

Contributions
à l'analyse mathématique et numérique
pour les écoulements mono et multiphasiques
compressibles et incompressibles



Khaled Saleh

Habilitation à diriger des recherches

Université Claude Bernard Lyon 1
Spécialité : **Mathématiques**

Contributions
à l'analyse mathématique et numérique
pour les écoulements mono et multiphasiques
compressibles et incompressibles

Habilitation à diriger des recherches

Soutenue publiquement le 7 mars 2024 par

Khaled Saleh

devant le Jury composé de :

M. Didier Bresch	CNRS, Université Savoie Mont-Blanc	Rapporteur
Mme. Claire Chainais-Hillairet	Université de Lille	Rapporteuse
M. Christophe Chalons	Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines	Rapporteur
M. Jean-Marc Hérard	Électricité de France R&D	
Mme. Raphaèle Herbin	Université d'Aix-Marseille	
M. Matthieu Hillairet	Université de Montpellier	
M. Frédéric Lagoutière	Université Claude Bernard Lyon 1	
M. Jean-Claude Latché	Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire	

Table des matières

Table des matières	4
Remerciements	5
Résumé	7
Liste des publications	9
Publications dans des revues	9
Preprints	10
Actes de congrès	10
Introduction	11
I Modélisation, analyse et simulation numériques pour les écoulements multiphasiques compressibles	19
1 Modèles bifluïdes moyennés	21
1.1 Moyennisation statistique d'un écoulement diphasique	22
1.2 Le modèle bifluïde de Baer-Nunziato	26
2 Modèles multifuïdes moyennés	29
2.1 Le modèle multifuïde à N phases et ses propriétés	30
2.2 Le modèle multifuïde à N phases barotrope	35
3 Schémas de relaxation à la Suliciu	39
3.1 Rappels sur le schéma de Godunov	40
3.2 Schéma de relaxation à la Suliciu pour les équations d'Euler	43
3.3 Schémas de relaxation à la Suliciu pour les modèles multiphasiques	52
3.4 Extension à un modèle multifuïde avec champs miscibles	69
3.5 Extension multidimensionnelle du schéma de relaxation	73
Bibliographie de la Partie I	79
II Méthodes numériques pour la transition compressible-incompressible	83
4 La limite incompressible	85
4.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles barotropes	85
4.2 La limite incompressible pour les solutions faibles	87
4.3 La limite incompressible pour les schémas numériques	92

5	Discrétisation sur grilles décalées	97
5.1	Maillages et inconnues discrètes	98
5.2	Discrétisation spatiale	100
5.3	Discrétisations temporelles	105
6	La limite incompressible pour les schémas décalés	115
6.1	Schémas préservant l'asymptotique bas Mach	116
6.2	Schémas numériques pour les modèles de congestion	123
7	Convergence de schémas sur grilles décalées	133
7.1	Analyse fonctionnelle discrète	134
7.2	Navier-Stokes compressibles stationnaires	139
7.3	Navier-Stokes incompressible	144
	Bibliographie de la Partie II	149

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Didier Bresch, Claire Chainais-Hillairet et Christophe Chalons, d'avoir pris le temps de lire et d'écrire un rapport sur ce mémoire. Merci pour vos remarques et commentaires qui sont pour moi un motif de fierté et une motivation pour la poursuite de mes travaux de recherche.

Je remercie Jean-Marc Hérard, Raphaële Herbin, Matthieu Hillairet, Frédéric Lagoutière et Jean-Claude Latché d'avoir accepté de faire partie du mon jury d'HDR. Un grand merci à Jean-Marc qui a relu (plusieurs fois!) ce mémoire et grâce à qui j'ai pu y apporter de nombreuses améliorations.

Les travaux qui sont décrits dans ce mémoire sont tous, sans exception, le fruit de collaborations heureuses avec des mathématiciennes et des mathématiciens auprès de qui j'ai énormément appris, scientifiquement grandi, et avec qui j'espère continuer de collaborer pendant encore de nombreuses années. Merci à vous tous!

Je souhaite remercier également, tous les membres de l'Institut Camille Jordan ainsi que du département de mathématiques de l'Université Lyon 1 : enseignantes et enseignants, chercheuses et chercheurs, ingénieurs, et tous les membres de l'équipe de gestion. Toutes ces personnes grâce à qui je travaille dans un environnement extrêmement stimulant et qui font que le métier que j'exerce, malgré une évolution qui n'est pas toujours positive, reste pour moi une source de motivation et de joie quotidiennes.

Un grand merci à mes proches : ma sœur Ghadah, mes frères Nouredine et Nassim et surtout à mes parents. Je mesure chaque jour les énormes sacrifices qu'ils ont faits en quittant leur pays et leurs proches, pour assurer un avenir meilleur à leurs enfants. Que Dieu vous garde à nos côtés.

Enfin, je souhaite dédier ce travail aux deux personnes sans qui tout ceci n'aurait aucun sens : ma fille Alya, et mon épouse Haïfa, que j'aime d'un amour non mesurable. Et dire à Haïfa que ses accomplissements de ces dernières années me rendent extrêmement fier et admiratif, et qu'ils sont pour moi une source d'inspiration.

Résumé

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est consacré à l'étude mathématique et au développement et à l'analyse de schémas numériques pour des modèles d'écoulements mono et multiphasiques, compressibles et incompressibles. Le mémoire est composé de deux parties. La première partie est consacrée à l'étude des propriétés mathématiques ainsi qu'au développement et à l'analyse de schémas numériques pour des modèles multiphasiques compressibles. Ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type Euler compressibles permettant de modéliser des écoulements mettant en jeu un nombre arbitraire d'espèces qui se trouvent dans différents états de la matière (gazeux, liquide, solide) ou des espèces qui sont dans le même état mais qui ont des propriétés chimiques différentes (mélanges liquide-liquide non miscibles par exemple). Après avoir introduit les enjeux liés à la modélisation de ces écoulements et les principes de développement des modèles considérés, qui sont des modèles moyennés de type Baer-Nunziato, nous présentons les principales propriétés des modèles (hyperbolicité, existence d'entropies mathématiques, symétrisabilité), puis nous développons un schéma de relaxation à la Suliciu pour la partie convective des modèles, schéma qui s'avère bien plus précis et robuste que les schémas numériques pré-existants. La deuxième partie est consacrée au développement de schémas numériques permettant de traiter aussi bien des écoulements monophasiques compressibles qu'incompressibles. Dans un premier temps, nous présentons les principales difficultés liées à l'approximation numérique des écoulements faiblement compressibles, puis nous présentons une classe de schémas numériques pour les modèles compressibles (Navier-Stokes et Euler compressibles) qui restent stables et précis dans la limite incompressible. Les schémas considérés s'appuient sur une discrétisation spatiale sur grilles décalées (les inconnues scalaires sont discrétisées aux centres des mailles et les vitesses sont discrétisées aux faces) et sur une discrétisation temporelle semi-implicite de type prédiction-correction de pression. Nous présentons des résultats assurant le caractère *asymptotic preserving* dans la limite incompressible ainsi que des résultats de convergence de la solution numérique vers la solution exacte pour les modèles de Navier-Stokes compressibles et incompressibles dans la limite de pas de discrétisation qui tendent vers zéro.

Liste des publications

Publications dans des revues

- 1 C. BERTHON, M.J. CASTRO DIAZ, A. DURAN, T. MORALES DE LUNA et K. SALEH. « Artificial Viscosity to Get Both Robustness and Discrete Entropy Inequalities ». In : *J. Sci. Comput.* 97.65 (2023).
- 2 C. BERTHON, A. DURAN, F. FOUCHER, K. SALEH et J. de D. ZABSONRÉ. « Improvement of the hydrostatic reconstruction scheme to get fully discrete entropy inequalities ». In : *Journal of Scientific Computing* 80.2 (2019), p. 924-956.
- 3 A.-C. BOULANGER, C. CANCÈS, H. MATHIS, K. SALEH et N. SEGUIN. « OSAMOAL : optimized simulations by adapted models using asymptotic limits ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 38 (2012), p. 183-201.
- 4 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD et K. SALEH. « A splitting method for the isentropic Baer-Nunziato two-phase flow model ». In : *ESAIM : Proceedings* 38 (2012), p. 241-256.
- 5 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « A Robust Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Isentropic Baer-Nunziato Model ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48.1 (2014). 42 pages, p. 165-206.
- 6 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 12.3 (2014).
- 7 F. COQUEL, HÉRARD, J.-M. et K. SALEH. « A Positive and Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Baer-Nunziato Model ». In : *Journal of Computational Physics* 330 (2017), p. 401-435.
- 8 F. COQUEL, K. SALEH et N. SEGUIN. « A Robust and Entropy-Satisfying Numerical Scheme for Fluid Flows in Discontinuous Nozzles ». In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 24.10 (2014). 39 pages, p. 2043-2083.
- 9 R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « Low Mach number limit of some staggered schemes for compressible barotropic flows ». In : *Mathematics of Computation* 90.329 (2021), p. 1039-1087.
- 10 J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « A Convergent Staggered Scheme for the Variable Density Incompressible Navier-Stokes Equations ». In : *Mathematics of Computation* 87.310 (2017), p. 581-632.
- 11 C. PERRIN et K. SALEH. « A convergent FV-FE scheme for the stationary compressible Navier-Stokes equations ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 41.2 (2021), p. 826-899.
- 12 C. PERRIN et K. SALEH. « Numerical staggered schemes for the free-congested Navier-Stokes equations ». In : *SIAM J. Numer. Anal.* 60.4 (2022), p. 1824-1852.
- 13 K. SALEH. « A relaxation scheme for a hyperbolic multiphase flow model - Part I : Barotropic EOS ». In : *ESAIM : M2AN* 53.5 (2019), p. 1763-1795.
- 14 K. SALEH et N. SEGUIN. « Some mathematical properties of a barotropic multiphase flow model ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 69 (2020), p. 70-78.

Preprints

- 15 J.-C. LATCHÉ, B. PIAR et K. SALEH. « A discrete kinetic energy preserving convection operator for variable density flows on locally refined staggered meshes ». working paper or preprint. 2019.

Actes de congrès

- 16 F. BABIK, J.-C. LATCHÉ, B. PIAR et K. SALEH. « A staggered scheme with non-conforming refinement for the Navier-Stokes equations ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects : FVCA 7, Berlin, June 2014*. Springer, 2014, p. 87-95.
- 17 C. BERTHON, A. DURAN et K. SALEH. « An easy control of the artificial numerical viscosity to get discrete entropy inequalities when approximating hyperbolic systems of conservation laws ». In : *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing : Godunov's Legacy : A Liber Amicorum to Professor Godunov (2020)*, p. 29-36.
- 18 J. BUSSAC et K. SALEH. « Numerical Simulation of a Barotropic Two-Phase Flow Model with Miscible Phases ». In : *Finite Volumes for Complex Applications X—Volume 2, Hyperbolic and Related Problems*. Cham : Springer Nature Switzerland, 2023, p. 63-71.
- 19 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « A class of two-fluid two-phase flow models ». In : *42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 2012, p. 3356.
- 20 F. COQUEL, K. SALEH et N. SEGUIN. « A Relaxation Approach for Simulating Fluid Flows in a Nozzle ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives : FVCA 6, International Symposium, Prague, June 6-10, 2011*. Springer. 2011, p. 273-281.
- 21 A. EL HALABI, P. FERNIER, T. GALIÉ, S. KOKH et K. SALEH. « Study of a Numerical Scheme with Transport-Acoustic Operator Splitting on a Staggered Mesh ». In : *Finite Volumes for Complex Applications X—Volume 2, Hyperbolic and Related Problems*. Cham : Springer Nature Switzerland, 2023, p. 121-129.
- 22 J.-M. HÉRARD, O. HURISSE, A. MORENTE et K. SALEH. « Application of a two-fluid model to simulate the heating of two-phase flows ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VII-Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems : FVCA 7, Berlin, June 2014*. Springer, 2014, p. 857-864.
- 23 R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « Low Mach number limit of a pressure correction MAC scheme for compressible barotropic flows ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII-Methods and Theoretical Aspects : FVCA 8, Lille, France, June 2017* 8. Springer. 2017, p. 255-263.

Introduction

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est l'occasion pour moi de faire le point sur les quatorze années de recherche en mathématiques appliquées qui se sont écoulées depuis le début de ma thèse en octobre 2009 chez EDF R&D. Mes activités de recherche concernent les mathématiques appliquées à la mécanique des fluides compressibles et incompressibles. Je me suis intéressé aussi bien à la modélisation et à l'analyse de modèles permettant de décrire ces écoulements de fluides, qu'au développement, à l'analyse mathématique et à la mise en œuvre de méthodes numériques permettant de simuler ces types d'écoulements.

Une première thématique importante de mes travaux de recherche est la modélisation et la simulation numérique de mélanges multiphasiques compressibles. Ce sont des écoulements mettant en jeu des espèces qui se trouvent dans différents états de la matière (gazeux, liquide, solide). Si la principale application visée par mes recherches est l'étude des écoulements dans les circuits des centrales nucléaires destinées à la production électrique française (en particulier dans des configurations accidentelles), les modèles considérés et les schémas numériques développés peuvent être mobilisés dans d'autres contextes (transports d'hydrocarbures, volcanologie, *etc.*). Cette thématique de recherche fait l'objet de la Partie I de ce mémoire.

Une autre thématique de recherche sur laquelle je travaille depuis mon post-doctorat à l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN) est l'élaboration et l'analyse de méthodes d'approximations numériques permettant de simuler aussi bien des écoulements incompressibles que des écoulements compressibles. En effet, des transitions entre ces types d'écoulements peuvent apparaître lors de configurations accidentelles (incendies, explosions..) et il est alors important de disposer de méthodes permettant de faire des simulations dans ces deux régimes très différents. Cette thématique fait l'objet de la Partie II de ce mémoire.

L'objectif de cette introduction est de fournir une vue d'ensemble du contenu du mémoire.

Partie I : Modélisation, analyse et simulation numériques pour les écoulements multiphasiques compressibles

Les écoulements multiphasiques compressibles sont des écoulements mettant en jeu des espèces qui se trouvent dans différents états de la matière (gazeux, liquide, solide) ou des espèces qui sont dans le même état mais qui ont des propriétés chimiques différentes (mélanges liquide-liquide non miscibles par exemple).

Les applications visées dans l'industrie nucléaire concernent non seulement le fonctionnement nominal mais aussi et surtout les configurations accidentelles. On peut par exemple citer la *crise d'ébullition* : il s'agit d'un accident hypothétique où, suite à l'augmentation du flux thermique issu des crayons de combustible nucléaire ou à une diminution du débit ou de la pression du fluide caloporteur du circuit primaire, un film de vapeur peut se former à la surface externe de la gaine de combustible refroidie par le caloporteur, ce qui provoque une réduction brutale de l'échange thermique et, en conséquence, une augmentation rapide de la température de la gaine pouvant conduire à son endommagement. La compréhension d'un tel phénomène nécessite des modèles d'écoulements diphasique dont au moins l'une des phases (la vapeur) est compressible. On peut également citer le phénomène de l'*explosion de vapeur* : suite à un défaut d'évacuation de chaleur dans le cœur du réacteur, celui-ci peut entrer en fusion créant un magma métallique appelé corium. Le contact des particules de corium

avec l'eau (liquide) provoque alors une évaporation violente, la naissance d'ondes de choc et de détente qui pourraient endommager la structure du réacteur. La compréhension d'un tel phénomène nécessite des modèles d'écoulements faisant intervenir au moins trois phases (solide ou liquide pour le corium, liquide et gazeuse pour l'eau).

Il existe plusieurs manières de modéliser mathématiquement des écoulements multiphasiques compressibles. Une approche naturelle serait de faire une *description microscopique* de l'écoulement : si une zone de l'écoulement est occupée par la phase k , supposée compressible, alors l'écoulement est localement régi par les équations d'Euler ou de Navier-Stokes compressibles avec les données physiques de la phase k . Il reste alors à modéliser les échanges thermodynamiques et les échanges éventuels de masse aux interfaces entre les phases. Une telle approche est impossible à mettre en œuvre en pratique tant du point de vue de la modélisation, en raison de la diversité et de la complexité des écoulements que du point de vue de la simulation numérique qui nécessiterait un coût de calcul bien trop important.

Dans le but d'obtenir des modèles susceptibles d'être approchés numériquement, il apparaît donc nécessaire de simplifier la description locale instantanée. Une approche couramment utilisée consiste à appliquer des opérateurs de moyenne sur des écoulements mettant en jeu plusieurs phases, régies chacune par les équations de Navier Stokes monophasiques. On obtient alors des modèles de milieux continus où les inconnues sont des quantités phasiques moyennées, pondérées par le taux de présence statistique de chaque phase.

L'un des modèles développé récemment ([29, 30]) pour les écoulements composés de N phases compressibles non miscibles (et non visqueuses) est une généralisation du modèle bifluide de Baer-Nunziato [5]. Le modèle est composé de N systèmes de type Euler compressibles couplés par des termes non conservatifs et des termes sources d'échanges thermodynamiques entre les phases. Il est donné pour $k = 1, \dots, N$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$ par :

$$\partial_t \alpha_k + \mathbf{V}_I(U) \cdot \nabla \alpha_k = \Phi_k(U), \quad (1a)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = \Gamma_k(U), \quad (1b)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (\alpha_k p_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(U) \nabla \alpha_l = \mathbf{D}_k(U), \quad (1c)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k E_k \mathbf{u}_k + \alpha_k p_k \mathbf{u}_k) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(U) \partial_t \alpha_l = \Psi_k(U). \quad (1d)$$

La quantité $\alpha_k(t, \mathbf{x})$ est le taux de présence statistique de la phase k . C'est la probabilité de trouver la phase k au temps t dans un volume élémentaire autour du point \mathbf{x} . Ces taux de présence statistiques sont liées par la relation de saturation suivante :

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1. \quad (2)$$

Les quantités $\rho_k(t, \mathbf{x})$, $E_k(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ sont respectivement la masse volumique, l'énergie totale et la vitesse moyennes de la phase k (pour $k = 1, \dots, N$). Les pressions p_k sont les pressions phasiques. Elles sont données par des lois d'état thermodynamiques en fonction des quantités phasiques $(\rho_k, \mathbf{u}_k, E_k)$. On note $U = (\alpha_k, \alpha_k \rho_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k, \alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k E_k)_{k=1, \dots, N}$ le vecteur des inconnues conservatives de ce système. Les quantités

$$\mathbf{V}_I(U), \quad (P_{kl}(U))_{1 \leq k \neq l \leq N},$$

sont appelées la vitesse et les pressions interfaciales. Elles sont déterminées à partir des inconnues physiques U par des lois de fermeture algébriques, tout comme les quantités

$$\Phi_k(U), \quad \Gamma_k(U), \quad \mathbf{D}_k(U), \quad \Psi_k(U),$$

qui sont des termes sources qui modélisent la dilatation des phases ainsi que les échanges de masse, de quantité de mouvement (par exemple par frottement) et d'énergie entre les phases. Ces termes ont notamment un effet de relaxation vers un équilibre thermodynamique entre les phases caractérisé par l'égalité des pressions, vitesses, potentiels chimiques et températures de toutes les phases.

Le chapitre 1 est principalement dédié à la dérivation du modèle bifluide de Baer-Nunziato (qui est le modèle (1) pour $N = 2$) à partir de la méthode de moyennisation statistique.

Dans le chapitre 2 on donne les principales propriétés de la partie convective du modèle (1) (c'est-à-dire le système correspondant à des termes sources nuls) à savoir :

1. L'invariance Galiléenne et l'invariance par rotation du système.
2. La faible hyperbolicité du système c'est-à-dire son hyperbolicité en dehors d'une zone dite de résonance caractérisée par l'égalité entre la vitesse interfaciale $\mathbf{V}_I(U)$ et les vitesses acoustiques des phases. On montre également que pour certaines lois de fermeture sur la vitesse interfaciale, l'onde associée au transport des taux de présence statistique (voir l'équation (1a)) est linéairement dégénérée. Cette propriété permet de donner un sens aux produits non conservatifs dans le cadre des solutions faibles. Les discontinuités de taux de présence sont alors définies grâce à des invariants de Riemann. Par ailleurs, c'est une propriété naturelle puisque dans le cas diphasique ($N = 2$) par exemple, on s'attend à ce qu'une discontinuité initiale entre deux valeurs $\alpha_{1,L} \approx 0$ et $\alpha_{1,R} \approx 1$, qui traduit une interface entre deux zones quasi-monophasiques, soit préservée et non épaissie au cours du temps.
3. Pour certaines lois de fermeture sur la vitesse et les pressions interfaciales, l'existence de lois de conservation vérifiées par les solutions régulières (de la partie convective) du modèle (1) pour des entropies mathématiques naturelles qui sont des fonctions convexes du vecteur U des inconnues physiques. Cette propriété permet de sélectionner les solutions faibles admissibles et fournit un critère de stabilité (non linéaire) pour les schémas numériques.
4. La symétrisabilité du système en dehors de la zone de résonance. On en déduit que le problème de Cauchy pour le système (1) est bien posé pour les solutions régulières au moins localement en temps, pour des données petites et éloignées de la zone de résonance.

Le chapitre 3 est dédié au développement d'un schéma numérique de relaxation à la *Suliciu* pour la partie convective du modèle (1). Contrairement aux modèles diphasiques ou monophasiques, il existe très peu de schémas numériques permettant des approximations stables et précises des modèles multifluides à plus de trois phases tels que (1). Les seuls schémas existants sont des généralisations du schéma de Rusanov [6, 7].

Les applications visées, notamment dans l'industrie nucléaire civile, font intervenir des écoulements fortement instationnaires et mettant en jeu des échelles de temps très différentes. Il est donc nécessaire de disposer de méthodes numériques extrêmement stables et robustes. En particulier, il est important de développer des méthodes assurant la positivité des masses volumiques et des énergies internes (ou de manière équivalente des masses volumiques et des températures) et pour lesquelles il est possible de démontrer des inégalités d'entropie discrètes. Un schéma numérique disposant de ces propriétés est le schéma de Godunov qui s'appuie sur un solveur exact pour le problème de Riemann. Malheureusement, en raison de la présence de champs non linéaires et du fort couplage entre les phases occasionné par les termes non conservatifs, la résolution exacte du problème de Riemann reste à ce jour un problème ouvert, et ce même dans le cas bifluide $N = 2$.

L'idée des schémas de relaxation est la construction d'un solveur de Riemann approché grâce à la technique d'approximation par relaxation dite à la *Suliciu*. Il s'agit de construire un solveur de Riemann exact pour un système approché obtenu en relaxant les non linéarités des lois de pression. Le système relaxé obtenu est un système, certes plus grand, mais dont les champs sont tous linéairement dégénérés, ce qui rend la résolution du problème de Riemann compliquée mais possible. On en déduit alors un schéma de volumes finis défini par un solveur de Riemann approché (on parle de méthode de Godunov approchée). Au cours de ma thèse, j'ai développé un schéma numérique par relaxation à la *Suliciu* dans le cas du modèle bifluide $N = 2$. J'ai ensuite étendu ce schéma au cas du modèle multifluide à N phases avec N arbitraire.

Dans ce chapitre 3, après avoir rappelé quelques notions et propriétés du schéma de Godunov, on présente la technique d'approximation par relaxation à la *Suliciu* dans le cas simple monophasique des

équations d'Euler. On présente ensuite le développement du schéma numérique de relaxation pour le modèle multifluide à N phases, d'abord dans le cas barotrope, puis dans le cas (de la partie convective) du système (1) en dimension un, et enfin dans le cas multidimensionnel. L'extension du schéma de relaxation pour un modèle triphasique similaire à (1) (avec $N = 3$) mais qui autorise la miscibilité de deux des phases (par exemple pour modéliser un mélange eau liquide/eau vapeur/air) est également abordée.

