x u + b \partial_y u = 0$$

Soit  $E = e^{\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Regardons  $u(x, t)$  régulière comme:

$$u: \mathbb{R}^+ \longrightarrow E \\ t \longmapsto u(\cdot, t)$$

On peut réécrire l'EDP comme  $\frac{du}{dt} + Au + Bu = 0$

où  $A: E \rightarrow E$  et  $B: E \rightarrow E$  sont deux opérateurs linéaires.

Si  $E$  est de dimension finie ( $A$  et  $B$  sont des matrices), alors la solution est:

$$u(t) = e^{-(A+B)t} u(0), \quad \forall t > 0.$$

Idee: on se ramène au cas 1D de la manière suivante:

On dit que  $\frac{du}{dt} + Au + Bu$  est la "somme" de

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d\tilde{u}}{dt} + A\tilde{u} = 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \frac{d\tilde{u}}{dt} + B\tilde{u} = 0 & (2) \end{cases}$$

On résout (1) sur un pas de temps  $\frac{\Delta t}{2}$  puis (2) sur un pas de temps  $\frac{\Delta t}{2}$  et on itère.

$$\tilde{u}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = e^{-2A \frac{\Delta t}{2}} u(0) \quad \text{puis} \quad \tilde{u}(\Delta t) = e^{-2B \frac{\Delta t}{2}} \tilde{u}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = e^{-B\Delta t} e^{-A\Delta t} u(0).$$

Evidemment on  $\tilde{u}(\Delta t) \neq u(\Delta t)$  car  $e^{-B\Delta t} e^{-A\Delta t} \neq e^{-(A+B)\Delta t}$ .

$$\text{En itérant: } \tilde{u}(n\Delta t) = \left( e^{-B\Delta t} e^{-A\Delta t} \right)^n u(0).$$

$$\text{Et } u(n\Delta t) = e^{-(A+B)n\Delta t} u(0).$$

On est donc en train d'approcher  $e^{-(A+B)n\Delta t}$  par  $\left( e^{-B\Delta t} e^{-A\Delta t} \right)^n$ .

On peut mg (Formule de Trotter-Kato):

$$\left( e^{-B\Delta t} e^{-A\Delta t} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty, \Delta t \rightarrow 0 \text{ et } n\Delta t = T} e^{-(A+B)T}$$

Retour à l'EDP:

On remplace  $\partial_t u + \partial_x f_1(u) + \partial_y f_2(u)$  par 2 eq. successives:

$$\frac{1}{2} \partial_t u + \partial_x f_1(u) = 0 \quad \text{schéma } H_{\frac{\Delta t}{2}}^1$$

$$\frac{1}{2} \partial_t u + \partial_y f_2(u) = 0 \quad \text{schéma } H_{\frac{\Delta t}{2}}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{j,k}^{n+1/2} = H_{\frac{\Delta t}{2}}^1 (u_{j',k}^n) \quad j' = j-1 \dots j+1 \\ u_{j,k}^{n+1} = H_{\frac{\Delta t}{2}}^2 (u_{j,k'}^{n+1/2}) \quad k' = k-1 \dots k+1 \end{cases}$$

Autre présentation équivalente:

On change les 2 équations:

$$\partial_t u + \partial_x f_1(u) = 0$$

schéma  $H_{\Delta t}^1$

$$\partial_t u + \partial_y f_2(u) = 0$$

schéma  $H_{\Delta t}^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{j,k}^{n+1/2} = H_{\Delta t}^1 (u_{j',k}^n) \quad j' = j-1 \dots j+1 \\ u_{j,k}^{n+1} = H_{\Delta t}^2 (u_{j,k'}^{n+1/2}) \quad k' = k-1 \dots k+1 \end{cases}$$

Exercice: Vérifiez que le schéma 2D est consistant si les schémas 1D le sont.

En général ce type de schéma 2D est d'ordre 1, même si les schémas 1D sont d'ordre élevé.

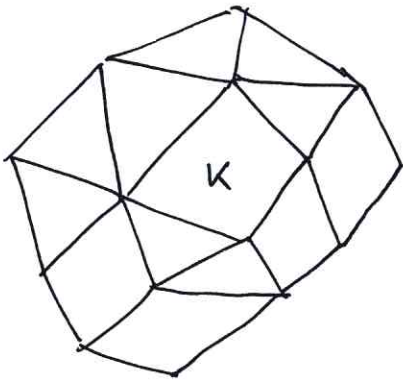
On montre aussi que si les schémas 1D sont conservatifs alors le schéma 2D l'est aussi. Idem pour stable, TVD, monotone, entropique  $\Rightarrow$  même théorie de convergence.

Remarque: En dimension  $d$ , les conditions CFL sont plus strictes.

Par exemple dans le cas linéaire en 3D, l'analyse de Fourier donne

une CFL: 
$$\frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta y} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1.$$

2) Volumes finis sur maillages non-structurés:

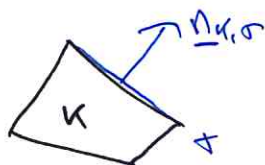


$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)) = 0$$

On intègre l'équation sur  $K \times (t^n, t^{n+1})$ :

$$\int_K u(t^{n+1}, \underline{x}) d\underline{x} - \int_K u(t^n, \underline{x}) d\underline{x} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \operatorname{div}(f(u)) d\underline{x} = 0$$

Or par Green: 
$$\int_K \operatorname{div}(f(u)) d\underline{x} = \int_{\partial K} f(u(t, \underline{x})) \underline{n}(\underline{x}) d\sigma(\underline{x})$$



$$= \sum_{\sigma \in \text{face de } K} \int_{\sigma} f(u(t, \underline{x})) \underline{n}_{K, \sigma} d\sigma(\underline{x})$$

Si on prend  $u_K^n \approx \frac{1}{m(K)} \int_K u(t^n, \underline{x}) d\underline{x}$  et on note

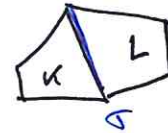
$g_{\sigma, K}$  une approximation de 
$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} f(u(t, \underline{x})) \underline{n}_{K, \sigma} d\sigma(\underline{x})$$

On obtient le schéma suivant:

$$u_k^{n+1} = \hat{u}_k^n - \frac{\Delta t}{m(k)} \sum_{\sigma \in \text{face de } k} g_{\sigma, k} m(\sigma)$$

Exemples de choix de  $g_{\sigma, k}$ :

1) Godunov:  $g_{\sigma, k} = g(\hat{u}_k, \hat{u}_L)$  où  $g$  est le flux de Godunov et  $\sigma$  la face entre  $k$  et  $L$ :



$$2) g_{\sigma, k} = \frac{f(\hat{u}_k) + f(\hat{u}_L)}{2} + a_{k,L} \frac{\hat{u}_L - \hat{u}_k}{2}$$

avec  $a_{k,L} \geq \max \|f'(u)\|$ .

Remarque: Sur maillages non-structurés, on n'a plus d'estimations a priori de type BV sur les suites de solutions discrètes.