Le schéma de relaxation obtenu est un schéma de type volumes finis colocalisé (tous les degrés de liberté sont attachés aux centres des cellules) qui a les propriétés suivantes :

1. Il garantit la positivité des taux de présence statistiques, des masses volumiques et des énergies internes sous une condition CFL basée sur la vitesse des ondes acoustiques.
2. Les masses partielles de chaque phase, la quantité de mouvement totale (somme des quantités de mouvement partielles de chaque phase) et l'énergie totale de mélange (somme des énergies totales de chaque phase) sont discrétisées de manière localement conservative.
3. Le schéma de relaxation satisfait, sous une condition sous-caractéristique appelée *condition de Whitham*, des inégalités d'entropie qui sont des contreparties discrètes des inégalités d'entropie vérifiées par les solutions faibles admissibles de (1).
4. Le schéma de relaxation s'avère être extrêmement précis en comparaison avec le schéma de Rusanov. Il est par ailleurs beaucoup moins coûteux en temps de calcul à précision donnée que le schéma de Rusanov, et ce malgré sa plus grande complexité. On observe par exemple sur un cas test unidimensionnel pour lequel on connaît la solution exacte, qu'il faut en moyenne dix fois plus de temps de calcul au schéma de Rusanov qu'au schéma de relaxation pour atteindre le même niveau d'erreur sur une variable donnée. Pour un cas test tridimensionnel, cela correspondrait à un coût de calcul 10^4 fois plus grand pour le schéma de Rusanov que pour le schéma de relaxation. La grande précision du schéma de relaxation compense donc largement sa relative complexité par rapport au schéma de Rusanov.

Partie II : Méthodes numériques pour la transition compressible-incompressible

Le nombre de Mach est un nombre sans dimension qui exprime le rapport de la vitesse locale d'un fluide à la vitesse du son dans ce même fluide. Lorsque ce nombre est très petit, les effets des compressions dues aux variations de pression peuvent être négligés (sur un domaine infini par exemple, les ondes acoustiques dont la propagation est très rapide si le nombre de Mach est très petit, sortent rapidement de la zone d'intérêt). Ainsi, en première approximation, un écoulement peut être considéré comme étant incompressible si le nombre de Mach est très petit.

D'un point de vue applicatif, peuvent intervenir, dans de nombreuses configurations industrielles, des transitions entre un écoulement incompressible ou faiblement compressible vers un écoulement fortement compressible. C'est le cas par exemple lorsque l'on étudie des situations accidentelles dans le domaine de la sûreté nucléaire. En fonctionnement normal, l'eau liquide du circuit primaire peut être considérée comme incompressible. Ce n'est que si un accident survient que des phénomènes compressibles tels que la propagation d'ondes de chocs ne peuvent plus être négligés. Il est alors essentiel de disposer de méthodes numériques permettant de simuler des écoulements à tout nombre de Mach.

Afin de comprendre le comportement des fluides dans les régimes faiblement compressibles ainsi que la limite singulière des modèles de fluides compressibles vers les modèles incompressibles, on adimensionne les équations en introduisant des grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Partant du système de Navier-Stokes monophasique, compressible et barotrope, on obtient le système suivant pour les grandeurs adimensionnées :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \quad (3a)$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) - \mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \varphi(\rho^\varepsilon) = 0. \quad (3b)$$

Les quantités $\rho^\varepsilon \geq 0$ et \mathbf{u}^ε sont respectivement la masse volumique adimensionnée, et la vitesse du fluide adimensionnée. La pression (adimensionnée) est donnée par une équation d'état barotrope en fonction de la masse volumique adimensionnée. Le coefficient μ est la viscosité du fluide (adimensionnée, c'est l'inverse du nombre de Reynolds) prise constante. Le coefficient λ est tel que $\mu + \lambda \geq 0$. Le paramètre ε est le nombre de Mach c'est-à-dire $\varepsilon = U_\infty/c_\infty$ où U_∞ est une vitesse caractéristique de l'écoulement considéré et c_∞ la vitesse du son caractéristique dans le fluide.

Formellement, lorsque que le nombre de Mach ε tend vers zéro, si $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho$ et $\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}$ alors, par l'équation de quantité de mouvement (3b) on a $\nabla \varphi(\rho^\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. À la limite on a alors $\rho = \rho(t)$. Si le fluide n'échange pas de masse avec l'extérieur (par exemple si le problème est posé sur un domaine Ω borné avec des conditions aux limites de non pénétration sur la vitesse \mathbf{u}^ε) on obtient que la masse volumique limite ρ est constante en temps et en espace. En passant à la limite dans les deux équations, on obtient alors le système des équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \Pi &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où, formellement, on a $\Pi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} (\varphi(\rho^\varepsilon) - \varphi(\rho))$.

Dans le chapitre 4, premier chapitre de la partie II, on commence par rappeler les principaux arguments mathématiques permettant de justifier rigoureusement la convergence lorsque ε tend vers zéro des solutions faibles (d'énergie finie) du système de Navier-Stokes compressible adimensionné (3) vers une solution du système de Navier-Stokes incompressible (4). Il est en effet primordial de bien comprendre les mécanismes en jeu dans cette limite singulière afin de pouvoir développer des méthodes numériques stables et consistantes autorisant une gestion *transparente* de la limite du compressible vers l'incompressible. Une propriété en particulier est mise en lumière, et qui s'avère cruciale pour le bon comportement des schémas numériques dans les régimes faiblement compressibles : la condition *inf-sup*, ou de manière équivalente l'existence de l'opérateur de Bogovskii qui est un opérateur continu, inverse de l'opérateur de divergence $\operatorname{div} : H_0^1(\Omega)^d \rightarrow L_0^2(\Omega)$ (où $L_0^2(\Omega)$ est composé des champs scalaires de carré intégrable et de moyenne nulle sur Ω).

On rappelle ensuite dans ce même chapitre 4 les difficultés soulevées par l'approximation numérique des écoulements faiblement compressibles. Ces difficultés relèvent du domaine général des méthodes numériques dites *asymptotic preserving*, c'est-à-dire des méthodes numériques reproduisant au niveau discret une limite singulière d'un modèle vers un autre dans la limite d'un paramètre ε tendant vers zéro. Considérons par exemple un modèle d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$ et s'écrivant $S^\varepsilon(U^\varepsilon) = 0$ (par exemple les équations d'Euler ou de Navier Stokes compressibles avec $\varepsilon > 0$ le nombre de Mach) dont les solutions $(U^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ convergent (en un certain sens) lorsque ε tend vers zéro vers une solution U d'un modèle $S^0(U) = 0$. On dira qu'une méthode numérique $S_{h,\delta t}^\varepsilon(U_{h,\delta t}^\varepsilon) = 0$ (où h est le pas d'espace et δt le pas de temps) pour le premier modèle est *asymptotic preserving* si, à discrétisation fixée (c'est-à-dire à h et δt fixés), les solutions discrètes $(U_{h,\delta t}^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ convergent lorsque ε tend vers zéro vers des solutions d'un schéma numérique $S_{h,\delta t}^0(U_{h,\delta t}) = 0$ stable et consistant pour le modèle limite $S^0(U) = 0$. Bien évidemment le schéma numérique $S_{h,\delta t}^\varepsilon(U_{h,\delta t}^\varepsilon) = 0$ doit également être stable et consistant avec le modèle $S^\varepsilon(U^\varepsilon) = 0$. On s'intéresse donc ici à la flèche rouge du diagramme de la Fig. 1 ci-dessous, diagramme que l'on souhaite être commutatif.

Il est connu que sans correction particulière, les schémas numériques les plus utilisés pour les modèles compressibles ne sont en général pas adaptés à la simulation numérique des écoulements qui sont dans des régimes où le nombre de Mach ε est très petit, c'est-à-dire des régimes proches de l'incompressible, et ce pour des raisons qui sont liées à la fois à la discrétisation temporelle et à la discrétisation spatiale. Premièrement, concernant la discrétisation de la variable temporelle, pour des raisons de simplicité et de précision, les schémas utilisés pour approcher les solutions des modèles d'écoulements compressibles utilisent souvent des discrétisations *explicites*. La stabilité des solutions implique alors une restriction du pas de temps δt par une condition CFL dictée par la vitesse des ondes acoustiques :

$$\delta t \lesssim \frac{\varepsilon h}{|\mathbf{u}|}.$$

$$\begin{array}{ccc}
S_{h,\delta t}^\varepsilon(U_{h,\delta t}^\varepsilon) = 0 & \xrightarrow{h, \delta t \rightarrow 0} & S^\varepsilon(U^\varepsilon) = 0 \\
\downarrow \varepsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\
S_{h,\delta t}^0(U_{h,\delta t}) = 0 & \xrightarrow{h, \delta t \rightarrow 0} & S^0(U) = 0
\end{array}$$

FIGURE 1 – Schémas numériques *asymptotic preserving*.

Ces schémas explicites ne peuvent donc pas rester stables lorsque le nombre de Mach ε tend vers zéro. Il est donc nécessaire, pour s’affranchir de cette contrainte, de discrétiser de manière implicite certains termes qui deviennent raides dans les régimes à faibles nombres de Mach. Une deuxième limitation dont souffrent les schémas classiques pour les modèles d’écoulements compressibles dans les régimes à faible nombre de Mach est liée à la discrétisation spatiale. En général, ces schémas s’appuient sur un arrangement *colocalisé* des inconnues discrètes c’est-à-dire que tous les degrés de liberté sont attachés aux centres des cellules du maillage. Cette discrétisation spatiale, qui est naturelle pour les modèles compressibles, est la cause de deux “pathologies” numériques. Premièrement, le décentrement des flux numériques dans l’équation de quantité de mouvement discrétisée introduit une diffusion numérique de l’ordre de $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$. Cette diffusion numérique devient donc trop importante dans les régimes proches de l’incompressible. En particulier, une perte de précision est observée sur l’approximation de la pression. Les variations de la pression autour de sa moyenne, qui doivent être de l’ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sont plutôt de l’ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Deuxièmement, les discrétisations colocalisées ne vérifient pas un équivalent discret de la condition *inf-sup* évoquée plus haut. Ceci a pour conséquence l’apparition éventuelle dans les régimes faiblement compressibles de modes de pression parasites appelés *modes en échiquier*, qui sont des champs de pression de moyenne nulle où dans deux cellules voisines la pression prend des valeurs opposées. Les schémas numériques colocalisés nécessitent donc des mécanismes de stabilisation additionnels dans la limite incompressible.

Plutôt que de stabiliser dans les régimes des très petits nombres de Mach les méthodes habituellement utilisées pour les modèles compressibles, une approche alternative consiste à partir de schémas stables et consistants pour les modèles incompressibles à savoir des schémas s’appuyant sur

- une discrétisation temporelle semi-implicite basée sur des méthodes de prédiction-corrrection de pression,
- une discrétisation spatiale sur grilles décalées où les degrés de liberté de la pression sont attachés aux centres des cellules d’un maillage et ceux de la vitesse sont attachés aux faces de ces cellules,

et d’étendre ces schémas numériques aux modèles compressibles.

Dans le chapitre 5, on décrit la discrétisation des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes sur grilles décalées. Les degrés de liberté des grandeurs physiques scalaires (masse volumique, pression) sont situés aux centres des mailles d’un maillage dit *primal* tandis que les degrés de liberté des vitesses sont situés aux faces. L’équation de conservation de la masse est discrétisée sur le maillage primal à l’aide de techniques de volumes finis, tandis que l’équation de quantité de mouvement est discrétisée sur un maillage *dual* dont les cellules sont situées au voisinage des faces du maillage primal. Dans cette dernière équation, les termes de diffusion sont discrétisés à l’aide d’éléments finis de bas degré (éléments finis de Crouzeix-Raviart ou de Rannacher-Turek) tandis que les termes de convection sont discrétisés par volumes finis. Nous présentons également dans ce chapitre les principales

propriétés des schémas obtenus, à savoir : une version discrète de la condition *inf-sup* qui assure la stabilité et la précision des schémas dans les régimes faiblement compressibles (et incompressibles) ainsi que des équations d'énergie cinétique et d'énergie totale discrètes dont découlent des propriétés de stabilité non linéaire pour des pas de temps arbitrairement grands ou contraints par des conditions CFL indépendantes des ondes acoustiques.

Dans le chapitre 6, on s'intéresse au caractère *asymptotic preserving* des schémas implicites ou semi-implicites sur grilles décalées développés au chapitre 5, c'est-à-dire à la flèche rouge du diagramme (Fig. 1) ci-dessus. On étudie, à discrétisation fixée, la stabilité des solutions discrètes et le passage à la limite dans ces solutions pour deux limites incompressibles. La première limite est la limite incompressible classique où le nombre de Mach tend vers zéro dans la discrétisation pour les équations de Navier-Stokes adimensionnées. La deuxième limite est la limite d'un modèle de congestion dite *douce* (qui modélise un fluide compressible avec une contrainte maximale sur la densité) vers un modèle de congestion dite *dure* associant des zones compressibles (sans pression) où la contrainte de densité maximale n'est pas atteinte et des zones incompressibles où la densité maximale est atteinte.

S'il était attendu que les schémas numériques sur grilles décalées aient les propriétés requises pour assurer stabilité et précision dans la limite incompressible (ce que nous montrons dans le chapitre 6) il n'est pas évident *a priori* que ces schémas numériques où les degrés de liberté des quantités scalaires et des quantités vectorielles ne sont pas localisés aux mêmes endroits, fournissent des solutions discrètes consistantes avec les solutions exactes. Dans le chapitre 7, on s'intéresse donc à des résultats de *convergence* des solutions de certains schémas sur grilles décalées vers les solutions faibles exactes des modèles discrétisés. On présente des résultats de convergence (à extraction de sous-suite près) des solutions discrètes vers des solutions faibles des équations de Navier-Stokes compressibles stationnaires avec des lois de pression barotropes de type gaz parfait, $\wp(\rho) = a\rho^\gamma$, avec $\gamma > \frac{3}{2}$. Enfin, on donne également des résultats de convergence pour le modèle de Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable (la masse volumique est advectée) dans un cadre instationnaire.

Première partie

Modélisation, analyse et simulation numériques pour les écoulements multiphasiques compressibles

Chapitre 1

Modèles bifluides moyennés pour les écoulements diphasiques compressibles

1.1 Moyennisation statistique d'un écoulement diphasique	22
1.2 Le modèle bifluide de Baer-Nunziato	26

Les écoulements multiphasiques compressibles sont des écoulements mettant en jeu des espèces qui se trouvent dans différents états de la matière (gazeux, liquide, solide) ou des espèces qui sont dans le même état mais qui ont des propriétés chimiques différentes (mélanges liquide-liquide non miscibles par exemple).

Les applications visées dans l'industrie nucléaire concernent non seulement le fonctionnement nominal mais aussi et surtout les configurations accidentelles. On peut par exemple citer la *crise d'ébullition* : il s'agit d'un accident hypothétique où, suite à l'augmentation du flux thermique issu des crayons de combustible nucléaire ou à une diminution du débit ou de la pression du fluide caloporteur du circuit primaire, un film de vapeur peut se former à la surface externe de la gaine de combustible refroidie par le caloporteur, ce qui provoque une réduction brutale de l'échange thermique et, en conséquence, une augmentation rapide de la température de la gaine pouvant conduire à son endommagement. La compréhension d'un tel phénomène nécessite des modèles d'écoulements diphasique dont au moins l'une des phases (la vapeur) est compressible. On peut également citer l'*accident par perte de réfrigérant primaire (APRP)* : c'est là aussi un accident hypothétique provoqué par une brèche dans l'enveloppe du circuit primaire ; l'existence de cette brèche entraîne alors une chute de la pression dans le circuit primaire et la propagation d'une onde de détente de vaporisation due à cette dépression. Là encore, il peut résulter d'un tel accident un échauffement des crayons combustibles qui doit rester limité afin que l'endommagement du combustible ne mette pas en cause le refroidissement du cœur du réacteur et évite sa fusion. Enfin, on peut citer le phénomène de l'*explosion de vapeur* : suite à un défaut d'évacuation de chaleur dans le cœur du réacteur, celui-ci peut entrer en fusion créant un magma métallique appelé corium. Le contact des particules de corium avec l'eau (liquide) provoque alors une évaporation violente, la naissance d'ondes de choc et de détente qui pourraient endommager la structure du réacteur. La compréhension d'un tel phénomène nécessite des modèles d'écoulements faisant intervenir au moins trois phases (solide ou liquide pour le corium, liquide et gazeuse pour l'eau).

Il existe plusieurs manières de modéliser mathématiquement des écoulements multiphasiques compressibles. Une approche naturelle serait de faire une *description microscopique* de l'écoulement : si une zone de l'écoulement est occupée par la phase k , supposée compressible, alors l'écoulement est localement régi par les équations d'Euler ou de Navier-Stokes compressibles avec les données physiques de la phase k . Il reste alors à modéliser les échanges thermodynamiques et les échanges éventuels de masse aux interfaces entre les phases. Une telle approche est impossible à mettre en œuvre en pratique tant du point de vue de la modélisation, en raison de la diversité et de la complexité des écoulements que du point de vue de la simulation numérique qui nécessiterait un coût de calcul bien trop important.

Dans le but d'obtenir des modèles susceptibles d'être approchés numériquement, il apparaît donc nécessaire de simplifier la description locale instantanée. Une approche couramment utilisée consiste à appliquer des opérateurs de moyenne sur des écoulements mettant en jeu plusieurs phases, régies chacune par les équations d'Euler ou de Navier Stokes monophasiques. On obtient alors des modèles de milieux continus où les inconnues sont des quantités phasiques moyennées, pondérées par le taux de présence statistique de chaque phase.

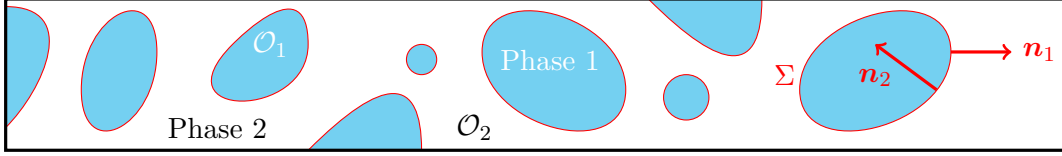
En ce qui concerne les écoulements à deux phases, deux grandes classes de modèles moyennés, (*i.e.* proposant des équations d'évolution pour les moments statistiques d'ordre un au moins) ont été proposées dans la littérature depuis les années 1970 (voir parmi d'autres références les ouvrages [37, 23]). Une première classe correspond à une représentation homogène monofluide, décrivant essentiellement les propriétés moyennes du mélange eau-vapeur (masse, débit, énergie), et éventuellement le déséquilibre de titre masse. Les codes français THYC (EDF), FLICA et GENEPI (CEA), sont basés sur de tels modèles d'écoulements diphasiques. Une autre approche possible repose sur l'utilisation de l'approche à deux fluides, c'est le cas pour les codes CATHARE et NEPTUNE_CFD (France) et RELAP (États-Unis). Dans cette dernière formulation, les moments d'ordre un associés à la densité, au débit, et à l'énergie sont prédits par des lois d'évolution pour chaque phase, le taux de présence statistique de phase étant fourni par une équation d'évolution ou une fermeture algébrique. L'approche monofluide permet d'éviter le recours à de nombreuses lois de fermeture, hormis sur le plan des lois d'état thermodynamique et des transferts de masse interfaciaux. Les systèmes fermés associés ont en général une structure convective assez proche de celle des équations d'Euler, et l'on peut dans certains cas (les plus simples) s'appuyer sur des résultats de caractérisation des solutions de ces équations. Un inconvénient évident est qu'ils ne fournissent pas d'information précise et pertinente sur les déséquilibres de vitesse/pression/température entre phases. Enfin, dans les cas optimaux, l'obtention de solutions numériques raisonnablement proches de la convergence ne requiert pas obligatoirement des maillages très fins. Inversement, l'approche à deux fluides fournit *a priori* une représentation plus fine de la réalité en prenant en compte des déséquilibres entre phases, mais elle nécessite de fournir des lois de fermeture cohérentes (notamment par rapport à la caractérisation entropique) et suffisamment renseignées (pour ce qui concerne les échelles de temps de relaxation par exemple). En outre, il n'existe pas de consensus actuellement concernant la forme optimale des lois de fermeture des termes de transfert interfacial, ou des échelles de temps de relaxation. Selon que l'on considère telle ou telle loi de fermeture, les propriétés des modèles peuvent éventuellement différer.

Les modèles que nous considérons dans ce mémoire sont des modèles multifluides où aucune hypothèse d'équilibre entre les pressions des phases en présence n'est faite, non plus qu'entre les vitesses, températures ou potentiels de Gibbs des phases. Dans le cas diphasique, ce type de modèle fut par exemple étudié par Ransom et Hicks [44] ainsi que Stewart et Wendroff [52]. L'évolution de l'interface, identifiée à l'évolution des fractions statistiques est alors décrite par une équation aux dérivées partielles supplémentaire. Cette loi est généralement une équation de transport avec terme source où la vitesse de transport est appelée *vitesse interfaciale*. Intervient également dans ces modèles une *pression interfaciale* qui est possiblement différente des deux pressions phasiques. L'existence d'une équation d'advection sur les taux de présence donne à ces modèles hors équilibre en pression la propriété d'avoir une structure convective faiblement hyperbolique. Ils ne sont donc pas susceptibles *a priori* de développer de fortes instabilités non physiques liés à l'existence d'une zone elliptique (en temps-espace).

L'objectif de ce premier chapitre est de présenter, dans les grandes lignes, la dérivation des modèles diphasiques bifluides en s'appuyant sur l'approche par moyennisation statistique.

1.1 Moyennisation statistique d'un écoulement diphasique

On considère un écoulement diphasique non visqueux composé de deux phases notées $k = 1$ et $k = 2$. On suppose que les deux phases sont immiscibles, qu'il n'y a pas de vide, et qu'en tout $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$, on sait quelle est la phase présente. On note $\mathcal{O}_k(t) \subset \mathbb{R}^3$ le domaine occupé par la phase k et on note $\Sigma(t) = \partial\mathcal{O}_1(t) = \partial\mathcal{O}_2(t)$ la frontière entre les deux phases.



On suppose que dans le domaine $\mathcal{O}_k(t) \subset \mathbb{R}^3$, l'évolution de la phase k est régie par les équations d'Euler. En notant $\rho_k(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x})$, $E_k(t, \mathbf{x})$ la masse volumique, la vitesse et l'énergie totale de la phase k , on a pour $k = 1, 2$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k) &= 0, \\ \partial_t(\rho_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{div}(\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla p_k &= 0, \\ \partial_t(\rho_k E_k) + \operatorname{div}(\rho_k E_k \mathbf{u}_k + p_k \mathbf{u}_k) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

où la pression est donnée par une loi d'état $p_k = \wp_k(\rho_k, e_k)$ avec $E_k = \frac{|\mathbf{u}_k|^2}{2} + e_k$. Un exemple de loi d'état est donné par les lois de type *stiffened gas* :

$$p_k = \wp_k(\rho_k, e_k) = (\gamma_k - 1)\rho_k e_k - \gamma_k p_{\infty, k}, \quad \gamma_k > 1, \quad p_{\infty, k} \geq 0. \quad (1.2)$$

Pour déterminer entièrement l'écoulement diphasique, il reste à décrire la dynamique de la frontière $\Sigma(t)$. On suppose que cette frontière est suffisamment régulière pour pouvoir définir \mathbf{n}_Σ le vecteur unitaire normal à cette frontière orienté par convention de la phase 1 vers la phase 2. On note également $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_\Sigma = -\mathbf{n}_2$. On suppose que la vitesse de l'interface, notée \mathbf{v}_Σ est colinéaire et de même sens que \mathbf{n}_Σ . On définit $\chi_k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de la phase k :

$$\chi_k(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}_k(t), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors, au sens des distributions :

$$\nabla \chi_k = -\mathbf{n}_k \delta_\Sigma, \quad (1.3)$$

$$\nabla(\chi_k f) = \chi_k \nabla f - f \mathbf{n}_k \delta_\Sigma, \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \quad (1.4)$$

$$\nabla(\chi_k \mathbf{f}) = \chi_k \nabla \mathbf{f} - (\mathbf{f} \otimes \mathbf{n}_k) \delta_\Sigma, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n), n \geq 1, \quad (1.5)$$

$$\partial_t \chi_k = (\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \delta_\Sigma, \quad (1.6)$$

$$\partial_t(\chi_k \mathbf{f}) = \chi_k \partial_t \mathbf{f} + (\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \mathbf{f} \delta_\Sigma, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n), n \geq 1. \quad (1.7)$$

Notons que (1.3) et (1.6) donnent, au sens des distributions :

$$\partial_t \chi_k + \mathbf{v}_\Sigma \cdot \nabla \chi_k = 0. \quad (1.8)$$

La dynamique de l'interface est donc entièrement encodée dans l'évolution de la vitesse \mathbf{v}_Σ .

En multipliant (1.1) par χ_k et en utilisant (1.3)-(1.7) pour faire des intégrations par parties, on obtient que le mélange diphasique est régi par le système suivant : pour $k = 1, 2$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \partial_t \chi_k + \mathbf{v}_\Sigma \cdot \nabla \chi_k &= 0, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) &= \Gamma_{k\Sigma}, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\chi_k p_k) - p_k \nabla \chi_k &= \mathbf{u}_k \Gamma_{k\Sigma}, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot ((\rho_k E_k + p_k) \chi_k \mathbf{u}_k) + p_k \partial_t \chi_k &= H_k \Gamma_{k\Sigma}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

où $H_k = E_k + p_k/\rho_k$ est l'enthalpie de la phase k et

$$\Gamma_{k\Sigma} = \rho_k (\mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k \delta_\Sigma$$

est le transfert de masse vers la phase k résultant du mouvement de l'interface Σ . A ce stade, le modèle n'est pas fermé. Il reste à spécifier l'évolution de la vitesse d'interface \mathbf{v}_Σ ou de manière équivalente l'évolution du transfert de masse $\Gamma_{k\Sigma}$, par exemple en fonction des quantités thermodynamiques des deux phases. Cependant, même en supposant disposer d'une telle fermeture, la discrétisation d'un tel modèle dans le but de simuler numériquement des phénomènes diphasiques instationnaires tels que ceux intéressant l'industrie nucléaire reste hors de portée en raison de la diversité et de la complexité topologiques des écoulements qui nécessiteraient une capacité de calcul infinie. Il est par ailleurs extrêmement difficile de discrétiser les équations de transport sur les fonctions caractéristiques χ_k de manière à préserver des valeurs de χ_k dans l'ensemble $\{0, 1\}$.

L'idée de la moyennisation est alors de contourner cette difficulté en se plaçant à une échelle *macroscopique* où l'observateur ne cherche plus un modèle lui permettant de connaître les détails microscopiques de l'écoulement mais un modèle lui donnant accès à des quantités moyennes. Il existe plusieurs types de moyennisations (moyenne statistique, moyenne volumique [37], intégration dans la direction transverse d'un écoulement stratifié [44, 52],...). Notons qu'en général, ces procédés de moyennisation sont formels et ne permettent pas une justification mathématique rigoureuse des modèles bifluides en déséquilibre de pressions, vitesses, températures et potentiels de Gibbs. On peut citer néanmoins un certain nombre de travaux récents permettant une dérivation rigoureuse de modèles bifluides *mono-vitesse* visqueux, à partir de procédés d'homogénéisation des équations de Navier-Stokes compressibles où la masse volumique oscille (de plus en plus fortement) entre deux valeurs représentant les masses volumiques des deux phases. [35, 12, 11, 10, 34, 9, 8, 36].

Nous allons décrire succinctement l'approche par moyennisation statistique qui est la plus couramment utilisée [23].

À l'échelle macroscopique, un état observé peut correspondre à plusieurs états microscopiques différents. Notons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ un ensemble de réalisations microscopiques possibles de l'écoulement correspondant à un même état observé à l'échelle macroscopique. On suppose que Ω est muni d'une mesure de probabilités \mathbb{P} .



On note $f(t, \mathbf{x}; \omega)$ un champ physique (par exemple la masse volumique, la vitesse ou la pression,...) pour la réalisation $\omega \in \Omega$. On définit alors la moyenne statistique $\langle f \rangle$ du champ f comme l'espérance de f pour la mesure \mathbb{P} :

$$\langle f \rangle(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t; \omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \langle f + g \rangle &= \langle f \rangle + \langle g \rangle, & \langle fg \rangle &= \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle (f - \langle f \rangle)(g - \langle g \rangle) \rangle, \\ \langle \partial_t f \rangle &= \partial_t \langle f \rangle, & \langle \partial_{x_i} f \rangle &= \partial_{x_i} \langle f \rangle, \quad i = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

On définit $\alpha_k(t, \mathbf{x}) = \langle \chi_k \rangle(t, \mathbf{x})$ le taux de présence statistique de la phase k c'est-à-dire la probabilité de trouver la phase k au point $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. On a naturellement que

$$\alpha_1 \in (0, 1), \quad \alpha_2 \in (0, 1), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

On définit $\overline{\rho_k}$, $\overline{p_k}$, $\overline{\mathbf{u}_k}$ et $\overline{E_k}$ par :

$$\alpha_k \overline{\rho_k} = \langle \chi_k \rho_k \rangle, \quad \alpha_k \overline{p_k} = \langle \chi_k p_k \rangle, \quad \alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{u}_k} = \langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \rangle, \quad \alpha_k \overline{\rho_k E_k} = \langle \chi_k \rho_k E_k \rangle.$$

En appliquant l'opérateur de moyenne $\langle \cdot \rangle$ au système (1.9) on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t \alpha_1 + \langle \mathbf{v}_\Sigma \rangle \cdot \nabla \alpha_1 &= \Phi, \\ \partial_t (\alpha_k \bar{\rho}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k) &= \Gamma_k, \\ \partial_t (\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k) + \mathbf{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k) + \nabla(\alpha_k \bar{p}_k) - \langle p_k \rangle \nabla \alpha_k &= \mathbf{D}_k, \\ \partial_t (\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{E}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k (\bar{\rho}_k \bar{E}_k + \bar{p}_k) \bar{\mathbf{u}}_k) + \langle p_k \rangle \partial_t \alpha_k &= \Psi_k,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi &= -\langle (\mathbf{v}_\Sigma - \langle \mathbf{v}_\Sigma \rangle) \cdot (\nabla \chi_k - \nabla \alpha_k) \rangle, \\ \Gamma_k &= \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle, \\ \mathbf{D}_k &= \langle \mathbf{u}_k \Gamma_{k\Sigma} \rangle + \langle (p_k - \langle p_k \rangle) (\nabla \chi_k - \nabla \alpha_k) \rangle + \operatorname{div}(\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k - \langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k \rangle), \\ \Psi_k &= \langle H_k \Gamma_{k\Sigma} \rangle - \langle (p_k - \langle p_k \rangle) (\partial_t \chi_k - \partial_t \alpha_k) \rangle + \operatorname{div}(\alpha_k (\bar{\rho}_k \bar{E}_k + \bar{p}_k) \bar{\mathbf{u}}_k - \langle (\rho_k E_k + p_k) \chi_k \mathbf{u}_k \rangle).\end{aligned}\tag{1.10}$$

On choisit alors comme inconnues du modèle moyenné le taux de présence statistique α_1 de la phase 1 ainsi que les masses volumiques, vitesses et énergies totales moyennes $\bar{\rho}_k$, $\bar{\mathbf{u}}_k$, \bar{E}_k dans chaque phase k , on obtient un modèle moyenné d'inconnue

$$U = (\alpha_1, \bar{\rho}_1, \bar{\mathbf{u}}_1, \bar{E}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{E}_2) \in \mathbb{R}^{11}.$$

Pour fermer le modèle, il faut alors

1. Spécifier le lien entre les pressions \bar{p}_k et les inconnues principales. Un choix possible est de considérer des lois d'états thermodynamiques *phase par phase* :

$$\bar{p}_k = \wp_k(\bar{\rho}_k, \bar{E}_k - |\bar{\mathbf{u}}_k|^2/2)$$

où \wp_k sont des fonctions données. On peut choisir par exemple des lois d'états thermodynamiques de type stiffened gas telles que (1.2).

2. Spécifier en fonction des inconnues principales, des lois de fermeture pour $\langle \mathbf{v}_\Sigma \rangle$ la moyenne de la vitesse de l'interface et pour la quantité $\langle p_k \rangle$ qui est la moyenne de la pression au niveau de l'interface entre les deux phases. On peut là aussi choisir des lois de fermeture algébrique ne dépendant que du vecteur d'inconnues U :

$$\langle \mathbf{v}_\Sigma \rangle = \mathbf{V}_I(U), \quad \langle p_k \rangle = P_I(U).$$

Lorsque l'une des phases, par exemple la phase 1, est présente en faible quantité et dispersée dans l'autre phase qui est prépondérante, un choix classique de fermetures consiste à choisir pour la vitesse d'interface la vitesse moyenne de la phase dispersée et pour la pression d'interface la pression moyenne de la phase prépondérante : $\mathbf{V}_I(U) = \bar{\mathbf{u}}_1$, $P_I(U) = \bar{p}_2$.

3. Spécifier des lois de fermeture pour les termes apparaissant au second membre Γ_k , \mathbf{D}_k et Ψ_k qui représentent la moyenne des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre les phases. Là aussi on peut choisir des lois de fermeture algébrique ne dépendant que du vecteur d'inconnues U :

$$\Phi(U), \quad \Gamma_k(U), \quad \mathbf{D}_k(U), \quad \Psi_k(U).$$

Ces lois de fermeture doivent garantir la conservation globale de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totales. Elles doivent donc satisfaire

$$\sum_{k=1,2} \Gamma_k(U) = 0, \quad \sum_{k=1,2} \mathbf{D}_k(U) = 0, \quad \sum_{k=1,2} \Psi_k(U) = 0.$$

On cherchera également à les déterminer de manière à satisfaire un principe d'irréversibilité, en accord avec le second principe de la thermodynamique.

1.2 Le modèle bifluide de Baer-Nunziato

Le modèle de Baer-Nunziato est un modèle bifluide moyenné qui a pour inconnues physiques une masse volumique moyenne $\rho_k(t, \mathbf{x})$, une vitesse moyenne $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x})$, une pression moyenne $p_k(t, \mathbf{x})$ et une énergie massique totale moyenne $E_k(t, \mathbf{x})$ pour chaque phase $k \in \{1, 2\}$ ainsi que le taux de présence statistique $\alpha_1(t, \mathbf{x})$ qui indique la probabilité de présence de la phase 1 en \mathbf{x} à la date t (avec $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$). C'est un modèle qui permet de décrire un écoulement diphasique où l'une des phases (ici la phase 1) est dispersée dans l'autre phase (ici la phase 2).

Le modèle s'écrit alors pour $k \in \{1, 2\}$, $t > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + \mathbf{V}_I(U) \cdot \nabla \alpha_1 &= \Phi, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) &= \Gamma_k, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\alpha_k p_k) - P_I(U) \nabla \alpha_k &= \mathbf{D}_k, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k E_k \mathbf{u}_k + \alpha_k p_k \mathbf{u}_k) + P_I(U) \partial_t \alpha_k &= \Psi_k, \end{aligned} \quad (1.11)$$

avec

$$\mathbf{V}_I(U) = \mathbf{u}_1, \quad P_I(U) = p_2.$$

La solution est à valeurs dans l'espace des états admissibles suivant :

$$\Omega_U = \left\{ U = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1, \alpha_2 \rho_2 \mathbf{u}_2, \alpha_1 \rho_1 E_1, \alpha_2 \rho_2 E_2)^T \in \mathbb{R}^{11}, \right.$$

$$\left. \text{tel que } 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_k \rho_k > 0 \text{ et } \alpha_k \rho_k (E_k - |\mathbf{u}_k|^2/2) > 0 \text{ pour tout } k = 1, 2 \right\}.$$

Les pressions sont données par des lois d'état thermodynamiques pour chaque phase k sous la forme

$$p_k = \wp_k(\rho_k, e_k)$$

où e_k est l'énergie interne spécifique de la phase k définie par la relation :

$$E_k = \frac{|\mathbf{u}_k|^2}{2} + e_k, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (1.12)$$

On suppose en outre que les lois de pressions phasiques vérifient le second principe de la thermodynamique au sens où pour chaque phase k , il existe un facteur intégrant positif $T_k = T_k(\rho_k, e_k) > 0$ appelé température de la phase k , tel que la différentielle $ds_k(\rho_k, e_k)$ définie par

$$T_k ds_k = \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k - de_k$$

soit la différentielle exacte d'une fonction $s_k(\rho_k, e_k)$ appelée entropie de la phase k (il s'agit de l'opposée de l'entropie physique habituelle). On suppose également que l'application $(\tau_k, e_k) \mapsto s_k(\tau_k^{-1}, e_k)$ est convexe ($\tau_k = \rho_k^{-1}$ est le volume spécifique de la phase k). On montre alors que pour le couple $(\mathbf{V}_I(U), P_I(U))$ donné ci-dessus, les solutions régulières de (1.11) satisfont les lois de conservation :

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k s_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k s_k \mathbf{u}_k) = 0. \quad (1.13)$$

On a la propriété suivante sur les champs caractéristiques du modèle de Baer-Nunziato.

Proposition 1.2.1. *En dimension un d'espace et sans termes sources, le système (1.11) admet les 7 valeurs propres suivantes : u_1 (qui est double), $u_k - c_k(\rho_k, e_k)$ pour $k = 1, 2$, $u_k + c_k(\rho_k, e_k)$ pour $k = 1, 2$ et u_2 , où*

$$c_k(\rho_k, e_k)^2 = \partial_{\rho_k} p_k(\rho_k, e_k) + p_k(\rho_k, e_k) / \rho_k^2 \partial_{e_k} p_k(\rho_k, e_k).$$

Si $c_k(\rho_k, e_k)^2 > 0$, alors le système est faiblement hyperbolique dans le sens suivant : toutes les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres à droite engendrent \mathbb{R}^7 si et seulement si

$$|u_2 - u_1| \neq c_2(\rho_2, e_2). \quad (1.14)$$

Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres u_k pour $k = 1, 2$ sont linéairement dégénérés. Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $u_k \pm c_k(\rho_k, e_k)$ pour $k = 1, 2$ sont vraiment non linéaires.

Le système de Baer-Nunziato (1.11) est un système non conservatif ce qui rend la définition des solutions faibles ambiguë dès lors que les taux de présence statistiques sont des fonctions discontinues. Cependant, comme l'onde de vitesse u_1 est linéairement dégénérée, on peut, tant que le système est hyperbolique (c'est-à-dire tant que (1.14) est vraie), définir les produits non conservatifs au niveau des sauts de α_k grâce aux invariants de Riemann de cette onde.

On montre que les fonctions $U \mapsto (\alpha_1 \rho_1 s_1)(U)$ et $U \mapsto (\alpha_2 \rho_2 s_2)(U)$ sont convexes. On sélectionne alors les solutions faibles physiquement admissibles comme étant les solutions qui vérifient, au sens faible, les inégalités d'entropie suivantes :

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k s_k) + \operatorname{div}(\alpha_k \rho_k s_k \mathbf{u}_k) \leq 0. \quad (1.15)$$

Remarque 1.2.1. *Le modèle de Baer-Nunziato peut-être généralisé à d'autres fermetures pour le couple vitesse et pression interfaciales de manière à préserver le caractère linéairement dégénéré de l'onde de vitesse $V_I(U)$ et à assurer l'existence d'une équation d'entropie conservative permettant de définir le produit non conservatif et de sélectionner les solutions faibles physiquement admissibles. Considérons par exemple les fermetures suivantes qui ont été introduites dans [16] et [25] :*

$$\mathbf{V}_I(U) = \mu(U) \mathbf{u}_1 + (1 - \mu(U)) \mathbf{u}_2, \quad \mu(U) = \frac{\chi \alpha_1 \rho_1}{\chi \alpha_1 \rho_1 + (1 - \chi) \alpha_2 \rho_2}, \quad \chi \in \{0, 1/2, 1\}, \quad (1.16)$$

$$P_I(U) = \beta(U) p_1 + (1 - \beta(U)) p_2, \quad \beta(U) = \frac{(1 - \mu(U)) T_2}{(1 - \mu(U)) T_2 + \mu(U) T_1}, \quad (1.17)$$

où T_k est la température de la phase k . On montre que l'onde de vitesse $V_I(U)$ est linéairement dégénérée et que les solutions régulières du système (1.11) satisfont la loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t \eta(U) + \operatorname{div}(\mathcal{F}(U)) = 0,$$

avec $\eta(U) = \alpha_1 \rho_1 s_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2$ et $\mathcal{F}(U) = \alpha_1 \rho_1 s_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2 \mathbf{u}_2$, et les solutions faibles entropiques sont les solutions faibles qui vérifient, au sens des distributions l'inégalité d'entropie :

$$\partial_t \eta(U) + \operatorname{div}(\mathcal{F}(U)) \leq 0. \quad (1.18)$$

D'autres fermetures sont proposées par Saurel et al. [49], Abgrall-Saurel [1] et Papin-Abgrall [43]. Dans ce cadre citons également les travaux de Gallouët et al. [24], Gavrilyuk-Saurel [26], Kapila et al. [38, 39] ainsi que ceux de Coquel et al. [17].

Considérons à présent les fermetures des termes sources d'ordre zéro, qui sont en général choisis de manière à assurer un certain nombre de propriétés structurelles :

1. En l'absence de forces extérieures, les termes d'ordre zéro doivent assurer la conservation de la masse totale, de quantité de mouvement totale ainsi que de l'énergie totale si bien que

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k(U) = 0, \quad \sum_{k=1}^2 \mathbf{D}_k(U) = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^2 \Psi_k(U) = 0. \quad (1.19)$$

2. Ces termes sources doivent être compatibles avec l'inégalité d'entropie (1.18).

3. Les termes sources doivent préserver la propriété d'invariance par rotation du système.

Un choix usuel pour ces termes sources est le suivant. Le terme source $\Phi(U)$ est un terme de relaxation sur la différence entre les pressions $p_1 - p_2$. Il traduit l'expansion de la phase 1 si sa pression est supérieure à celle de la phase 2. Les termes $\Gamma_k(U)$, $k \in \{1, 2\}$ sont des termes d'échanges de masse entre les phases. Ces termes dépendent des températures et des potentiels chimiques $\mu_k(\rho_k, e_k)$ de chaque phase qui sont définis par :

$$\mu_k = e_k + \frac{p_k}{\rho_k} + T_k s_k.$$

Les termes $\mathbf{D}_k(U)$, $k \in \{1, 2\}$ sont des termes d'échange de quantité de mouvement par friction entre les phases. Ces termes de friction étant généralement proportionnels à la différence $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, ils agissent également comme des termes de relaxation sur la différence des vitesses. Enfin, les termes $\Psi_k(U)$, $k \in \{1, 2\}$ modélisent les échanges d'énergie entre les phases. Notant $\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2$ et $\bar{w} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2/2$, un choix admissible pour ces termes sources est donné par

$$\Phi(U) = \Theta_p(p_1 - p_2), \quad (1.20)$$

$$\Gamma_k(U) = (-1)^k \Theta_\Gamma(\mu_1/T_1 - \mu_2/T_2), \quad (1.21)$$

$$\mathbf{D}_k(U) = (-1)^k \Theta_u(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \bar{\mathbf{u}}\Gamma_k, \quad (1.22)$$

$$\Psi_k(U) = (-1)^k \Theta_T(T_1 - T_2) + \bar{w}\Gamma_k + \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{D}_k, \quad (1.23)$$

où Θ_p , Θ_Γ , Θ_u et Θ_T sont des termes positifs pouvant être pris comme suit :

$$\begin{aligned} \Theta_p &= \frac{1}{\tau_p} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{P_0}, \\ \Theta_\Gamma &= \frac{1}{\tau_\Gamma} \frac{(\alpha_1 \rho_1)(\alpha_2 \rho_2)}{(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) M_0} \\ \Theta_u &= \frac{1}{\tau_u} \frac{(\alpha_1 \rho_1)(\alpha_2 \rho_2)}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2}, \\ \Theta_T &= \frac{1}{\tau_T} \frac{(\alpha_1 \rho_1 C_1)(\alpha_2 \rho_2 C_2)}{\alpha_1 \rho_1 C_1 + \alpha_2 \rho_2 C_2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Les grandeurs τ_p , τ_Γ , τ_u et τ_T sont des temps caractéristiques (en secondes) liés aux phénomènes de relaxation en pression, potentiel chimique, vitesse et température. P_0 est une pression de référence. M_0 est une valeur de référence homogène à μ/T . Le coefficient C_k est homogène à une capacité thermique massique.

Chapitre 2

Modèles multifluides moyennés de type Baer-Nunziato

2.1	Le modèle multifluide à N phases et ses propriétés	30
2.1.1	Invariance Galiléenne et invariance par rotation	30
2.1.2	Hyperbolicité du modèle unidimensionnel	32
2.1.3	Entropies et convexité	33
2.1.4	Symétrisabilité du système	34
2.2	Le modèle multifluide à N phases barotrope	35
2.2.1	Hyperbolicité du modèle à N phases barotrope unidimensionnel	35
2.2.2	Énergies et entropies mathématiques	36
2.2.3	Symétrisabilité du modèle barotrope	37

Dans une série d'articles fondateurs [29, 30, 42], les modèles bifluides de type Baer-Nunziato présentés dans le chapitre précédent ont été étendus pour modéliser des écoulements multiphasiques compressibles mettant en jeu plus de deux phases non miscibles. On présente ici la version sans termes sources du modèle ainsi que ses principales propriétés. Les termes sources modélisant les échanges de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre les phases, sont similaires aux termes sources pour le modèle diphasique de Baer-Nunziato (1.20)-(1.21)-(1.22)-(1.23). Voir par exemple [6, 7] pour leur définition précise dans le cadre de mélanges multiphasiques immiscibles.

Les travaux décrits dans ce chapitre font l'objet des publications suivantes :

- 1 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « A class of two-fluid two-phase flow models ». In : *42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 2012, p. 3356.
- 2 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 12.3 (2014).
- 3 K. SALEH et N. SEGUIN. « Some mathematical properties of a barotropic multiphase flow model ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 69 (2020), p. 70-78.

2.1 Le modèle multifluide à N phases et ses propriétés

Soit $N \geq 2$. On considère le modèle suivant pour l'évolution de N phases compressibles : pour $k = 1, \dots, N$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$\partial_t \alpha_k + \mathbf{V}_I(U) \cdot \nabla \alpha_k = 0, \quad (2.1a)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (\alpha_k p_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(U) \nabla \alpha_l = 0, \quad (2.1c)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k E_k \mathbf{u}_k + \alpha_k p_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{V}_I(U) \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(U) \nabla \alpha_l = 0. \quad (2.1d)$$

Comme pour le cadre diphasique, $\alpha_k(t, \mathbf{x})$, $\rho_k(t, \mathbf{x})$, $E_k(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ sont respectivement la fraction statistique, la masse volumique, l'énergie totale et la vitesse moyennes de la phase k (pour $k = 1, \dots, N$). Le vecteur d'état est recherché dans l'espace des phases suivant :

$$\begin{aligned} \Omega_U = \left\{ U = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1, \dots, \alpha_N \rho_N \mathbf{u}_N, \right. \\ \left. \alpha_1 \rho_1 E_1, \dots, \alpha_N \rho_N E_N) \in \mathbb{R}^{6N-1}, \text{ tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1, \right. \\ \left. \alpha_k \rho_k > 0 \text{ et } \alpha_k \rho_k (E_k - |\mathbf{u}_k|^2/2) > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}. \end{aligned}$$

Les fractions statistiques sont liées par la condition de saturation suivante, qui traduit le fait que les phases en présence sont non miscibles :

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1. \quad (2.2)$$

On se donne une loi d'état thermodynamique pour chaque phase k comme suit

$$(\rho_k, e_k) \mapsto p_k(\rho_k, e_k), \text{ avec } e_k = E_k - \frac{|\mathbf{u}_k|^2}{2}$$

où e_k est l'énergie interne spécifique de la phase k . Enfin, on suppose qu'il existe une température $T_k = T_k(\rho_k, e_k) > 0$ telle que la différentielle $ds_k(\rho_k, e_k)$ définie par

$$T_k ds_k = \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k - de_k \quad (2.3)$$

soit la différentielle exacte d'une fonction $s_k(\rho_k, e_k)$. On suppose enfin que l'application $(\tau_k, e_k) \mapsto s_k(\tau_k^{-1}, e_k)$ est convexe.

2.1.1 Invariance Galiléenne et invariance par rotation

Dans la suite, on considère des lois de fermeture pour la vitesse interfaciale $\mathbf{V}_I(U)$ et les pressions interfaciales $P_{kl}(U)$ qui sont des combinaisons linéaires des vitesses phasiques d'une part et des pressions phasiques d'autre part

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_I(U) &= \sum_{j=1}^N \theta_j(U) \mathbf{u}_j, & \sum_{j=1}^N \theta_j(U) &= 1, \\ P_{kl}(U) &= \sum_{j=1}^N \beta_{kl,j}(U) p_j, & \sum_{j=1}^N \beta_{kl,j}(U) &= 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

dont les coefficients $\theta_j(U)$ et $\beta_{kl,j}(U)$ ne dépendent en fait que des fractions statistiques $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ et des grandeurs thermodynamiques à savoir, les masses volumiques ρ_1, \dots, ρ_N et les températures T_1, \dots, T_N (ou de façon équivalente les énergies internes e_1, \dots, e_N). On montre alors que sous cette hypothèse, le modèle multifluide (2.1) est invariant par rotation dans l'espace et par changement de référentiel

Galiléen. Pour donner un énoncé précis de ce résultat, on écrit le système (2.1) sous forme vectorielle (on laisse le soin au lecteur de déterminer les expressions des fonctions $f_i(U)$ et $c_i(U)$ pour $i = 1, \dots, 3$) :

$$\partial_t U + \partial_x f_1(U) + \partial_y f_2(U) + \partial_z f_3(U) + c_1(U) \partial_x U + c_2(U) \partial_y U + c_3(U) \partial_z U = 0. \quad (2.5)$$

Pour $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ et $R_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \in SO(3)$ (R_0 est une rotation de \mathbb{R}^3 ou une composition de rotations), on considère le changement de variables

$$(t', \mathbf{x}') = (t, R_0^T \mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t).$$

On définit également $\mathcal{R}^{-1} : \Omega_U \rightarrow \Omega_U$, $U \mapsto \tilde{U}$ la transformation qui agit sur un vecteur d'état U en gardant inchangées les quantités scalaires et en appliquant R_0 puis la translation de vecteur \mathbf{v}_0 aux vitesses :

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k, \quad \tilde{\rho}_k = \rho_k, \quad \tilde{e}_k = e_k, \quad \tilde{\mathbf{u}}_k = R_0^T \mathbf{u}_k - \mathbf{v}_0, \quad k = 1, \dots, N.$$

On a le résultat suivant, qui traduit l'invariance du modèle par changement de référentiel Galiléen et par rotation dans \mathbb{R}^3 .

Théorème 2.1.1. *On suppose que les lois de fermeture pour la vitesse interfaciale et les pressions interfaciales sont de la forme (2.4). Soit $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega_U$, $(t, \mathbf{x}) \mapsto U(t, \mathbf{x})$ et soit $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \Omega_U$, $(t', \mathbf{x}') \mapsto \tilde{U}(t', \mathbf{x}')$ définie par*

$$\tilde{U}(t', \mathbf{x}') = \tilde{U}(t, R_0^T \mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t) := \mathcal{R}^{-1} U(t', R_0(\mathbf{x}' + \mathbf{v}_0 t')).$$

Alors U est solution de (2.5) si et seulement si \tilde{U} est solution de :

$$\partial_{t'} \tilde{U} + \partial_{x'} f_1(\tilde{U}) + \partial_{y'} f_2(\tilde{U}) + \partial_{z'} f_3(\tilde{U}) + c_1(\tilde{U}) \partial_{x'} \tilde{U} + c_2(\tilde{U}) \partial_{y'} \tilde{U} + c_3(\tilde{U}) \partial_{z'} \tilde{U} = 0, \quad (2.6)$$

où les fonctions f_1, f_2, f_3 et c_1, c_2, c_3 sont inchangées.

Remarque 2.1.1.

1. Une preuve d'un résultat similaire peut être trouvée dans [27] dans le cadre monophasique des équations d'Euler. Dans le cadre multiphasique, on peut trouver des preuves de l'invariance de systèmes similaires sous l'action du groupe des transformations dites objectives, dont les transformations Galiléennes et les rotations constituent un sous-groupe, voir par exemple [51, 42].
2. La condition $\sum_{j=1}^N \theta_j(U) = 1$ est une condition nécessaire pour l'invariance par rotation du système. L'égalité $\sum_{j=1}^N \beta_{kl,j}(U) = 1$ découle d'une condition de consistance appelée réalisable interfacial pressure : lorsque les pressions phasiques sont à l'équilibre égales à une même pression p , les pressions d'interface doivent également être égales à p (voir [32, Annexe A]).
3. L'invariance par rotation du système (2.1) a des conséquences importantes, notamment pour l'approximation numérique, puisqu'elle permet de construire de façon simple des schémas numériques pour le modèle multi-D (2.1) à partir de schémas numériques pour la version unidimensionnelle du modèle. Dans la suite de ce chapitre, on se restreint à énoncer les principales propriétés de la version unidimensionnelle du modèle. Ces propriétés s'étendent naturellement au modèle multidimensionnel (2.1). Le système unidimensionnel s'écrit, pour $k = 1, \dots, N$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t \alpha_k + V_I(U) \partial_x \alpha_k = 0, \quad (2.7a)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \quad (2.7b)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k) + \sum_{l=1, l \neq k}^N P_{kl}(U) \partial_x \alpha_l = 0, \quad (2.7c)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k u_k) + V_I(U) \sum_{l=1, l \neq k}^N P_{kl}(U) \partial_x \alpha_l = 0. \quad (2.7d)$$

L'inconnue U doit appartenir à l'espace des états physiquement admissibles qui est donné par :

$$\Omega_U = \left\{ U = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 u_1, \dots, \alpha_N \rho_N u_N, \right. \\ \left. \alpha_1 \rho_1 E_1, \dots, \alpha_N \rho_N E_N)^T \in \mathbb{R}^{4N-1}, \text{ tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1, \right. \\ \left. \alpha_k \rho_k > 0 \text{ et } \alpha_k \rho_k (E_k - (u_k)^2/2) > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}.$$

2.1.2 Hyperbolicité du modèle unidimensionnel

L'une des principales propriétés des modèles multifluides de type Baer-Nunziato, c'est-à-dire des modèles multifluides qui ne vérifient pas l'équilibre des pressions, est leur caractère (faiblement) hyperbolique. On a le résultat suivant :

Théorème 2.1.2. *Le système unidimensionnel (2.7) admet les $4N - 1$ valeurs propres suivantes : $\sigma_1(U) = \dots = \sigma_{N-1}(U) = V_I(U)$, $\sigma_{N-1+k}(U) = u_k - c_k(\rho_k, e_k)$ pour $k = 1, \dots, N$, $\sigma_{2N-1+k}(U) = u_k + c_k(\rho_k, e_k)$ pour $k = 1, \dots, N$ et $\sigma_{3N-1+k}(U) = u_k$ pour $k = 1, \dots, N$, où*

$$c_k(\rho_k, e_k)^2 = \partial_{\rho_k} p_k(\rho_k, e_k) + p_k(\rho_k, e_k) / \rho_k^2 \partial_{e_k} p_k(\rho_k, e_k).$$

Si $c_k(\rho_k, e_k)^2 > 0$, alors le système (2.7) est faiblement hyperbolique sur Ω_U dans le sens suivant : toutes les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres à droite engendrent \mathbb{R}^{4N-1} si et seulement si

$$|u_k - V_I(U)| \neq c_k(\rho_k, e_k), \quad \forall k = 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $\sigma_{3N-1+k}(U) = u_k$ pour $k = 1, \dots, N$ sont linéairement dégénérés. Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $\sigma_{N-1+k}(U)$ et $\sigma_{2N-1+k}(U)$ pour $k = 1, \dots, N$ sont vraiment non linéaires. De plus, le champ associé à la valeur propre $V_I(U)$ est linéairement dégénéré si la vitesse interfaciale $V_I(U)$ est définie par l'une des fermetures suivantes :

$$V_I(U) = \sum_{k=1}^N \theta_k(U) u_k, \quad \theta_k(U) = \frac{\chi_k \alpha_k \rho_k}{\sum_{k=1}^N \chi_k \alpha_k \rho_k} \quad (2.9)$$

où $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_N)$ est soit égal à l'un des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^N , soit donné par $\chi = (1/N, \dots, 1/N)$.

Remarque 2.1.2.

1. Dans le cas diphasique $N = 2$, on s'attend à ce qu'une discontinuité initiale entre deux valeurs $\alpha_{1,L} \approx 0$ et $\alpha_{1,R} \approx 1$, qui traduit une interface entre deux zones quasi-monophasiques, soit préservée et non épaissie au cours du temps. Il est donc naturel de rechercher des lois de fermeture $V_I(U)$ qui assurent le caractère linéairement dégénéré de l'onde de vitesse $V_I(U)$ qui transporte les fractions statistiques α_k .
2. Le caractère linéairement dégénéré de l'onde de vitesse $V_I(U)$ permet de donner un sens aux produits non conservatifs dans le cadre des solutions faibles. Les discontinuités de taux de présence sont alors définies grâce aux invariants de Riemann de cette onde.
3. Ce résultat donne une famille de lois de fermeture $V_I(U)$ qui assurent le caractère linéairement dégénéré de l'onde de vitesse $V_I(U)$. Dans le cas $V_I(U) = u_1$ c'est un résultat connu depuis longtemps. Le caractère linéairement dégénéré de l'onde pour la loi de fermeture (2.9) avec $\chi = (1/N, \dots, 1/N)$ est démontré dans [16] pour le modèle diphasique et dans [29, 30] pour le modèle multifluide. Mentionnons également que dans le cadre diphasique ($N = 2$) il existe une classe un peu plus large de fermetures pour la vitesse interfaciale $V_I(U)$ [17].
4. Lorsque la condition (2.8) n'est pas vérifiée, on dit que le système (2.7) est résonant.

2.1.3 Entropies et convexité

La fermeture des pressions interfaciales $P_{kl}(U)$ est motivée par la dérivation d'une loi de conservation supplémentaire vérifiée par les solutions régulières du système. En notant

$$\eta(U) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k s_k, \quad \mathcal{F}_\eta(U) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k s_k u_k, \quad (2.10)$$

on montre que les solutions régulières de (2.7) vérifient

$$\partial_t \eta(U) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(U) + A(U, \partial_x U) = 0$$

où

$$A(U, \partial_x U) = \sum_{k=1}^N \frac{u_k - V_I(U)}{T_k} \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^N (p_k - P_{kl}(U)) \partial_x \alpha_l.$$

On a le résultat suivant dont on peut trouver une preuve dans [30, Annexe G] dans le cas immiscible à trois phases, et dans [31, 13] pour des modèles multifluides à champs miscibles.

Proposition 2.1.3. *On suppose que la vitesse interfaciale est donnée par l'une des lois de fermeture (2.9). Alors il existe une unique famille de pressions interfaciales $(P_{kl}(U))_{1 \leq l \neq k \leq N}$ de la forme (2.4) qui vérifie $A(U, \partial_x U) = 0$ pour tout U . Ces pressions interfaciales sont des **combinaisons linéaires** des pressions phasiques :*

$$P_{kl}(U) = \sum_{j=1}^N \beta_{kl,j}(U) p_j(\rho_j, e_j) \quad (2.11)$$

dont les coefficients $\beta_{kl,j}(U)$ ne dépendent que des fonctions $\theta_1(U), \dots, \theta_N(U)$ définissant la vitesse interfaciale $V_I(U)$ (voir (2.9)) et des températures phasiques T_1, \dots, T_N .

Exemple 2.1.1. *Supposons que $V_I(U) = u_1$. Alors l'unique famille de pressions interfaciales de la forme (2.4) qui assure que $A(U, \partial_x U) = 0$ est donnée par :*

$$\begin{cases} P_{1l}(U) = p_l(\rho_l, e_l), & \text{pour } l = 2, \dots, N \\ P_{kl}(U) = p_k(\rho_k, e_k), & \text{pour } k = 2, \dots, N \text{ et } l = 1, \dots, N, \quad l \neq k. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ce cas précis, le système (2.7) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + u_1 \partial_x \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1(\rho_1, e_1)) + \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l, e_l) \partial_x \alpha_l &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 E_1 u_1 + \alpha_1 p_1(\rho_1, e_1) u_1) + u_1 \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l, e_l) \partial_x \alpha_l &= 0, \end{aligned}$$

et pour $k = 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + u_1 \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k(\rho_k, e_k)) - p_k(\rho_k, e_k) \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k, e_k) u_k) - u_1 p_k(\rho_k, e_k) \partial_x \alpha_k &= 0, \end{aligned}$$

et on montre que les solutions régulières satisfont des équations d'entropie conservatives pour chaque phase :

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k s_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k s_k u_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

On a le résultat suivant qui énonce la convexité des entropies phasiques comme fonctions de l'inconnue principale U . Ce résultat fut d'abord démontré dans [19] pour le cas diphasique, puis dans [47] pour le cas général à N phases.

Théorème 2.1.4. *Pour tout $k = 1, \dots, N$, l'entropie spécifique fractionnelle de la phase k définie par*

$$(\alpha_k \rho_k s_k) : U \mapsto (\alpha_k \rho_k s_k)(U)$$

est une fonction convexe, mais non strictement convexe de U . Par conséquent, l'entropie totale de mélange $\eta(U) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k s_k(U)$ est également une fonction convexe mais non strictement convexe de U .

Remarque 2.1.3. *Il est remarquable que la convexité de l'entropie de mélange soit vraie pour toute loi d'état admissible, c'est-à-dire qui vérifie (2.3) avec une fonction s_k convexe en le couple (τ_k, e_k) . De plus, cette propriété s'étend au modèle multi-dimensionnel en raison de l'invariance par rotation des équations.*

La fonction $\eta(U)$ étant convexe et satisfaisant une loi de conservation pour les solutions régulières, il s'agit d'une entropie mathématique naturelle pour le système (2.7). On dira que les solutions faibles entropiques (et donc physiquement admissibles) sont les solutions faibles qui vérifient l'inégalité

$$\partial_t \eta(U) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(U) \leq 0.$$

Remarque 2.1.4. *Dans le cas particulier de la fermeture $V_I(U) = u_1$ et des pressions interfaciales $(P_{kl}(U))_{1 \leq l \neq k \leq N}$ données par (2.12), toutes les fonctions $(\alpha_k \rho_k s_k)(U)$ sont des entropies naturelles. On dira alors que les solutions faibles entropiques sont les solutions faibles qui satisfont, au sens faible, les inégalités :*

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k s_k)(U) + \partial_x (\alpha_k \rho_k s_k u_k)(U) \leq 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

2.1.4 Symétrisabilité du système

Définition 2.1.1. *On dit que le système (2.7) est symétrisable s'il existe un C^1 -difféomorphisme $\mathbb{R}^{4N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{4N-1}$, $U \mapsto \mathcal{U}$, une matrice symétrique définie positive $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, et une matrice symétrique $\mathcal{Q}(\mathcal{U})$ tels que les solutions régulières de (2.7) satisfont :*

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}) \partial_t \mathcal{U} + \mathcal{Q}(\mathcal{U}) \partial_x \mathcal{U} = 0.$$

La symétrisabilité est une propriété plus forte que l'hyperbolicité. Elle permet, à l'aide d'un théorème de point fixe de Leray-Schauder de montrer que le problème de Cauchy est bien posé localement en temps pour des données initiales régulières (voir [41]). Un système conservatif possédant une entropie strictement convexe peut être symétrisé en choisissant pour $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ la hessienne de l'entropie. Comme le système (2.7) n'est pas conservatif et que l'entropie de mélange $\eta(U)$ définie en (2.10) n'est pas strictement convexe, on ne peut utiliser sa matrice hessienne pour démontrer la symétrisabilité du système (2.7). Cependant, on peut construire à la main une matrice symétrique définie positive $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ qui symétrise le système. L'idée est de s'appuyer sur les variables de symétrisation des équations d'Euler monophasiques qui sont (u_k, p_k, s_k) . Le résultat suivant fut d'abord démontré dans [19] pour le cas diphasique, puis dans [47] pour le cas général à N phases.

Théorème 2.1.5. *On suppose les lois de fermetures $V_I(U) = u_1$ et $(P_{kl}(U))_{1 \leq l \neq k \leq N}$ données par (2.12). Alors le système (2.7) est symétrisable sous la condition de non résonance (2.8).*

Notons que là encore, la propriété de symétrisabilité du système (en dehors des zones de résonance) est vraie pour toute loi d'état admissible et s'étend au modèle multi-dimensionnel en raison de l'invariance par rotation des équations.

2.2 Le modèle multifluide à N phases barotrope

Le modèle multifluide barotrope est un modèle dont les inconnues physiques sont $\alpha_k(t, \mathbf{x})$, $\rho_k(t, \mathbf{x})$, et $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{x})$, la fraction statistique, la masse volumique et la vitesse moyennes de la phase k (pour $k = 1, \dots, N$). Les pressions phasiques ne dépendent que de la masse volumique de la phase correspondante. Les lois d'états sont donc données par des fonctions :

$$\rho_k \mapsto p_k(\rho_k)$$

que l'on suppose strictement croissantes. Le modèle, composé de $5N - 1$ équations, s'écrit pour $k = 1, \dots, N$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\partial_t \alpha_k + \mathbf{V}_I(\mathbb{U}) \cdot \nabla \alpha_k = 0, \quad (2.14a)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \quad (2.14b)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (\alpha_k p_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(\mathbb{U}) \nabla \alpha_l = 0, \quad (2.14c)$$

avec la contrainte de saturation :

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1.$$

L'espace des états physiquement admissibles est défini par

$$\Omega_{\mathbb{U}} = \left\{ \mathbb{U} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1, \dots, \alpha_N \rho_N \mathbf{u}_N)^T \in \mathbb{R}^{5N-1}, \right. \\ \left. \text{tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1 \text{ et } \alpha_k \rho_k > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}.$$

La version unidimensionnelle du modèle s'écrit, pour $k = 1, \dots, N$, $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$

$$\partial_t \alpha_k + V_I(\mathbb{U}) \partial_x \alpha_k = 0, \quad (2.15a)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \quad (2.15b)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(\mathbb{U}) \partial_x \alpha_l = 0. \quad (2.15c)$$

Ce système a des propriétés mathématiques similaires au système non barotrope (avec équations d'énergie) : invariance par rotation et par changement de référentiel Galiléen, hyperbolicité, existence d'une entropie mathématique convexe (qui ici est homogène à une énergie), symétrisabilité. La propriété d'invariance s'exprime de manière identique au cas non barotrope. On énonce ci-dessous les propriétés d'hyperbolicité, l'existence d'une entropie convexe et la symétrisabilité du modèle barotrope. On renvoie à [19, 47] pour les preuves de ces résultats.

2.2.1 Hyperbolicité du modèle à N phases barotrope unidimensionnel

Théorème 2.2.1. *Le système (2.15) est faiblement hyperbolique sur $\Omega_{\mathbb{U}}$. Il admet les $3N - 1$ valeurs propres réelles suivantes : $\sigma_1(\mathbb{U}) = \dots = \sigma_{N-1}(\mathbb{U}) = V_I(\mathbb{U})$, $\sigma_{N-1+k}(\mathbb{U}) = u_k - c_k(\rho_k)$ pour $k = 1, \dots, N$ et $\sigma_{2N-1+k}(\mathbb{U}) = u_k + c_k(\rho_k)$ pour $k = 1, \dots, N$, où $c_k(\rho_k) = \sqrt{p'_k(\rho_k)}$. Les vecteurs propres correspondants engendrent l'espace \mathbb{R}^{3N-1} si et seulement si*

$$|V_I(\mathbb{U}) - u_k| \neq c_k(\rho_k), \quad \forall k = 2, \dots, N. \quad (2.16)$$

Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $\sigma_{N-1+k}(\mathbb{U})$ et $\sigma_{2N-1+k}(\mathbb{U})$ pour $k = 1, \dots, N$ sont vraiment non linéaires. De plus, le champ associé à la valeur propre $V_I(\mathbb{U})$ est linéairement dégénéré si la vitesse interfaciale $V_I(\mathbb{U})$ est définie par l'une des fermetures

$$V_I(\mathbb{U}) = \sum_{k=1}^N \theta_k(\mathbb{U}) u_k, \quad \theta_k(\mathbb{U}) = \frac{\chi_k \alpha_k \rho_k}{\sum_{k=1}^N \chi_k \alpha_k \rho_k} \quad (2.17)$$

où $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_N)$ est soit égal à l'un des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^N , soit donné par $\chi = (1/N, \dots, 1/N)$.

2.2.2 Énergies et entropies mathématiques

Les lois de fermeture des pressions interfaciales $(P_{kl}(\mathbb{U}))_{1 \leq k \neq l \leq N}$ sont déterminées de manière à imposer une loi de conservation supplémentaire pour les solutions régulières. On définit les énergies internes spécifiques e_k comme des fonctions déterminées à partir des lois de pressions par la relation $e'_k(\rho_k) = p_k(\rho_k)/\rho_k^2$. L'énergie totale de la phase k est alors définie par

$$E_k = \frac{u_k^2}{2} + e_k(\rho_k).$$

On définit enfin l'énergie totale de mélange et son flux par :

$$\eta(\mathbb{U}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k E_k, \quad \mathcal{F}_\eta(\mathbb{U}) = \sum_{k=1}^N (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k) u_k). \quad (2.18)$$

On montre que pour une fermeture sur la vitesse interfaciale $V_I(\mathbb{U})$ donnée par (2.17), il existe une unique famille de pressions interfaciales $(P_{kl}(\mathbb{U}))_{1 \leq k \neq l \leq N}$ de la forme (2.4) telles que l'évolution de l'énergie totale soit régie par une loi de conservation :

$$\partial_t \eta(\mathbb{U}) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(\mathbb{U}) = 0.$$

Exemple 2.2.1. Dans le cas des lois de fermetures suivantes pour les vitesses et pressions interfaciales

$$V_I(\mathbb{U}) = u_1, \quad \text{et} \quad \begin{aligned} P_{1l}(\mathbb{U}) &= p_l(\rho_l), & \text{pour } l = 2, \dots, N \\ P_{kl}(\mathbb{U}) &= p_k(\rho_k), & \text{pour } k \geq 2 \text{ et } l = 1, \dots, N, l \neq k, \end{aligned} \quad (2.19)$$

le système (2.15) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + u_1 \partial_x \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1(\rho_1)) + \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l) \partial_x \alpha_l &= 0, \end{aligned}$$

et pour $k = 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + u_1 \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k(\rho_k)) - p_k(\rho_k) \partial_x \alpha_k &= 0, \end{aligned}$$

et on montre que les solutions régulières de (2.15) satisfont :

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 E_1 u_1 + \alpha_1 p_1(\rho_1) u_1) + u_1 \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l) \partial_x \alpha_l = 0, \quad (2.20)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k) u_k) - u_1 p_k(\rho_k) \partial_x \alpha_k = 0, \quad k = 2, \dots, N. \quad (2.21)$$

En sommant pour $k = 1, \dots, N$, on voit que les solutions régulières de (2.15) vérifient une loi de conservation supplémentaire portant sur l'énergie totale de mélange :

$$\partial_t \eta(\mathbb{U}) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(\mathbb{U}) = 0. \quad (2.22)$$

On a le résultat de convexité suivant :

Théorème 2.2.2. Pour tout $k = 1, \dots, N$, l'énergie spécifique fractionnelle de la phase k , définie par

$$(\alpha_k \rho_k E_k) : \mathbb{U} \mapsto (\alpha_k \rho_k E_k)(\mathbb{U}),$$

est une fonction convexe, mais non strictement convexe de \mathbb{U} . Par conséquent, l'énergie totale de mélange $\eta(\mathbb{U})$ est également une fonction (non strictement) convexe de \mathbb{U} .

On peut donc utiliser l'énergie totale de mélange comme une entropie mathématique du système. On appellera solutions faibles entropiques de (2.15) les solutions faibles qui satisfont, au sens faible, l'inégalité

$$\partial_t \eta(\mathbb{U}) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(\mathbb{U}) \leq 0. \quad (2.23)$$

2.2.3 Symétrisabilité du modèle barotrope

On a le résultat suivant, dont la preuve est analogue au cas non barotrope.

Théorème 2.2.3. *On suppose que les lois de fermeture sur les vitesses et pressions interfaciales sont données par (2.19). Alors le système (2.15) est symétrisable tant que la condition de non résonance (2.16) est vérifiée.*

Chapitre 3

Schémas de relaxation à la *Suliciu* pour les modèles de type Baer-Nunziato

3.1	Rappels sur le schéma de Godunov	40
3.2	Schéma de relaxation à la <i>Suliciu</i> pour les équations d'Euler	43
3.2.1	Approximation par relaxation à la <i>Suliciu</i>	44
3.2.2	Schéma de relaxation pour les équations d'Euler barotropes	45
3.2.3	Extension du schéma de relaxation au modèle d'Euler non barotrope	48
3.3	Schémas de relaxation à la <i>Suliciu</i> pour les modèles multiphasiques	52
3.3.1	Solveur de Riemann de relaxation	53
3.3.2	Le schéma numérique issu de l'approximation par relaxation	58
3.3.3	Quelques résultats numériques pour le modèle triphasique barotrope	59
3.3.4	Schéma de relaxation pour le modèle complet avec énergies	62
3.3.5	Un cas test pour le système diphasique ($N = 2$) avec énergies	66
3.4	Extension à un modèle multifluide avec champs miscibles	69
3.4.1	Schéma de relaxation	70
3.4.2	Un cas test numérique	70
3.5	Extension multidimensionnelle du schéma de relaxation	73
3.5.1	Schéma de volumes finis sur maillages non structurés	73
3.5.2	Un cas test numérique en dimension 2	75

Dans ce chapitre, on s'intéresse au développement de méthodes numériques pour approcher les solutions faibles entropiques des modèles multifluides à N phases présentés dans le chapitre précédent. Concernant l'approximation numérique des modèles bifluides de type Baer-Nunziato (lorsque $N = 2$), il existe une importante littérature. On peut citer par exemple des solveurs basés sur le problème de Riemann exact ou approché comme ceux proposés par Schwendeman *et al.* [50], Deledicque-Papalexandris [22], Saurel-Abgrall [48], Ambroso *et al.* [3, 4], Thanh *et al.* [54, 55], Karni-Hernández-Dueñas [40], Tokareva-Toro [56]. Ait-Ameur *et al.* [2] proposent un schéma numérique implicite-explicite basé sur un splitting entre les phénomènes de transport et les phénomènes acoustiques. On peut également citer des schémas numériques basés sur des discrétisations sur grilles décalées [21].

Concernant les modèles multifluides à plus de trois phases en revanche, la littérature numérique est beaucoup moins abondante. Les seuls schémas existants sont des généralisations du schéma de Rusanov [6, 7].

Les applications visées, notamment dans l'industrie nucléaire civile, font intervenir des écoulements fortement instationnaires et mettant en jeu des échelles de temps très différentes. Il est donc nécessaire

de disposer de méthodes numériques extrêmement stables et robustes. En particulier, il est important de développer des méthodes assurant la positivité des masses volumiques et des énergies internes (ou de manière équivalente des masses volumiques et des températures) et pour lesquelles il est possible de démontrer des inégalités d'entropie discrètes. Un schéma numérique disposant de ces propriétés est le schéma de Godunov qui s'appuie sur un solveur exact pour le problème de Riemann. Malheureusement, en raison de la présence de champs non linéaires et du fort couplage entre les phases occasionné par les termes non conservatifs, la résolution exacte du problème de Riemann reste à ce jour un problème ouvert, et ce même dans le cas bifluide $N = 2$.

Une approche fructueuse est la construction d'un solveur de Riemann approché grâce à la technique d'approximation par relaxation dite à la *Suliciu*. Il s'agit de construire un solveur de Riemann exact pour un système approché obtenu en relaxant les non linéarités des lois de pression. Le système relaxé obtenu est un système, certes plus grand, mais dont les champs sont tous linéairement dégénérés, ce qui rend la résolution du problème de Riemann compliquée mais possible. On en déduit alors un schéma de volumes finis défini par un solveur de Riemann approché (on parle de méthode de Godunov approchée). Au cours de ma thèse, j'ai développé un schéma numérique par relaxation à la *Suliciu* dans le cas du modèle bifluide $N = 2$. J'ai ensuite étendu ce schéma au cas du modèle multifuide à N phases avec N arbitraire.

Dans ce chapitre, après avoir rappelé quelques notions et propriétés du schéma de Godunov, je présente la technique d'approximation par relaxation à la Suliciu dans le cas simple monophasique des équations d'Euler. Je présente ensuite le développement du schéma numérique de relaxation pour le modèle multifuide à N phases.

Les travaux décrits dans ce chapitre font l'objet des publications suivantes :

- 1 J. BUSSAC et K. SALEH. « Numerical Simulation of a Barotropic Two-Phase Flow Model with Miscible Phases ». In : *Finite Volumes for Complex Applications X—Volume 2, Hyperbolic and Related Problems*. Cham : Springer Nature Switzerland, 2023, p. 63-71.
- 2 F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « A Robust Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Isentropic Baer-Nunziato Model ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48.1 (2014). 42 pages, p. 165-206.
- 3 F. COQUEL, HÉRARD, J.-M. et K. SALEH. « A Positive and Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Baer-Nunziato Model ». In : *Journal of Computational Physics* 330 (2017), p. 401-435.
- 4 J.-M. HÉRARD, O. HURISSE, A. MORENTE et K. SALEH. « Application of a two-fluid model to simulate the heating of two-phase flows ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VII—Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems : FVCA 7, Berlin, June 2014*. Springer, 2014, p. 857-864.
- 5 K. SALEH. « A relaxation scheme for a hyperbolic multiphase flow model - Part I : Barotropic EOS ». In : *ESAIM : M2AN* 53.5 (2019), p. 1763-1795.

3.1 Rappels sur le schéma de Godunov

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x f(\mathbb{U}) &= 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{U}(x, 0) &= \mathbb{U}_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

d'inconnue $\mathbb{U} : (t, x) \mapsto \Omega_{\mathbb{U}} \subset \mathbb{R}^d$. L'ensemble $\Omega_{\mathbb{U}}$ correspond à des contraintes d'admissibilité sur la solution qui peuvent être par exemple des contraintes de positivité sur certaines composantes de \mathbb{U} . On suppose que le système est hyperbolique c'est-à-dire que le flux $f : \Omega_{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est régulier et que la matrice $\nabla_{\mathbb{U}} f(\mathbb{U})$ est diagonalisable dans \mathbb{R} de valeurs propres $\sigma_i(\mathbb{U})$, $i = 1, \dots, d$. On suppose en outre qu'il existe une entropie mathématique pour ce système c'est-à-dire une fonction convexe $\eta : \Omega_{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{R}$

et une fonction $\mathcal{F}_\eta : \Omega_{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que les solutions régulières de (3.1) satisfont la loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t \eta(\mathbb{U}) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(\mathbb{U}) = 0. \quad (3.2)$$

On appelle solution faible entropique de (3.1) une solution faible qui satisfait, au sens faible, l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \eta(\mathbb{U}) + \partial_x \mathcal{F}_\eta(\mathbb{U}) \leq 0. \quad (3.3)$$

On suppose enfin que l'on peut calculer la solution faible entropique (supposée unique) du problème de Riemann, c'est-à-dire du problème de Cauchy avec la donnée initiale discontinue

$$\mathbb{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où $(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) \in \Omega_{\mathbb{U}}^2$. On suppose que cette solution, qui est alors nécessairement auto-semblable et que l'on notera

$$\mathbb{U}(t, x) = \mathbb{U}_{\text{R,ex}} \left(\frac{x}{t}; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R \right), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

est composée par des états constants séparés par un nombre fini d'ondes (de choc ou de détente) se propageant à des vitesses qui sont majorées par la quantité

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, d} \max (|\sigma_i(\mathbb{U}_L)|, |\sigma_i(\mathbb{U}_R)|).$$

En particulier, si $x/t < -\lambda$, on a $\mathbb{U}(t, x) = \mathbb{U}_L$ et si $x/t > \lambda$, on a $\mathbb{U}(t, x) = \mathbb{U}_R$.

On cherche à approcher les solutions faibles entropiques de (3.1). On se donne des pas de temps et d'espace Δt et Δx supposés constants pour simplifier. L'espace est partitionné en cellules $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ où $C_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ avec $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ pour tout j dans \mathbb{Z} . On introduit les temps discrets $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. La solution approchée au temps t^n est une fonction constante par morceaux $\mathbb{U}_\Delta(t^n, x)$ dont la valeur sur la cellule C_j est notée $\mathbb{U}_j^n \in \Omega_{\mathbb{U}}$:

$$\mathbb{U}_\Delta(t^n, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{U}_j^n \mathbf{1}_{C_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On initialise le schéma en posant

$$\mathbb{U}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbb{U}_0(x) dx, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Le schéma de Godunov est un schéma itératif permettant de calculer, en deux étapes, l'approximation constante par morceaux au temps t^{n+1} , $(\mathbb{U}_j^{n+1})_{j \in \mathbb{Z}}$, à partir de l'approximation constante par morceaux au temps t^n , $(\mathbb{U}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$.

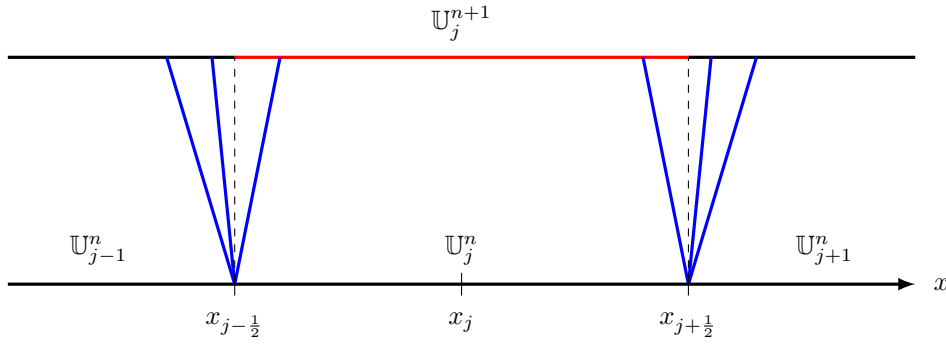
Étape 1 : La première étape consiste à résoudre (3.1) pour $t \in]t^n, t^{n+1}[$ avec la donnée initiale constante par morceaux $\mathbb{U}_0 = \mathbb{U}_\Delta(t^n, \cdot)$. Pour les petits temps, la solution est obtenue en superposant les solutions des problèmes de Riemann issus des discontinuités aux interfaces $x_{j+\frac{1}{2}}$, $j \in \mathbb{Z}$ entre les cellules. Ainsi, si le pas de temps Δt est suffisamment petit de manière à satisfaire la condition CFL

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} \max_{i=1, \dots, d} |\sigma_i(\mathbb{U}_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

alors les ondes issues des diverses solutions des problèmes de Riemann n'interagissent pas avant le temps $t = t^{n+1}$ et la solution au temps t^{n+1} est donnée par

$$\mathbb{U}(t^{n+1}, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{U}_{\text{R,ex}} \left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n \right) \mathbf{1}_{]x_j, x_{j+1}[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$.



Étape 2 : La deuxième étape permet de revenir à une approximation constante par morceaux au temps t^{n+1} en calculant les moyennes de la fonction $\mathbb{U}(t^{n+1}, x)$ issue de la première étape sur les cellules C_j :

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbb{U}(t^{n+1}, x) dx, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, on obtient que si l'espace des états admissibles $\Omega_{\mathbb{U}}$ est un convexe de \mathbb{R}^d , alors $\mathbb{U}_j^{n+1} \in \Omega_{\mathbb{U}}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Écriture sous la forme d'un schéma volumes finis conservatif : Le schéma de Godunov peut se mettre sous la forme d'un schéma de volumes finis conservatif explicite. En effet, comme la fonction $\mathbb{U}(t, x)$ considérée à l'étape 1 est la solution faible entropique du problème de Cauchy (3.1) pour la donnée initiale constante par morceaux $\mathbb{U}_0 = \mathbb{U}_{\Delta}(t^n, \cdot)$, en intégrant le système (3.1) sur $]t^n, t^{n+1}[\times]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ on montre que :

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \mathbb{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbb{F}(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - \mathbb{F}(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right) \quad (3.5)$$

où le flux numérique est défini (la fonction $\xi \mapsto f(\mathbb{U}_{R,\text{ex}}(\xi; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R))$ est continue en zéro en raison de la condition de saut de Rankine-Hugoniot) par

$$\mathbb{F}(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = f(\mathbb{U}_{R,\text{ex}}(0; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R)).$$

Ce flux numérique est consistant avec le flux physique au sens où $F(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = f(\mathbb{U})$ pour tout $\mathbb{U} \in \Omega_{\mathbb{U}}$. De même, en intégrant l'inégalité d'entropie (3.3) sur $]t^n, t^{n+1}[\times]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$, on montre que la solution discrète satisfait l'inégalité d'entropie discrète suivante :

$$\eta(\mathbb{U}_j^{n+1}) \leq \eta(\mathbb{U}_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(G(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - G(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right) \quad (3.6)$$

où le flux d'entropie numérique peut être pris égal à :

$$G(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = \mathcal{F}_{\eta} \left(\mathbb{U}_{R,\text{ex}} \left(0^+; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R \right) \right).$$

La aussi, ce flux d'entropie numérique est consistant avec le flux d'entropie physique au sens où $G(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = \mathcal{F}_{\eta}(\mathbb{U})$ pour tout $\mathbb{U} \in \Omega_{\mathbb{U}}$.

Le schéma de Godunov est un très bon schéma numérique (d'ordre un) dès lors que la solution $\mathbb{U}_{R,\text{ex}}(x/t; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R)$ générique du problème de Riemann est relativement facile à calculer. Il est robuste au sens où il permet de préserver les contraintes d'admissibilité telles que la positivité d'une des composantes de \mathbb{U} . Il vérifie une propriété de stabilité non linéaire découlant de l'inégalité d'entropie discrète (3.6). Enfin, le caractère conservatif de ce schéma et de l'inégalité d'entropie discrète permet de montrer que le schéma vérifie la consistance au sens de Lax-Wendroff : si la solution du schéma converge (pour des topologies suffisamment fortes) lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ vers une fonction, alors cette fonction est une solution faible entropique de (3.1).

Lorsque la solution exacte du problème de Riemann ne peut être calculée, ou ne peut être calculée sans occasionner une lourde complexité numérique, une stratégie usuelle consiste à construire un schéma de volumes finis conservatif à partir d'un *solveur de Riemann approché*, qui est une solution approchée $\mathbb{U}_{R,\text{app}}(x/t; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R)$ du problème de Riemann pour (3.1). La fonction $\mathbb{U}_{R,\text{app}}$ est en général une solution simplifiée, qui contient par exemple un petit nombre d'ondes simples (par exemple, uniquement des discontinuités comme pour le schéma de Roe) et le schéma qui en résulte est un schéma de Godunov *approché*. On peut citer par exemple les schémas de Rusanov, HHL (ou encore HLLC pour les équations d'Euler), de Roe ou de VF-Roe qui entrent tous dans le cadre des schémas de Godunov approchés. Certains de ces schémas jouissent des mêmes propriétés de robustesse et de consistance avec l'inégalité d'entropie que le schéma de Godunov. Ils sont cependant plus simples à mettre en œuvre.

3.2 Schéma de relaxation à la Suliciu pour les équations d'Euler

En raison de la présence de termes non conservatifs qui entraînent un fort couplage entre les phases et de la présence d'ondes acoustiques non linéaires, la résolution explicite du problème de Riemann pour les modèles multifluides présentés au chapitre précédent est un problème ouvert, même dans le cas diphasique $N = 2$, ce qui rend inopérant le schéma de Godunov. On cherche donc à développer un solveur de Riemann approché pour le problème de Riemann à l'aide de la méthode d'approximation par relaxation à la Suliciu. Il s'agit d'approcher le modèle multifluide par un système d'EDP plus grand partiellement linéarisé, dit *système relaxé*, qui restitue le modèle de départ dans la limite d'un petit paramètre tendant vers zéro. On construit alors un solveur de Riemann exact pour le système relaxé, pour lequel le problème de Riemann est relativement facile à résoudre, et on en déduit un solveur de Riemann approché pour le système de départ.

Remarque 3.2.1. *Schwendeman et al. [50] ont certes développé un schéma numérique s'appuyant sur la solution exacte du problème de Riemann pour le modèle de Baer-Nunziato (sans termes sources), mais celle-ci est calculée numériquement à partir de la résolution d'un point fixe portant sur un système d'équations non linéaires. En particulier, il n'existe pas de résultat mathématique qui assure l'existence de la solution du problème de Riemann pour toute donnée initiale, ni la convergence de la méthode itérative permettant de calculer cette solution.*

On présente dans cette section la méthode de relaxation à la Suliciu dans le cas simplifié des équations d'Euler. La section suivante sera consacrée à l'extension de la méthode au modèle multifluide. Dans un premier temps on cherche à approcher les solutions du système des équations d'Euler barotropes en dimension un d'espace qui s'écrit pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad (3.7a)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho)) = 0. \quad (3.7b)$$

La loi de pression $\rho \mapsto p(\rho)$ est une fonction régulière strictement croissante. La solution recherchée est à valeurs dans l'ensemble des états admissibles suivant :

$$\Omega_{\mathbb{U}} = \left\{ \mathbb{U} = (\rho, \rho u) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } \rho > 0 \right\}.$$

On s'intéresse aux solutions faibles entropiques. Il s'agit des solutions faibles qui vérifient l'inégalité d'énergie

$$\partial_t(\rho E)(\mathbb{U}) + \partial_x(\rho E u + p(\rho)u)(\mathbb{U}) \leq 0, \quad (3.8)$$

où l'énergie est une fonction convexe de l'inconnue \mathbb{U} définie par $(\rho E)(\mathbb{U}) = \rho \left(\frac{u^2}{2} + e(\rho) \right)$ où $e(\rho)$ est une primitive de $p(\rho)/\rho^2$. Il est connu que le système (3.7) est un système hyperbolique admettant deux valeurs propres $(u \pm c(\rho))$ avec $c(\rho)^2 = p'(\rho)$ associées à des champs vraiment non linéaires, ce qui rend la solution du problème de Riemann relativement difficile (mais dans le cas présent pas impossible) à calculer.

3.2.1 Approximation par relaxation à la Suliciu

On approche, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, le système (3.7) par le système relaxé suivant : pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \quad (3.9a)$$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2 + \pi(\tau_\varepsilon, \mathcal{T}_\varepsilon)) = 0, \quad (3.9b)$$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \rho_\varepsilon (\tau_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon), \quad (3.9c)$$

d'inconnue $(t, x) \mapsto \mathbb{W}_\varepsilon(t, x) = (\rho_\varepsilon, \rho_\varepsilon u_\varepsilon, \rho_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon)(t, x)$ recherchée dans l'espace :

$$\Omega_{\mathbb{W}} = \left\{ \mathbb{W} = (\rho, \rho u, \rho \mathcal{T}) \in \mathbb{R}^3, \text{ t.q. } \rho > 0 \text{ et } \rho \mathcal{T} > 0 \right\}.$$

L'espace des états admissibles pour les équations d'Euler $\Omega_{\mathbb{U}}$ est alors une sous-variété de $\Omega_{\mathbb{W}}$ appelée *variété d'équilibre*. Dans ce système relaxé, notant $\tau = \rho^{-1}$ le volume spécifique et $\mathcal{P}(\tau) = p(\tau^{-1})$, la pression relaxée est linéaire en τ :

$$\pi(\tau, \mathcal{T}) = \mathcal{P}(\mathcal{T}) + a^2(\mathcal{T} - \tau), \quad (3.10)$$

où $a > 0$ est un paramètre. Formellement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, l'équation (3.9c) donne $\tau_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon \rightarrow 0$ et à la limite, les équations (3.9a)-(3.9b) restituent le système (3.7). La paramètre a est choisi de manière à satisfaire la condition suivante, appelée *condition de Whitham* :

$$a^2 > -\mathcal{P}'(\mathcal{T}). \quad (3.11)$$

On montre que les solutions régulières de (3.9) vérifient

$$\partial_t(\rho_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon \mathcal{E}_\varepsilon u_\varepsilon + \pi(\tau_\varepsilon, \mathcal{T}_\varepsilon) u_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_\varepsilon (a^2 + \mathcal{P}'(\mathcal{T}_\varepsilon)) (\tau_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon)^2, \quad (3.12)$$

pour l'énergie relaxée $\mathcal{E}(u, \tau, \mathcal{T}) = \frac{u^2}{2} + e(\mathcal{T}^{-1}) + \frac{\pi(\tau, \mathcal{T})^2 - \mathcal{P}(\mathcal{T})^2}{2a^2}$ qui, sous la condition de Whitham (3.11), satisfait au principe de Gibbs suivant

$$\tau = \operatorname{argmin}_{\mathcal{T}} \{\mathcal{E}(u, \tau, \mathcal{T})\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(u, \tau, \tau) = E(\rho, u) = \frac{u^2}{2} + e(\rho). \quad (3.13)$$

Cette propriété exprime que l'énergie relaxée est minimale lorsque la variable de relaxation \mathcal{T} est à l'équilibre c'est-à-dire égale au volume spécifique τ et que dans ce cas, l'énergie relaxée est égale à l'énergie du système de départ. En vertu de (3.12), l'énergie relaxée peut être vue comme une fonctionnelle de Lyapunov qui a pour effet de forcer le retour vers l'équilibre.

Remarque 3.2.2. *En effectuant un développement de Chapman-Enskog pour évaluer la déviation au premier ordre de \mathcal{T}_ε par rapport à τ_ε , $\mathcal{T}_\varepsilon = \tau_\varepsilon + \varepsilon \mathcal{T}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, on obtient l'approximation suivante du système relaxé :*

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) &= 0, \\ \partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2 + p(\tau_\varepsilon)) &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_x \left((a^2 + \mathcal{P}'(\tau_\varepsilon)) \tau_\varepsilon \partial_x u_\varepsilon \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, sous la condition sous-caractéristique de Whitham, le système relaxé est une perturbation visqueuse du système (3.7).

Comme le système relaxé restitue le système des équations d'Euler dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut envisager une approximation des solutions de (3.7) grâce à une procédure en deux étapes. Dans la première étape, la solution du système relaxé homogène (c'est-à-dire avec un second membre nul dans (3.9c)) est calculée. Dans une deuxième étape, la solution issue de la première étape est projetée sur

la variété d'équilibre $\Omega_{\mathbb{U}}$ en imposant $\mathcal{T} = \tau$. L'intérêt de cette approche est que le système convectif associé au système relaxé (3.9), que l'on note

$$\partial_t \mathbb{W} + \partial_x g(\mathbb{W}) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

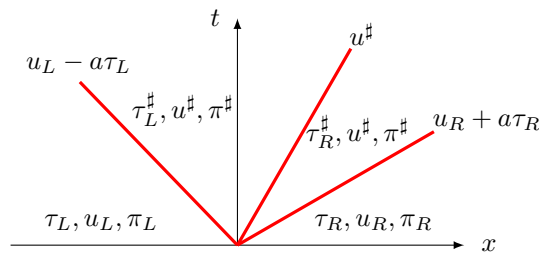
avec $g(\mathbb{W}) = (\rho u, \rho u^2 + \pi(\tau, \mathcal{T}), \rho \mathcal{T} u)$ admet trois champs linéairement dégénérés associés aux valeurs propres $u \pm a\tau$ et u . Pour cette raison, la solution du problème de Riemann associé à (3.14), pour la donnée initiale

$$\mathbb{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L = (\rho_L, \rho_L u_L, \rho_L \mathcal{T}_L) \in \Omega_{\mathbb{W}} & \text{si } x < 0, \\ \mathbb{W}_R = (\rho_R, \rho_R u_R, \rho_R \mathcal{T}_R) \in \Omega_{\mathbb{W}} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

peut être calculée. Notons

$$\mathbb{W}_{R,ex}(x/t; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

cette solution. Elle se calcule alors de manière extrêmement simple grâce aux invariants de Riemann associés aux ondes qui sont toutes linéairement dégénérées. En notant $\pi_L = \pi(\tau_L, \mathcal{T}_L)$ et $\pi_R = \pi(\tau_R, \mathcal{T}_R)$, la solution est de la forme suivante :



où les états intermédiaires sont déterminés par :

$$u^\# := \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2a}(\pi_R - \pi_L), \quad (3.15)$$

$$\pi^\# := \frac{1}{2}(\pi_R + \pi_L) - \frac{a}{2}(u_R - u_L), \quad (3.16)$$

$$\tau_L^\# := \tau_L + \frac{1}{a}(u^\# - u_L) = \tau_L + \frac{1}{2a}(u_R - u_L) - \frac{1}{2a^2}(\pi_R - \pi_L), \quad (3.17)$$

$$\tau_R^\# := \tau_R - \frac{1}{a}(u^\# - u_R) = \tau_R + \frac{1}{2a}(u_R - u_L) + \frac{1}{2a^2}(\pi_R - \pi_L). \quad (3.18)$$

Remarque 3.2.3. *Sous la condition de Whitham (3.11), l'application $\mathcal{T} \mapsto \pi(\tau, \mathcal{T})$ est un difféomorphisme. Il est donc équivalent de résoudre le problème en les variables (ρ, u, \mathcal{T}) ou en les variables (ρ, u, π) .*

Remarque 3.2.4. *Si les données initiales $(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_L)$ sont à l'équilibre c'est-à-dire si $\mathcal{T}_L = \tau_L$ et $\mathcal{T}_R = \tau_R$ alors, $\pi_L = p(\rho_L)$ et $\pi_R = p(\rho_R)$ sont indépendants du paramètre a . On peut alors choisir a suffisamment grand pour que les volumes spécifiques intermédiaires $\tau_L^\#$ et $\tau_R^\#$ soient positifs. La solution du problème de Riemann relaxé est alors bien à valeurs dans l'espace des états admissibles $\Omega_{\mathbb{W}}$.*

3.2.2 Schéma de relaxation pour les équations d'Euler barotropes

On cherche donc à approcher les solutions faibles entropiques du problème de Cauchy pour (3.7) avec une donnée initiale \mathbb{U}_0 . On se donne des pas de temps et d'espace Δt et Δx supposés constants pour simplifier. L'espace est partitionné en cellules $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ où $C_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ avec $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ pour tout j dans \mathbb{Z} . On introduit les temps discrets $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. La solution approchée au temps t^n est une fonction constante par morceaux $\mathbb{U}_\Delta(t^n, x)$ dont la valeur sur la cellule C_j est notée $\mathbb{U}_j^n \in \Omega_{\mathbb{U}}$:

$$\mathbb{U}_\Delta(t^n, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{U}_j^n \mathbf{1}_{C_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On initialise le schéma en posant

$$\mathbb{U}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbb{U}_0(x) dx, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Le schéma de relaxation à la Suliciu est un schéma itératif permettant de calculer, en deux étapes, l'approximation constante par morceaux au temps t^{n+1} à partir de l'approximation constante par morceaux au temps t^n .

Étape 1 : On résout le problème de Cauchy suivant pour le système relaxé convectif

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{W} + \partial_x g(\mathbb{W}) &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ \mathbb{W}(x, t = 0) &= \mathcal{M}(\mathbb{U}_\Delta(t^n, x)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

où

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x, y, 1). \end{cases}$$

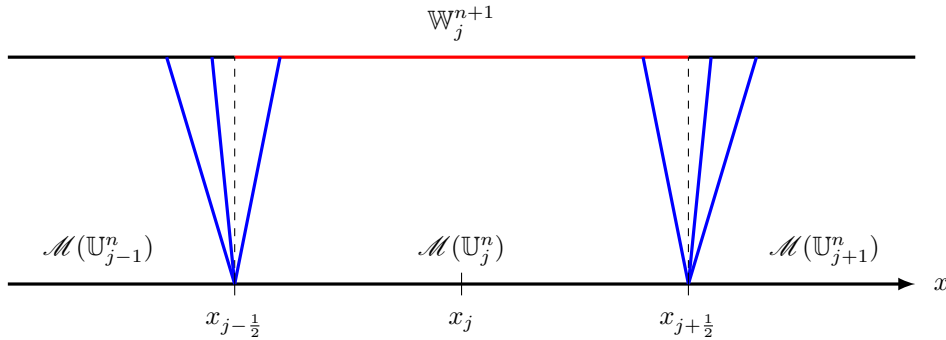
Ceci signifie que la donnée initiale pour le problème relaxé est obtenue à partir de $\mathbb{U}_\Delta(t^n, x)$ en prenant la variable \mathcal{T} à l'équilibre, c'est-à-dire égale au volume spécifique $\tau = \rho^{-1}$. Pour les petits temps, la solution est obtenue en superposant les solutions des problèmes de Riemann issus des discontinuités aux interfaces $x_{j+\frac{1}{2}}$, $j \in \mathbb{Z}$ entre les cellules. Ainsi, si le pas de temps Δt est suffisamment petit de manière à satisfaire la condition CFL

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} \max (|(u - a\tau)_j^n|, |u_j^n|, |(u + a\tau)_j^n|) \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2} \quad (3.20)$$

alors les ondes issues des diverses solutions des problèmes de Riemann n'interagissent pas avant le temps $t = t^{n+1}$ et la solution au temps t^{n+1} est donnée par

$$\mathbb{W}(t^{n+1}, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{W}_{\text{R,ex}} \left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; \mathcal{M}(\mathbb{U}_j^n), \mathcal{M}(\mathbb{U}_{j+1}^n) \right) \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$.



En choisissant le paramètre a suffisamment grand, on peut s'assurer que les solutions des divers problèmes de Riemann locaux ont des masses volumiques positives et on a donc que $\mathbb{W}(t^{n+1}, x) \in \Omega_{\mathbb{W}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons que le paramètre a peut être choisi localement autour de chaque interface $x_{j+\frac{1}{2}}$ et n'a pas besoin d'être uniforme.

Étape 2 : La deuxième étape permet de revenir à une approximation constante par morceaux au temps t^{n+1} . Pour cela on calcule (comme pour le schéma de Godunov) les moyennes de la fonction $\mathbb{W}(t^{n+1}, x)$ issue de la première étape sur les cellules C_j , puis on projette le résultat sur la variété d'équilibre en ne gardant que les variables $(\rho, \rho u)$:

$$\mathbb{W}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \mathbb{W}(t^{n+1}, x) dx, \quad \text{puis} \quad \mathbb{U}_j^{n+1} = \mathcal{P} \mathbb{W}_j^{n+1},$$

où

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x, y). \end{cases}$$

Comme la solution exacte $\mathbb{W}(t^{n+1}, x) = (\rho, \rho u, \rho \mathcal{T})(t^{n+1}, x)$ est telle que $\rho(t^{n+1}, x) > 0$ (puisqu'elle est à valeurs dans $\Omega_{\mathbb{W}}$), on obtient que $\mathbb{U}_j^{n+1} = (\rho_j^{n+1}, (\rho u)_j^{n+1})$ avec $\rho_j^{n+1} > 0$.

Écriture sous forme d'un schéma volumes finis conservatif : Ce schéma de relaxation peut être mis sous la forme d'un schéma de volumes finis conservatif. En effet, en procédant de même que pour le schéma de Godunov, on intègre le système (3.14) sur $]t^n, t^{n+1}[\times]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$:

$$\mathbb{W}_j^{n+1} = \mathbb{W}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(\mathbb{W}_{R,ex}(0; \mathcal{M}(\mathbb{U}_j), \mathcal{M}(\mathbb{U}_{j+1}))) - g(\mathbb{W}_{R,ex}(0; \mathcal{M}(\mathbb{U}_{j-1}), \mathcal{M}(\mathbb{U}_j))))). \quad (3.21)$$

Comme $\mathcal{P}\mathbb{W}_j^k = \mathbb{U}_j^k$ pour $k = n, n+1$ on obtient

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \mathbb{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbb{F}(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - \mathbb{F}(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n)) \quad (3.22)$$

où le flux numérique est défini par

$$\mathbb{F}(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = \mathcal{P}g(\mathbb{W}_{R,ex}(0; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R))).$$

Ce flux numérique est consistant avec le flux physique au sens où $F(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = f(\mathbb{U})$ pour tout \mathbb{U} . Il est également facile de vérifier que le schéma numérique vérifie une inégalité d'énergie discrète sous la condition de Whitham

$$a_{j+\frac{1}{2}}^2 > -\mathcal{P}'(\tau), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (3.23)$$

pour tout τ dans la solution du problème de Riemann relaxé en $x_{j+\frac{1}{2}}$. Comme $\mathbb{W}(t^{n+1}, x)$ est la solution exacte de (3.19), elle vérifie l'égalité d'énergie (faire $\varepsilon \rightarrow \infty$ dans (3.12))

$$\partial_t(\rho \mathcal{E})(\mathbb{W}) + \partial_x(\rho \mathcal{E}u + \pi(\tau, \mathcal{T})u)(\mathbb{W}) = 0.$$

En intégrant cette égalité sur $]t^n, t^{n+1}[\times]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (\rho \mathcal{E})(\mathbb{W}(t^{n+1}, x)) dx = (\rho \mathcal{E})(\mathbb{W}_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - G(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n))$$

avec $G(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = (\rho \mathcal{E}u + \pi(\tau, \mathcal{T})u)(\mathbb{W}_{R,ex}(0^+; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R)))$. Par convexité de $\mathbb{U} \mapsto (\rho E)(\mathbb{U})$ et par le principe de Gibbs (3.64) on obtient que :

$$(\rho E)(\mathbb{U}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (\rho E)(\mathbb{U}(t^{n+1}, x)) dx \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (\rho \mathcal{E})(\mathbb{W}(t^{n+1}, x)) dx.$$

On obtient donc que

$$(\rho E)(\mathbb{U}_j^{n+1}) \leq (\rho E)(\mathbb{U}_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - G(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n)),$$

et on peut montrer que le flux d'énergie numérique est consistant avec le flux d'énergie physique au sens où $G(\mathbb{U}, \mathbb{U}) = (\rho E u + p u)(\mathbb{U})$ pour tout $\mathbb{U} \in \Omega_{\mathbb{U}}$.

En conclusion, le schéma numérique basé sur l'approximation par relaxation à la Suliciu est donc un schéma de volumes finis conservatif jouissant des mêmes propriétés que le schéma de Godunov : positivité des masses volumiques et inégalité d'énergie discrète. Il est cependant plus simple et moins coûteux à mettre en œuvre car le calcul de la solution du problème de Riemann relaxé est plus simple que le calcul de la solution du problème de Riemann exact.

Remarque 3.2.5. *Le schéma de relaxation est donc un schéma numérique de type Godunov approché où le solveur de Riemann approché est donné par*

$$\mathbb{U}_{R,app}(x/t; \mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = \mathcal{P}\mathbb{W}_{R,ex}(0; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R)), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

3.2.3 Extension du schéma de relaxation au modèle d'Euler non barotrope

On considère à présent le système d'Euler avec équation d'énergie :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad (3.24a)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\rho, e)) = 0, \quad (3.24b)$$

$$\partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + p(\rho, e)u) = 0, \quad (3.24c)$$

où E est l'énergie totale et $e = E - \frac{u^2}{2}$ est l'énergie interne. La solution recherchée est à valeurs dans l'ensemble des états admissibles suivant :

$$\Omega_U = \left\{ U = (\rho, \rho u, \rho E) \in \mathbb{R}^3, \text{ t.q. } \rho > 0 \text{ et } \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} > 0 \right\}.$$

L'application $(\rho, e) \mapsto p(\rho, e)$ est l'équation d'état. On suppose qu'il existe une fonction positive $T(\rho, e)$ appelée température ainsi qu'une fonction $s(\rho, e)$ telles que

$$T ds = \frac{p}{\rho^2} d\rho - de, \quad (3.25)$$

avec $(\tau, e) \mapsto s(\tau^{-1}, e)$ convexe. On montre que les solutions régulières de (3.24) satisfont une équation conservative supplémentaire :

$$\partial_t(\rho s)(U) + \partial_x(\rho s u)(U) \leq 0. \quad (3.26)$$

On s'intéresse aux solutions faibles entropiques qui sont les solutions faibles qui vérifient l'inégalité d'entropie suivante au sens faible :

$$\partial_t(\rho s)(U) + \partial_x(\rho s u)(U) \leq 0. \quad (3.27)$$

Il est connu que le système (3.24) est un système hyperbolique admettant trois valeurs propres (u et $u \pm c(\rho, e)$ avec $c(\rho, e)^2 = \partial_\rho p(\rho, e) + p(\rho, e)/\rho^2 \partial_e p(\rho, e)$). Le champ associé à la valeur propre u est linéairement dégénéré et les champs associés aux valeurs propres acoustiques $u \pm c(\rho, e)$ sont vraiment non linéaires, ce qui rend là aussi le problème de Riemann relativement difficile (mais pas impossible à résoudre).

On considère le système auxiliaire suivant où l'équation d'énergie est remplacée par une équation de conservation sur l'entropie :

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad (3.28a)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \mathcal{P}(\tau, s)) = 0, \quad (3.28b)$$

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) = 0. \quad (3.28c)$$

La pression est maintenant une fonction du volume spécifique et de l'entropie qui est calculée comme suit. Par le second principe (3.25) on a

$$\frac{\partial s}{\partial e}(\rho, e) = -\frac{1}{T(\rho, e)}, \quad \text{avec } T(\rho, e) > 0.$$

L'application $e \mapsto s(\rho, e)$ est donc bijective pour tout $\rho > 0$. On note $s \mapsto e(\tau, s)$ sa réciproque, qui est une fonction positive, où la dépendance en ρ est remplacée par une dépendance en $\tau = \rho^{-1}$. La loi de pression $\mathcal{P}(\tau, s)$ est alors donnée par $\mathcal{P}(\tau, s) := p(\tau^{-1}, e(\tau, s))$. On retrouve l'énergie totale par la relation $E(u, \tau, s) = u^2/2 + e(\tau, s)$.

L'espace des états admissibles pour le problème auxiliaire (3.28) est :

$$\Omega_{\mathbb{U}} = \left\{ \mathbb{U} = (\rho, \rho u, \rho s) \in \mathbb{R}^3, \rho > 0, \text{ et } \rho e(\tau, s) > 0 \right\}. \quad (3.29)$$

Proposition 3.2.1. *Les deux assertions équivalentes suivantes sont satisfaites :*

(i) *L'application*

$$(\rho s) : \begin{cases} \Omega_U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ U & \longmapsto (\rho s)(U) \end{cases}$$

est telle que $\partial_{\rho E}(\rho s)(U) = -1/T$ et est convexe.

(ii) *L'application*

$$(\rho E) : \begin{cases} \Omega_{\mathbb{U}} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{U} & \longmapsto (\rho E)(\mathbb{U}) \end{cases}$$

est telle que $\partial_{\rho s}(\rho E)(\mathbb{U}) = -T$ et est convexe.

Démonstration. Pour calculer la dérivée de $(\rho s)(U)$ par rapport à ρE on détermine la différentielle de ρs . Par le second principe $Tds = -de + p\rho^{-2}d\rho$ et le fait que $e = E - u^2/2$ on obtient :

$$\begin{aligned} Td(\rho s) &= \rho Tds + Tsd\rho \\ &= -\rho de + p\rho^{-1}d\rho + Tsd\rho \\ &= -\rho de + (p\rho^{-1} + Ts)d\rho \\ &= -\rho dE + (\rho u)du + (p\rho^{-1} + Ts)d\rho \\ &= -\rho dE + ud(\rho u) - u^2d\rho + (p\rho^{-1} + Ts)d\rho \\ &= -d(\rho E) + ud(\rho u) + (E - u^2 + p\rho^{-1} + Ts)d\rho. \end{aligned}$$

La dérivée $\partial_{\rho E}(\rho s)(U)$ est la dérivée de ρs par rapport à ρE à $(\rho, \rho u)$ constant. Ainsi $\partial_{\rho E}(\rho s)(U) = -1/T$ et par le même calcul on obtient que $\partial_{\rho s}(\rho E)(\mathbb{U}) = -T$. La preuve de la convexité de ces applications découle de la convexité de $(\tau, e) \mapsto s(\tau, e)$. On renvoie à [27] pour la preuve. \square

Le système des équations d'Euler (3.24) et le système auxiliaire (3.28) ont les mêmes solutions régulières. En revanche, leurs solutions faibles entropiques ne coïncident pas. En effet, comme l'application $\mathbb{U} \mapsto (\rho E)(\mathbb{U})$ est convexe, il est naturel de sélectionner les solutions faibles entropiques de (3.28) comme étant les solutions faibles qui vérifient la décroissance de l'énergie :

$$\partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E u + \mathcal{P}(\tau, s)u) \leq 0. \quad (3.30)$$

Ainsi, un schéma numérique basé sur le système auxiliaire (3.28) doit être corrigé afin de fournir une approximation correcte des solutions faibles entropiques du système d'Euler (3.24). Cette étape de correction a pour but d'imposer une discrétisation conservative de l'énergie (consistante avec (3.24c)) et non dissipative (en accord avec (3.30)) tout en assurant une inégalité d'entropie discrète (consistante avec (3.27)) et non la conservation de l'entropie (en accord avec (3.28c)). Cette étape de correction est une application du fait que ρs est une fonction décroissante de ρE , les autres variables d'état étant fixées. Dans la suite, on parlera de *dualité énergie-entropie* pour évoquer ce lien de décroissance entre ces deux variables d'état.

Afin d'approcher les solutions faibles entropiques (au sens de l'inégalité (3.30)) du système auxiliaire (3.28), on introduit le système de relaxation de type Suliciu suivant pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \quad (3.31a)$$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2 + \pi(\tau_\varepsilon, \mathcal{T}_\varepsilon, s_\varepsilon)) = 0, \quad (3.31b)$$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon s_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon s_\varepsilon u_\varepsilon) = 0, \quad (3.31c)$$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon) + \partial_x(\rho_\varepsilon u_\varepsilon \mathcal{T}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \rho_\varepsilon (\tau_\varepsilon - \mathcal{T}_\varepsilon), \quad (3.31d)$$

où la pression relaxée est donnée par :

$$\pi(\tau, \mathcal{T}, s) = \mathcal{P}(\mathcal{T}, s) + a^2(\mathcal{T} - \tau). \quad (3.32)$$

Le paramètre a est choisi de manière à satisfaire la condition de Whitham

$$a^2 > -\partial_{\mathcal{T}}\mathcal{P}(\mathcal{T}, s). \quad (3.33)$$

Formellement le système (3.31) restitue, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ le système auxiliaire (3.28) dans les trois premières équations. La partie convective du système s'écrit pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad (3.34a)$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi(\tau, \mathcal{T}, s)) = 0, \quad (3.34b)$$

$$\partial_t(\rho s) + \partial_x(\rho s u) = 0, \quad (3.34c)$$

$$\partial_t(\rho \mathcal{T}) + \partial_x(\rho u \mathcal{T}) = 0. \quad (3.34d)$$

Notons $\mathbb{W} = (\rho, \rho u, \rho s, \rho \mathcal{T})$ et $g(\mathbb{W}) = (\rho u, \rho u^2/2 + \pi(\tau, \mathcal{T}, s), \rho s u, \rho \mathcal{T} u)$. Ce système s'écrit

$$\partial_t \mathbb{W} + \partial_x g(\mathbb{W}) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

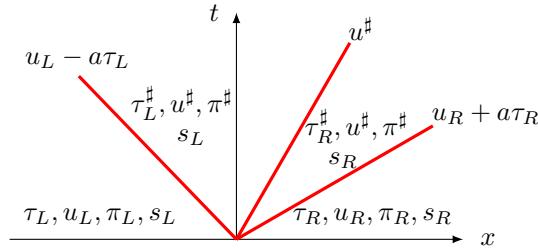
De même que dans le cas barotrope, on cherche la solution exacte du problème de Riemann pour une donnée initiale du type :

$$\mathbb{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L = (\rho_L, \rho_L u_L, \rho_L s_L, \rho_L \mathcal{T}_L) & \text{si } x < 0, \\ \mathbb{W}_R = (\rho_R, \rho_R u_R, \rho_R s_R, \rho_R \mathcal{T}_R) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Il se trouve que cette solution peut-être déterminée de façon quasi-immédiate à partir de la solution du problème de Riemann de relaxation pour le système d'Euler barotrope développé à la section précédente. En effet, comme les variables s et \mathcal{T} sont toutes les deux advectées à la vitesse u :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{T} + u \partial_x \mathcal{T} &= 0, \\ \partial_t s + u \partial_x s &= 0, \end{aligned}$$

la solution du problème de Riemann s'obtient formellement à partir de la solution du problème de Riemann de relaxation pour le modèle barotrope en remplaçant l'inconnue \mathcal{T} par le vecteur (s, \mathcal{T}) . Ainsi, en notant $\pi_L = \pi(\tau_L, s_L, \mathcal{T}_L)$ et $\pi_R = \pi(\tau_R, s_R, \mathcal{T}_R)$, la solution est donnée par



où les états intermédiaires sont donnés par les mêmes formules que dans le cas barotrope (voir (3.15)-(3.16)-(3.17)-(3.18)) :

$$u^\# := \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2a}(\pi_R - \pi_L), \quad (3.35)$$

$$\pi^\# := \frac{1}{2}(\pi_R + \pi_L) - \frac{a}{2}(u_R - u_L), \quad (3.36)$$

$$\tau_L^\# := \tau_L + \frac{1}{a}(u^\# - u_L) = \tau_L + \frac{1}{2a}(u_R - u_L) - \frac{1}{2a^2}(\pi_R - \pi_L), \quad (3.37)$$

$$\tau_R^\# := \tau_R - \frac{1}{a}(u^\# - u_R) = \tau_R + \frac{1}{2a}(u_R - u_L) + \frac{1}{2a^2}(\pi_R - \pi_L). \quad (3.38)$$

Notons

$$\mathbb{W}_{R,\text{ex}}(x/t; \mathcal{M}(U_L), \mathcal{M}(U_R)), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

la solution exacte de ce problème de Riemann. On en déduit donc naturellement un schéma numérique de relaxation conservatif pour le système auxiliaire qui s'écrit

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \mathbb{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbb{F}(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - \mathbb{F}(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.39)$$

avec

$$\mathbb{F}(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = \mathcal{P}g(\mathbb{W}_{\text{R,ex}}(0; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R))),$$

où pour $\mathbb{U} = (\rho, \rho u, \rho s)$ on a $\mathcal{M}(\mathbb{U}) = (\rho, \rho u, \rho s, \rho \mathcal{T} = 1)$ et pour $\mathbb{W} = (\rho, \rho u, \rho s, \rho \mathcal{T})$ on a $\mathcal{P}\mathbb{W} = (\rho, \rho u, \rho s)$. Sous une condition CFL similaire à (3.20), le schéma préserve la positivité des masses volumiques. En outre, il est simple de démontrer que le schéma préserve la positivité des énergies internes. Comme l'entropie s est advectée, s_j^{n+1} est une combinaison convexe de $(s_{j-1}^n, s_j^n, s_{j+1}^n)$. Comme l'application $s \mapsto e(\tau, s)$ est décroissante on a alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$e(\tau_j^{n+1}, s_j^{n+1}) \geq e(\tau_j^{n+1}, \max_{k \in \{j-1, j, j+1\}} s_k^n) > 0. \quad (3.40)$$

De plus, sous la condition de Whitham (3.33), pour tout (\mathcal{T}, s) dans la solution $\mathbb{W}_{\text{R,ex}}$ du problème de Riemann en $x_{j+\frac{1}{2}}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ (le paramètre $a = a_{j+\frac{1}{2}}$ peut être choisi localement), le schéma satisfait une inégalité d'énergie discrète

$$(\rho E)(\mathbb{U}_j^{n+1}) \leq (\rho E)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(G(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - G(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right) \quad (3.41)$$

avec

$$G(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = (\rho \mathcal{E} u + \pi u) \left(\mathbb{W}_{\text{R,ex}} \left(0^+; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R) \right) \right),$$

où $\mathcal{E}(\mathbb{W}) = \frac{u^2}{2} + e(\mathcal{T}, s) + \frac{\pi(\tau, \mathcal{T}, s)^2 - \mathcal{P}(\mathcal{T}, s)^2}{2a^2}$.

On en déduit alors un schéma numérique en deux étapes pour le système originel des équations d'Euler (3.24).

Étape 1 - Un schéma de relaxation pour le modèle auxiliaire

Étant donné $U_j^n = (\rho_j^n, (\rho u)_j^n, (\rho E)_j^n)^T$, on calcule l'inconnue du système auxiliaire \mathbb{U}_j^n :

$$\mathbb{U}_j^n = \mathcal{A}(U_j^n) := \left(\rho_j^n, (\rho u)_j^n, (\rho s)(U_j^n) \right)^T, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.42)$$

où $(\rho s)(U_j^n)$ est l'entropie pour le vecteur d'état U_j^n que l'on peut calculer à partir de la masse volumique ρ et de l'énergie interne e , elle-même déterminée par l'énergie totale et la vitesse $e = E - u^2/2$:

$$(\rho s)(U_j^n) := \rho s \left(\rho_j^n, (E - u_k^2/2)_j^n \right).$$

On a alors que $(\rho E)(\mathbb{U}_j^n) = (\rho E)_j^n$. On calcule ensuite $\mathbb{U}_j^{n+1,-}$ en appliquant le schéma de relaxation (3.39) pour le système auxiliaire. On obtient

$$\rho_j^{n+1,-} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho u)_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.43a)$$

$$(\rho u)_j^{n+1,-} = (\rho u)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho u^2 + p)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho u^2 + p)_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.43b)$$

$$(\rho s)_j^{n+1,-} = (\rho s)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho s u)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho s u)_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.43c)$$

où pour $j \in \mathbb{Z}$, $(\rho u)_{j+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_1(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n)$, $(\rho u^2 + p)_{j+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_2(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n)$ et $(\rho s u)_{j+\frac{1}{2}} = \mathbb{F}_3(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n)$. C'est un schéma qui satisfait une inégalité d'énergie discrète :

$$(\rho E)(\mathbb{U}_j^{n+1,-}) \leq (\rho E)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(G(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - G(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.44)$$

Étape 2 : correction Dans cette étape, on détermine U_j^{n+1} à partir de $\mathbb{U}_j^{n+1,-}$ de manière à assurer une discrétisation conservative de l'énergie ainsi qu'une inégalité d'entropie discrète. Cette étape de correction consiste simplement à garder inchangées la masse volumique et la vitesse

$$\rho_j^{n+1} := \rho_j^{n+1,-}, \quad (\rho u)_j^{n+1} := (\rho u)_j^{n+1,-}, \quad (3.45)$$

tandis que l'énergie est corrigée en posant :

$$(\rho E)_j^{n+1} := (\rho E)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(G(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - G(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right). \quad (3.46)$$

Par la Proposition 3.2.1 on a

$$\partial_{\rho E}(\rho s)(U) = -1/T.$$

Ainsi, on déduit de $(\rho E)_j^{n+1} \geq (\rho E)(\mathbb{U}_j^{n+1,-})$ que $(\rho s)(U_j^{n+1}) \leq (\rho s)_j^{n+1,-}$. En remplaçant dans (3.43c) on obtient que le schéma satisfait une inégalité d'entropie discrète :

$$(\rho s)_j^{n+1} \leq (\rho s)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\rho s u)_{j+\frac{1}{2}} - (\rho s u)_{j-\frac{1}{2}} \right).$$

Remarque 3.2.6. Ce schéma en deux étapes peut se mettre sous la forme d'un schéma conservatif à trois points :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n) \right), \quad (3.47)$$

avec

$$F(U_L, U_R) = (\mathbb{F}_1(\mathcal{A}(U_L), \mathcal{A}(U_R)), \mathbb{F}_2(\mathcal{A}(U_L), \mathcal{A}(U_R)), G(\mathcal{A}(U_L), \mathcal{A}(U_R)))^T,$$

où l'opérateur \mathcal{A} est défini en (3.42).

3.3 Schémas de relaxation à la Suliciu pour les modèles multiphasiques

On souhaite écrire un schéma numérique pour le modèle multifluide barotrope unidimensionnel dans le cas des lois de fermeture (2.19) pour les vitesse et pressions interfaciales. Comme évoqué dans le chapitre précédent, le système s'écrit dans ce cas de la manière suivante, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + u_1 \partial_x \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1(\rho_1)) + \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l) \partial_x \alpha_l &= 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

et pour $k = 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + u_1 \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k(\rho_k)) - p_k(\rho_k) \partial_x \alpha_k &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1. \quad (3.49)$$

On cherche les solutions dans l'espace des états admissibles suivant :

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{U}} = \left\{ \mathbb{U} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 u_1, \dots, \alpha_N \rho_N u_N)^T \in \mathbb{R}^{3N-1}, \right. \\ \left. \text{tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1 \text{ et } \alpha_k \rho_k > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}. \end{aligned}$$

On montre que les solutions régulières de (3.48) satisfont :

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 E_1 u_1 + \alpha_1 p_1(\rho_1) u_1) + u_1 \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l) \partial_x \alpha_l = 0, \quad (3.50)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k) u_k) - u_1 p_k(\rho_k) \partial_x \alpha_k = 0, \quad k = 2, \dots, N, \quad (3.51)$$

où $E_k = u_k^2/2 + e_k(\rho_k)$ avec $e'_k(\rho) = p_k(\rho)/\rho^2$ pour $k = 1, \dots, N$. En sommant pour $k = 1, \dots, N$, on voit que les solutions régulières de (3.48) vérifient une loi de conservation supplémentaire portant sur l'énergie totale de mélange :

$$\partial_t \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k E_k(\mathbb{U}) \right) + \partial_x \left(\sum_{k=1}^N (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k) u_k) (\mathbb{U}) \right) = 0. \quad (3.52)$$

On souhaite écrire un schéma numérique de relaxation qui préserve la positivité des taux de présence statistiques α_k et des masses volumiques partielles $\alpha_k \rho_k$ et qui satisfasse une version discrète des équations d'énergie vérifiées par les solutions faibles entropiques (on rappelle que les fonctions $\mathbb{U} \mapsto (\alpha_k \rho_k E_k)(\mathbb{U})$ sont convexes) :

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 E_1 u_1 + \alpha_1 p_1(\rho_1) u_1) + u_1 \sum_{l=2}^N p_l(\rho_l) \partial_x \alpha_l \leq 0, \quad (3.53)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k) u_k) - u_1 p_k(\rho_k) \partial_x \alpha_k \leq 0, \quad k = 2, \dots, N. \quad (3.54)$$

3.3.1 Solveur de Riemann de relaxation

La résolution du problème de Riemann pour (3.48) est une question toujours ouverte à ce jour (même pour le modèle diphasique $N = 2$), principalement en raison du caractère non linéaire des champs acoustiques et de l'ordonnancement des ondes qui n'est pas connu *a priori*. On cherche donc une approximation de type Suliciu à champs linéairement dégénérés et pour laquelle la solution du problème de Riemann est plus facile à calculer. Par analogie avec le cas monophasique (voir la section précédente pour les équations d'Euler barotropes), on introduit le système de relaxation suivant, pour lequel on souhaite calculer la solution exacte du problème de Riemann associé au système convectif : pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + u_1 \partial_x \alpha_1 &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x \left(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1(\tau_1, \mathcal{T}_1) \right) + \sum_{l=2}^N \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l) \partial_x \alpha_l &= 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

et pour $k = 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + u_1 \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x \left(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) \right) - \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k u_k) &= 0. \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1. \quad (3.56)$$

L'inconnue est recherchée dans l'espace des états suivant :

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{W}} = \left\{ \mathbb{W} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 u_1, \dots, \alpha_N \rho_N u_N, \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1, \dots, \alpha_N \rho_N \mathcal{T}_N)^T \in \mathbb{R}^{4N-1}, \right. \\ \left. \text{tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1, \alpha_k \rho_k > 0 \text{ et } \alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k > 0 \text{ pour } k = 1, \dots, N \right\}. \end{aligned}$$

Pour chaque phase $k = 1, \dots, N$, $\tau_k = \rho_k^{-1}$ est le volume spécifique de la phase k et la pression relaxée π_k est donnée par :

$$\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = \mathcal{P}_k(\mathcal{T}_k) + a_k^2(\mathcal{T}_k - \tau_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.57)$$

où $\tau \mapsto \mathcal{P}_k(\tau) := p_k(\tau^{-1})$. Les constantes $(a_k)_{k=1, \dots, N}$ dans (3.57) sont des paramètres positifs qui doivent être pris suffisamment grands de manière à satisfaire la condition sous-caractéristique de Whitham :

$$a_k^2 > -\mathcal{P}'_k(\mathcal{T}_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.58)$$

Dans la suite, on écrira le système (3.55) sous la forme

$$\partial_t \mathbb{W} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbb{W}) + \mathbf{d}(\mathbb{W}) \partial_x \mathbb{W} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.59)$$

On a la propriété suivante.

Proposition 3.3.1. *Le système (3.59) est faiblement hyperbolique sur $\Omega_{\mathbb{W}}$. Il admet les $4N - 1$ valeurs propres réelles suivantes : $\sigma_1(\mathbb{W}) = \dots = \sigma_{N-1}(\mathbb{W}) = u_1$, $\sigma_{N-1+k}(\mathbb{W}) = u_k - a_k \tau_k$, $\sigma_{2N-1+k}(\mathbb{W}) = u_k + a_k \tau_k$ et $\sigma_{3N-1+k}(\mathbb{W}) = u_k$ pour $k = 1, \dots, N$. Les champs associés sont tous linéairement dégénérés et la famille de vecteurs propres correspondants engendre l'espace \mathbb{R}^{4N-1} si et seulement si*

$$|u_1 - u_k| \neq a_k \tau_k, \quad \forall k = 2, \dots, N. \quad (3.60)$$

Proposition 3.3.2. *Les solutions régulières, ainsi que les solutions faibles entropiques de (3.59) satisfont les équations d'énergies phasiques suivantes :*

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1 u_1 + \alpha_1 \pi_1 u_1) + u_1 \sum_{l=2}^N \pi_l \partial_x \alpha_l = 0, \quad (3.61)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k) - u_1 \pi_k \partial_x \alpha_k = 0, \quad k = 2, \dots, N, \quad (3.62)$$

où

$$\mathcal{E}_k := \mathcal{E}_k(u_k, \tau_k, \mathcal{T}_k) = \frac{u_k^2}{2} + e_k(\mathcal{T}_k) + \frac{\pi_k^2(\tau_k, \mathcal{T}_k) - \mathcal{P}_k^2(\mathcal{T}_k)}{2a_k^2}, \quad k = 1, \dots, N.$$

En sommant pour $k = 1, \dots, N$, on obtient que les solutions régulières, ainsi que les solutions faibles entropiques de (3.59) satisfont la loi de conservation additionnelle suivante :

$$\partial_t \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k \right) + \partial_x \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k \right) = 0. \quad (3.63)$$

De plus, sous la condition de Whitham (3.58), on a le principe de Gibbs suivants pour $k = 1, \dots, N$:

$$\tau_k = \operatorname{argmin}_{\mathcal{T}_k} \{ \mathcal{E}_k(u_k, \tau_k, \mathcal{T}_k) \}, \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k(u_k, \tau_k, \tau_k) = E_k(u_k, \tau_k), \quad (3.64)$$

où $E_k(u_k, \tau_k) = u_k^2/2 + e_k(\tau_k^{-1})$.

Soient $(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ deux états dans $\Omega_{\mathbb{W}}$. On considère à présent le problème de Riemann pour le système relaxé (3.59) avec la donnée initiale suivante :

$$\mathbb{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L, & \text{if } x < 0, \\ \mathbb{W}_R, & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

En raison de la Proposition 3.3.1 la solution du problème de Riemann (3.59)-(3.65) est recherchée sous la forme d'une fonction auto-semblable composée d'états intermédiaires séparés par des discontinuités de contact associées aux valeurs propres du système. Comme les fractions α_k sont transportées par la vitesse u_1 , les produits non conservatifs ne sont actifs qu'au niveau de cette onde et les phases sont virtuellement indépendantes loin de cette onde. En particulier, pour k dans $\{1, \dots, N\}$ fixé, les quantités phasiques associées à la phase k peuvent changer à travers les ondes associées aux valeurs propres $u_k - a_k \tau_k$, u_k , $u_k + a_k \tau_k$ et u_1 mais elles restent constantes à travers les autres ondes. Dans la

suite, nous rechercherons des solutions *subsoniques en vitesses relatives* c'est-à-dire des solutions qui vérifient :

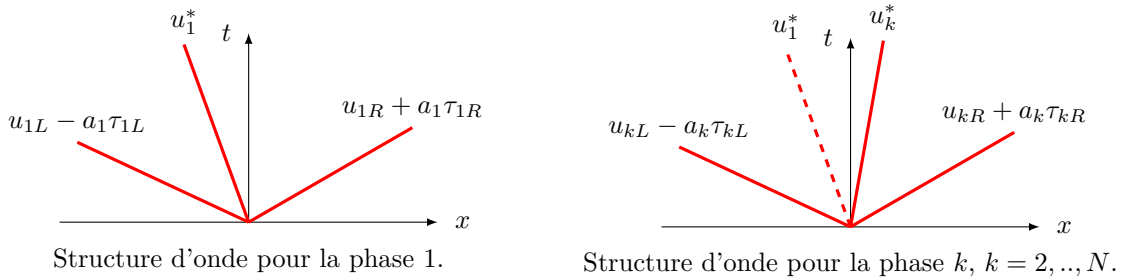
$$|u_1 - u_k| < a_k \tau_k, \quad \forall k = 2, \dots, N,$$

en conséquence de quoi, dans les solutions auto-semblables recherchées, la vitesse de propagation u_1 sera toujours comprise entre les vitesses des ondes acoustiques des autres phases. De plus, la positivité des volumes spécifiques de la phase 1 requiert également que l'onde de vitesse u_1 soit comprise entre les ondes acoustiques de la phase 1. En notant

$$c_L = \max_{k=1, \dots, N} u_{k,L} - a_k \tau_{k,L}, \quad c_R = \min_{k=1, \dots, N} u_{k,R} + a_k \tau_{k,R}, \quad (3.66)$$

la condition de subsonicité des solutions du problème de Riemann s'écrit donc

$$c_L < u_1 < c_R.$$



Comme les fractions volumiques α_k sont transportées à la vitesse u_1 , les produits non conservatifs dans la solution du problème de Riemann s'identifient à des masses de Dirac se déplaçant à une vitesse u_1^* , vitesse de la discontinuité de contact associée à la valeur propre u_1 dans la solution du problème de Riemann :

$$\pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l) \partial_x \alpha_l = \pi_l^* \Delta \alpha_l \delta_0(x - u_1^* t), \quad l = 1, \dots, N,$$

où $\Delta \alpha_l = \alpha_{lR} - \alpha_{lL}$.

L'idée principale qui permet la résolution du problème de Riemann de relaxation est de remarquer que dans le cas des fermetures (2.19), les équations des différentes phases peuvent être partiellement découplées. Remarquons en effet que pour une solution du problème de Riemann, le système (3.55) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \partial_t \alpha_1 + u_1^* \partial_x \alpha_1 = 0, \\ (\mathcal{S}_1) \quad & \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ & \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1(\tau_1, \mathcal{T}_1)) = - \sum_{l=2}^N \pi_l^* \partial_x \alpha_l, \\ & \partial_t (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1 u_1) = 0, \end{aligned}$$

et pour $k = 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \partial_t \alpha_k + u_1^* \partial_x \alpha_k = 0, \\ (\mathcal{S}_k) \quad & \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ & \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_k^* \partial_x \alpha_k = 0, \\ & \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k u_k) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la phase 1 ne dépend des phases k pour $k = 2, \dots, N$ qu'à travers les poids des masses de Dirac c'est-à-dire de la quantité $\Pi^* = (\pi_2^*, \dots, \pi_N^*) \in \mathbb{R}^{N-1}$. De plus, pour $k = 2, \dots, N$, la phase k ne dépend de la phase 1 qu'à travers la vitesse de propagation de α_k , à savoir u_1^* . La résolution du problème de Riemann repose alors sur la recherche d'un point fixe qui revient à itérer une procédure en deux étapes sur le couple $(u_1^*, \Pi^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$.

Première étape : On suppose connues les valeurs des pressions interfaciales $\Pi^* = (\pi_2^*, \dots, \pi_N^*) \in \mathbb{R}^{N-1}$ définissant les produits non conservatifs $\pi_k^* \partial_x \alpha_k = \pi_k^* \Delta \alpha_k \delta_0(x - u_1^* t)$ pour $k = 2, \dots, N$. Le système (\mathcal{S}_1) , qui gouverne la phase 1, est alors complètement indépendant des autres phases puisque le terme non-conservatif est un *terme source donné*. On peut alors résoudre le problème de Riemann pour (\mathcal{S}_1) indépendamment des autres phases. Ainsi, étant donnée une prédiction des pressions d'interface $\Pi^* = (\pi_2^*, \dots, \pi_N^*) \in \mathbb{R}^{N-1}$, on peut calculer explicitement la valeur de la vitesse matérielle u_1^* en résolvant le problème de Riemann de la phase 1. Cette première étape permet d'explicitier une fonction :

$$\mathcal{F}[\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R; a_1] : \begin{cases} \mathbb{R}^{N-1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Pi^* = (\pi_2^*, \dots, \pi_N^*) & \longmapsto u_1^*. \end{cases} \quad (3.67)$$

Seconde étape : On suppose connue la valeur de la vitesse u_1^* de la discontinuité de contact associée à la valeur propre u_1 . Alors, pour tout $k = 2, \dots, N$, le système (\mathcal{S}_k) , qui gouverne la phase k , est indépendant des autres phases $l = 1, \dots, N$, $l \neq k$. On peut alors résoudre **de façon parallèle** les problèmes de Riemann associés aux phases $k = 2, \dots, N$ et déterminer les pressions interfaciales π_k^* (en appliquant la relation de Rankine-Hugoniot à l'équation de quantité de mouvement). Cette deuxième étape permet d'explicitier une fonction :

$$\mathcal{G}[\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R; (a_k)_{k=2, \dots, N}] : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \\ u_1^* & \longmapsto \Pi^* = (\pi_2^*, \dots, \pi_N^*). \end{cases} \quad (3.68)$$

Recherche d'un point fixe : Itérer sur ces deux étapes revient à

Chercher u_1^ dans l'intervalle (c_L, c_R) tel que*

$$u_1^* = \left(\mathcal{F}[\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R; a_1] \circ \mathcal{G}[\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R; (a_k)_{k=2, \dots, N}] \right) (u_1^*). \quad (3.69)$$

Afin de donner le résultat d'existence de solutions subsoniques au problème de Riemann relaxé, on introduit quelques notations. On considère la fonction suivante, définie pour $(\nu, \omega) \in (0, +\infty) \times [0, 1)$ et qui peut être prolongée par continuité à $\omega = 1$ en remarquant que $\lim_{\omega \rightarrow 1} \mathcal{M}_0(\nu, \omega) = 0$:

$$\mathcal{M}_0(\nu, \omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \left(1 + \frac{1}{\nu} \right) - \sqrt{\left(\frac{1 + \omega^2}{1 - \omega^2} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\nu} \right)^2 - \frac{4}{\nu}} \right). \quad (3.70)$$

On définit sur l'intervalle $[c_L, c_R]$ (voir (3.66)) les fonctions θ_k pour $k = 1, \dots, N$ qui s'expriment de façon explicite en les données initiales $(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$:

$$\begin{aligned} \theta_k(u) &= a_k (\alpha_{k,L} + \alpha_{k,R}) (u - u_k^\sharp) \\ &+ 2(1 - \delta_{k1}) a_k^2 \begin{cases} \alpha_{k,L} \tau_{k,L}^\sharp \mathcal{M}_0 \left(\frac{\alpha_{k,L}}{\alpha_{k,R}}, \frac{1 - \mathcal{M}_k}{1 + \mathcal{M}_k} \right), & \text{avec } \mathcal{M}_k = \frac{u_k^\sharp - u}{a_k \tau_{k,L}^\sharp} \text{ si } u_k^\sharp \geq u, \\ \alpha_{k,R} \tau_{k,R}^\sharp \mathcal{M}_0 \left(\frac{\alpha_{k,R}}{\alpha_{k,L}}, \frac{1 - \mathcal{M}_k}{1 + \mathcal{M}_k} \right), & \text{avec } \mathcal{M}_k = \frac{u - u_k^\sharp}{a_k \tau_{k,R}^\sharp} \text{ si } u_k^\sharp \leq u. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.71)$$

où δ_{k1} est le symbole de Kronecker et où les quantités \sharp sont définies comme dans le cas monophasique :

$$\begin{aligned} u_k^\sharp &= \frac{1}{2} (u_{k,L} + u_{k,R}) - \frac{1}{2a_k} (\pi_k(\tau_{k,R}, \mathcal{T}_{k,R}) - \pi_k(\tau_{k,L}, \mathcal{T}_{k,L})), \\ \pi_k^\sharp &= \frac{1}{2} (\pi_k(\tau_{k,R}, \mathcal{T}_{k,R}) + \pi_k(\tau_{k,L}, \mathcal{T}_{k,L})) - \frac{a_k}{2} (u_{k,R} - u_{k,L}), \\ \tau_{k,L}^\sharp &= \tau_{k,L} + \frac{1}{a_k} (u_k^\sharp - u_{k,L}), \\ \tau_{k,R}^\sharp &= \tau_{k,R} - \frac{1}{a_k} (u_k^\sharp - u_{k,R}). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Enfin on définit sur l'intervalle $[c_L, c_R]$ la fonction

$$\Theta(u) = \theta_1(u) + \dots + \theta_N(u).$$

Théorème 3.3.3. Soient $(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R) \in \Omega_{\mathbb{W}} \times \Omega_{\mathbb{W}}$ deux états. On suppose que pour tout $k = 1, \dots, N$, le paramètre a_k est tel que $\tau_{k,L}^\# > 0$ et $\tau_{k,R}^\# > 0$. Alors la fonction Θ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante sur l'intervalle $[c_L, c_R]$. De plus, le problème de Riemann (3.59)-(3.65) admet une solution si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\Theta(c_L) < - \sum_{k=1}^N \pi_k^\# \Delta \alpha_k < \Theta(c_R). \quad (3.73)$$

En notant u_1^* l'unique réel dans l'intervalle (c_L, c_R) qui vérifie

$$\Theta(u_1^*) = - \sum_{k=1}^N \pi_k^\# \Delta \alpha_k, \quad (3.74)$$

la solution est une fonction auto-semblable $\mathbb{W}(x, t) = \mathbb{W}_{r,ex}(x/t; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ qui a les propriétés suivantes :

- (i) $\mathbb{W}_{r,ex}(\xi; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ est une fonction composée de $3N + 1$ états constants dans $\Omega_{\mathbb{W}}$ séparés par $3N$ discontinuités (associées aux valeurs propres $u_k - a_k \tau_k$, u_k et $u_k + a_k \tau_k$ pour $k = 1, \dots, N$).
- (ii) Il existe $\Pi^* = (\pi_2^*, \dots, \pi_N^*) \in \mathbb{R}^{N-1}$ tel que $\mathbb{W}(x, t) = \mathbb{W}_{r,ex}(x/t; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ satisfait le système d'EDP suivant au sens des distributions :

$$\partial_t \mathbb{W} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbb{W}) + \mathbf{D}^*(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R) \delta_0(x - u_1^* t) = 0, \quad (3.75)$$

avec

$$\mathbf{D}^*(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R) = (u_1^* \Delta \alpha_1, \dots, u_1^* \Delta \alpha_{N-1}, 0, \dots, 0, \sum_{l=2}^N \pi_l^* \Delta \alpha_l, -\pi_2^* \Delta \alpha_2, \dots, -\pi_N^* \Delta \alpha_N, 0, \dots, 0)^T. \quad (3.76)$$

- (iii) La fonction $\mathbb{W}(x, t) = \mathbb{W}_{r,ex}(x/t; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ vérifie les équations d'énergies suivantes au sens des distributions :

$$\partial_t (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1 u_1 + \alpha_1 \pi_1 u_1) + u_1^* \sum_{i=2}^N \pi_i^* \partial_x \alpha_i = 0, \quad (3.77)$$

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k) - u_1^* \pi_k^* \partial_x \alpha_k \leq 0, \quad k = 2, \dots, N. \quad (3.78)$$

Remarque 3.3.1 (Quelques remarques sur le Théorème 3.3.3).

1. Il est tout à fait remarquable que la procédure de point fixe se ramène au calcul d'un zéro **sur un intervalle borné pour une fonction scalaire, régulière, strictement monotone et qui est connue explicitement en fonction des données du problème de Riemann**. Ainsi, un algorithme de Newton scalaire ou une simple méthode de dichotomie permettent de converger vers la solution du point fixe en un nombre maîtrisé d'itérations. Ceci est crucial pour limiter le coût de calcul du schéma numérique.
2. L'intervalle borné $(c_L, c_R) = (\max_{k=1, \dots, N} \{u_{k,L} - a_k \tau_{k,L}\}, \min_{k=1, \dots, N} \{u_{k,R} + a_k \tau_{k,R}\})$ dans lequel est recherché la solution u_1^* correspond à la recherche de solutions subsoniques en vitesses relatives :

$$|u_k - u_1| < a_k \tau_k, \quad k = 2, \dots, N.$$

3. L'inégalité (3.78) est une version relaxée de (3.62). En effet, lors de la résolution du problème de Riemann de la phase k , bien que tous les champs soient linéairement dégénérés, on autorise une dissipation d'énergie qui a pour effet d'assurer la positivité des volumes spécifiques τ_k dans la limite des petites fractions volumiques $\alpha_{k,L} \ll 1$ ou $\alpha_{k,R} \ll 1$.
4. L'expression complète de la solution $\mathbb{W}_{r,ex}(\xi; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ peut être trouvée dans [45].

3.3.2 Le schéma numérique issu de l'approximation par relaxation

On peut à présent écrire le schéma de volumes finis issu du solveur de Riemann approché obtenu grâce à l'approximation par relaxation. On se donne des pas de temps et d'espace Δt et Δx supposés constants pour simplifier. L'espace est partitionné en cellules $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ où $C_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ avec $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ pour tout j dans \mathbb{Z} . On introduit les temps discrets $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. La solution approchée au temps t^n est une fonction constante par morceaux dont la valeur sur la cellule C_j est notée $\mathbb{U}_j^n \in \Omega_{\mathbb{U}}$. On suppose que Δt et Δx satisfont la condition CFL suivante basée sur les ondes acoustiques du système relaxé :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{k=1, \dots, N} \max_{j \in \mathbb{Z}} \max \left\{ |(u_k - a_k \tau_k)_j^n|, |(u_k + a_k \tau_k)_{j+1}^n| \right\} < \frac{1}{2}. \quad (3.79)$$

Le schéma volumes finis de relaxation s'écrit alors (voir [18] pour plus de détails) :

$$\mathbb{U}_j^{n+1} = \mathbb{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbb{F}^-(\mathbb{U}_j^n, \mathbb{U}_{j+1}^n) - \mathbb{F}^+(\mathbb{U}_{j-1}^n, \mathbb{U}_j^n) \right), \quad (3.80)$$

où les flux numériques sont calculés à partir du solveur de Riemann exact $\mathbb{W}_{r,ex}(\xi; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ pour le système de relaxation :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^-(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) &= \mathcal{P} \mathbf{g}(\mathbb{W}_{r,ex}(0^-; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R))) + \mathcal{P} \mathbf{D}^*(\mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R)) \mathbf{1}_{\{u_1^* < 0\}}, \\ \mathbb{F}^+(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) &= \mathcal{P} \mathbf{g}(\mathbb{W}_{r,ex}(0^+; \mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R))) - \mathcal{P} \mathbf{D}^*(\mathcal{M}(\mathbb{U}_L), \mathcal{M}(\mathbb{U}_R)) \mathbf{1}_{\{u_1^* > 0\}}. \end{aligned}$$

La quantité $\mathbf{D}^*(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ est définie en (3.76) et les applications \mathcal{M} et \mathcal{P} sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \begin{cases} \Omega_{\mathbb{U}} & \longrightarrow \Omega_{\mathbb{W}} \\ (x_i)_{i=1, \dots, 3N-1} & \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_{3N-1}, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, 1 - \sum_{i=1}^{N-1} x_i) \end{cases} \\ \mathcal{P} : \begin{cases} \Omega_{\mathbb{W}} & \longrightarrow \Omega_{\mathbb{U}} \\ (x_i)_{i=1, \dots, 4N-1} & \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_{3N-1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne les propriétés du schéma de relaxation.

Théorème 3.3.4. *Le schéma volumes finis (3.80) a les propriétés suivantes :*

- **Positivité :** *Sous la condition CFL (3.79), le schéma préserve la positivité des fractions volumiques et des masses partielles : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(\mathbb{U}_j^n \in \Omega_{\mathbb{U}}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$), alors $0 < (\alpha_k)_j^{n+1} < 1$ et $(\alpha_k \rho_k)_j^{n+1} > 0$ pour tout $k = 1, \dots, N$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, i.e. $(\mathbb{U}_j^{n+1} \in \Omega_{\mathbb{U}}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$).*
- **Conservativité :** *Les discrétisations des masses partielles $\alpha_k \rho_k$, $k = 1, \dots, N$, et de la quantité de mouvement totale $\sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k u_k$ sont conservatives.*
- **Inégalités d'énergie discrètes.** *On suppose que les paramètres de relaxation $(a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n$, $k = 1, \dots, N$ sont choisis à chaque pas de temps et à chaque interface de manière à satisfaire la condition de Whitham, i.e pour tout $k = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $(a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n$ satisfait*

$$((a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 > -\mathcal{P}'_k(\mathcal{T}_k), \quad (3.81)$$

pour tout \mathcal{T}_k dans la solution $\xi \mapsto \mathbb{W}_{r,ex}(\xi; \mathcal{M}(\mathbb{U}_j^n), \mathcal{M}(\mathbb{U}_{j+1}^n))$. Alors, les valeurs \mathbb{U}_j^n , $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, calculées par le schéma vérifient les inégalités d'énergie discrètes suivantes, qui sont des

équivalents discrets des inégalités (3.53) et (3.54) vérifiées par les solutions faibles entropiques du modèle :

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 \rho_1 E_1)(\mathbb{U}_j^{n+1}) &\leq (\alpha_1 \rho_1 E_1)(\mathbb{U}_j^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1 u_1 + \alpha_1 \pi_1 u_1)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\alpha_1 \rho_1 \mathcal{E}_1 u_1 + \alpha_1 \pi_1 u_1)_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbb{1}_{\left\{ (u_1^*)_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0 \right\}} (u_1^*)_{j-\frac{1}{2}}^n \sum_{l=2}^N (\pi_l^*)_{j-\frac{1}{2}}^n \left((\alpha_l)_j^n - (\alpha_l)_{j-1}^n \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbb{1}_{\left\{ (u_1^*)_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \right\}} (u_1^*)_{j+\frac{1}{2}}^n \sum_{l=2}^N (\pi_l^*)_{j+\frac{1}{2}}^n \left((\alpha_l)_{j+1}^n - (\alpha_l)_j^n \right),
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

et pour $k = 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_k \rho_k E_k)(\mathbb{U}_j^{n+1}) &\leq (\alpha_k \rho_k E_k)(\mathbb{U}_j^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k)_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbb{1}_{\left\{ (u_1^*)_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0 \right\}} (u_1^*)_{j-\frac{1}{2}}^n (\pi_k^*)_{j-\frac{1}{2}}^n \left((\alpha_k)_j^n - (\alpha_k)_{j-1}^n \right) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbb{1}_{\left\{ (u_1^*)_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 0 \right\}} (u_1^*)_{j+\frac{1}{2}}^n (\pi_k^*)_{j+\frac{1}{2}}^n \left((\alpha_k)_{j+1}^n - (\alpha_k)_j^n \right),
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

où pour $j \in \mathbb{Z}$, $(\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k)_{j+\frac{1}{2}}^n = (\alpha_k \rho_k \mathcal{E}_k u_k + \alpha_k \pi_k u_k) \left(\mathbb{W}_{\text{r,ex}}(0^+; \mathcal{M}(\mathbb{U}_j^n), \mathcal{M}(\mathbb{U}_{j+1}^n)) \right)$ est la trace à droite en $x_{j+\frac{1}{2}}$ du flux d'énergiephasique de relaxation.

3.3.3 Quelques résultats numériques pour le modèle triphasique barotrope

On présente ici deux tests numériques pour évaluer les performances du schéma de relaxation. On considère le modèle à trois phases (*i.e.* $N = 3$) avec des lois d'état de type gaz parfait pour les trois phases $k = 1, 2, 3$:

$$p_k(\rho_k) = \kappa_k \rho_k^{\gamma_k}. \tag{3.84}$$

On rappelle que le schéma de relaxation repose sur le calcul de la solution exacte du problème de Riemann de relaxation. Ce calcul nécessite le calcul du zéro d'une fonction scalaire monotone à chaque interface du maillage. On utilise pour cela la méthode de Newton.

Cas test 1 : un problème de Riemann avec toutes les ondes : Dans ce premier cas test, les paramètres des lois d'états sont donnés dans le tableau 3.1 et la donnée initiale est donnée dans le Tableau 3.2.

(κ_1, γ_1)	(κ_2, γ_2)	(κ_3, γ_3)
(1, 3)	(10, 1.4)	(1, 1.6)

TABLE 3.1 – Paramètres des lois d'état pour le cas test 1.

On compare la solution exacte du problème de Riemann aux solutions approchées issues du schéma de relaxation de Suliciu et du schéma de Rusanov, qui est le seul autre schéma existant pour ce modèle triphasique (voir [6]). Le maillage utilisé est composé de 100 mailles, ce qui correspond à un maillage réaliste (du point de vue du coût de calcul) de 10^6 mailles en 3D. On voit que le schéma de relaxation est beaucoup plus précis que le schéma de Rusanov. Sur un maillage grossier de 100 mailles, le schéma de relaxation capture convenablement tous les états intermédiaires contrairement au schéma de Rusanov. Le manque de précision du schéma de Rusanov (dû à son caractère très dissipatif) s'observe particulièrement au niveau des états intermédiaires de la phase 3.

	\mathbb{U}_L	\mathbb{U}_R
α_1	0.9	0.4
α_2	0.05	0.4
ρ_1	2.5	1.03097
u_1	-0.56603	-1.62876
ρ_2	0.2	1.25044
u_2	6.18311	1.14140
ρ_3	0.5	.59926
u_3	0.31861	-0.73119

TABLE 3.2 – Cas test 1 : donnée initiale de type Riemann.

Pour plusieurs pas d'espace Δx , on calcule également l'erreur en norme L^1 entre la solution exacte et la solution approchée calculée par les deux schémas au temps final $T_{\max} = 0.05$:

$$E(\Delta x) = \frac{\sum_j |\phi_j^N - \phi_{ex}(x_j, T_{\max})| \Delta x}{\sum_j |\phi_{ex}(x_j, T_{\max})| \Delta x},$$

où ϕ est une des variables non conservatives ($\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, u_1, \rho_2, u_2, \rho_3, u_3$). L'erreur est calculée pour une série de maillages composés de 100×2^n mailles avec $n = 0, 1, \dots, 10$. La Figure 3.2 donne le tracé de $E(\Delta x)$ en fonction de Δx dans une échelle logarithmique. Les deux schémas fournissent des approximations qui semblent converger à l'ordre théorique attendu de $\Delta x^{1/2}$ (en raison de la présence d'ondes linéairement dégénérées).

Même si le schéma de Rusanov est réputé très diffusif, il reste attractif en raison de sa mise en œuvre qui est relativement simple et peu coûteuse à maillage donné. Afin de mieux comparer les performances des deux schémas en termes de temps de calcul, il convient de comparer le temps de calcul nécessaire pour atteindre une erreur donnée. Dans la Figure 3.3 on trace en échelle logarithmique et pour les diverses variables non conservatives ϕ , l'erreur $E(\Delta x)$ en fonction du temps de calcul CPU (en secondes) pour les deux schémas numériques. Chaque point correspond à un calcul pour une taille de maillage donnée. On voit que pour toutes les variables mis à part ρ_1 et u_1 , le temps de calcul nécessaire pour atteindre un niveau d'erreur donné est beaucoup plus petit avec le schéma de relaxation qu'avec le schéma de Rusanov. Pour ce cas test unidimensionnel, il faut en moyenne dix fois plus de temps de calcul au schéma de Rusanov qu'au schéma de relaxation pour atteindre le même niveau d'erreur sur une variable donnée. Pour un cas test tridimensionnel, cela correspondrait à un coût de calcul 10^4 fois plus grand pour le schéma de Rusanov que pour le schéma de relaxation. La grande précision du schéma de relaxation compense donc largement sa relative complexité par rapport au schéma de Rusanov.

Cas test 2 : un problème de Riemann couplant une zone monophasique et une zone triphasique : Dans ce cas test, les lois d'état thermodynamiques sont données par (3.84) avec les paramètres donnés dans le Tableau 3.3.

(κ_1, γ_1)	(κ_2, γ_2)	(κ_3, γ_3)
(1, 3)	(10, 1.4)	(5, 1.6)

TABLE 3.3 – Paramètres des lois d'état pour le cas test 2.

On considère un problème de Riemann pour lequel les taux de présence des phases 1 et 2 sont nuls dans la donnée initiale de gauche. L'onde de vitesse u_1 sépare alors une zone monophasique (avec uniquement la phase 3) à gauche d'une phase de mélange triphasique à droite.

En pratique, on prend $\alpha_{1,L} = \alpha_{2,L} = 10^{-10}$ dans les simulations numériques. Les résultats sont donnés dans la Figure 3.4. On observe là encore qu'à maillage donné (composé ici de 100 mailles) le schéma de relaxation est beaucoup plus précis que le schéma de Rusanov. Dans la zone monophasique où les phases 1 et 2 ne sont (quasiment) pas présentes, on observe que le schéma de relaxation est

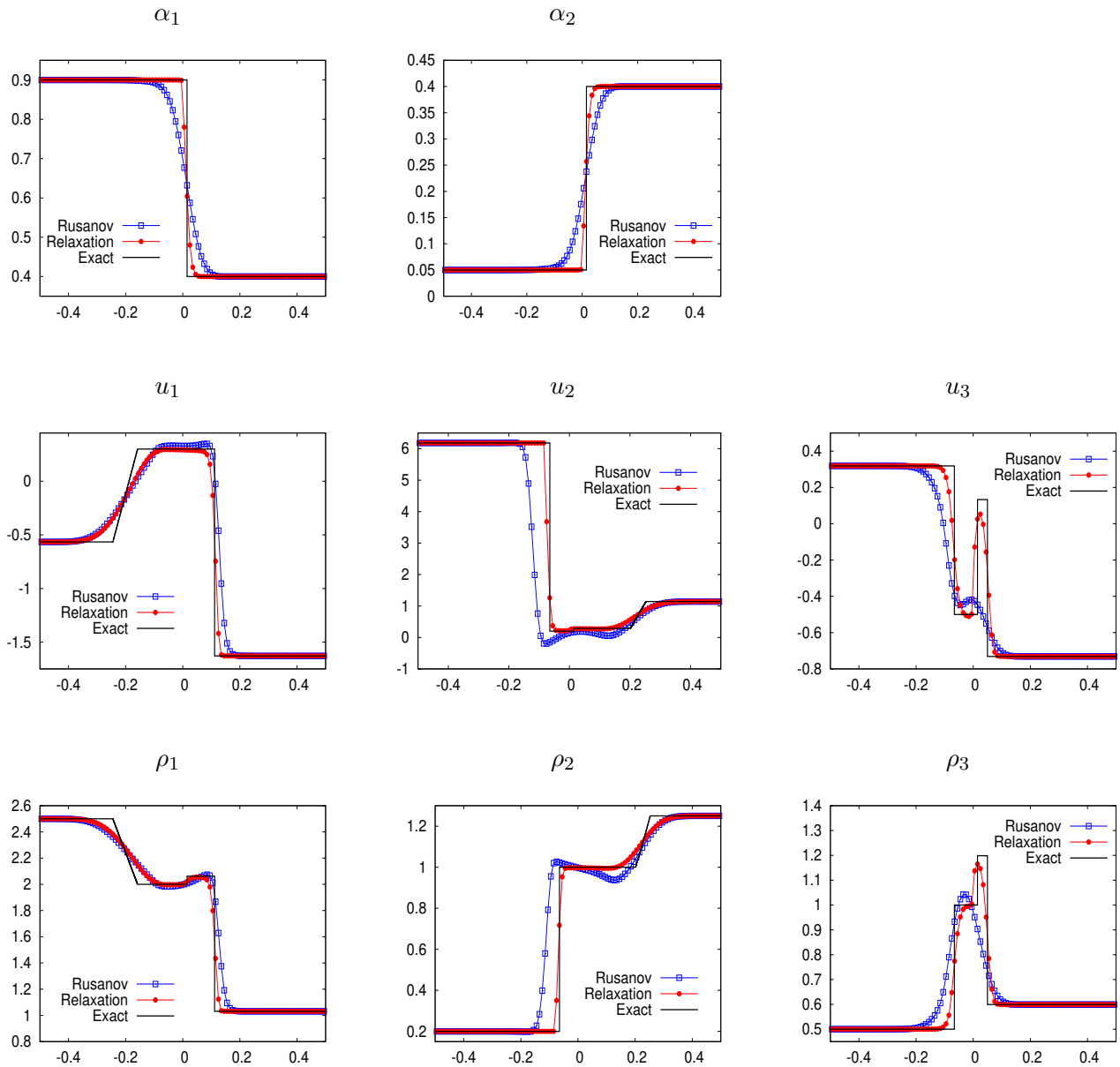


FIGURE 3.1 – Cas test 1 : variations spatiales de la solution au temps $T_{\max} = 0.05$. Maillage : 100 mailles.

	\mathbb{U}_L	\mathbb{U}_R
α_1	0.0	0.4
α_2	0.0	0.2
ρ_1	–	0.67758
u_1	–	-0.96764
ρ_2	–	0.5
u_2	–	-2.19213
ρ_3	0.5	1.24587
u_3	2.03047	0.70127

TABLE 3.4 – Cas test 2 : donnée initiale du problème de Riemann.

bien plus stable que le schéma de Rusanov pour lequel les divisions par de petites valeurs de α_1 et α_2 occasionnent de fortes oscillations sur les variables non conservatives. On observe par ailleurs que l'amplitude de ces oscillations augmente d'autant plus que le maillage est fin !

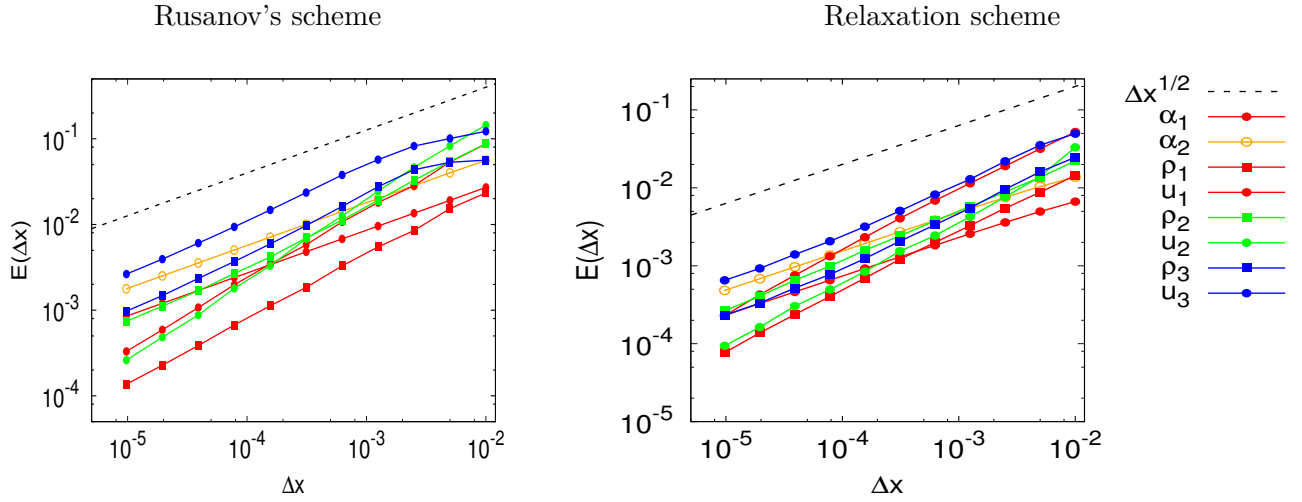


FIGURE 3.2 – Cas test 1 : Erreur L^1 en fonction de Δx pour les schémas de relaxation et de Rusanov.

3.3.4 Schéma de relaxation pour le modèle complet avec énergies

On considère à présent le modèle multifluide à N phases avec équations d'énergies unidimensionnel. Pour $k = 1, \dots, N$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \alpha_k + V_I(U) \partial_x \alpha_k &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k(\rho_k, e_k)) + \sum_{l \neq k}^N P_{kl}(U) \partial_x \alpha_l &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k, e_k) u_k) + V_I(U) \sum_{l \neq k}^N P_{kl}(U) \partial_x \alpha_l &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

avec les lois de fermeture

$$V_I = u_1, \quad \text{et} \quad \begin{cases} P_{1l}(U) = p_l(\rho_l, e_l), & \text{pour } l = 2, \dots, N, \\ P_{kl}(U) = p_k(\rho_k, e_k), & \text{pour } k \geq 2, l = 1, \dots, N, l \neq k, \end{cases} \tag{3.86}$$

dont l'inconnue est recherchée dans l'espace des phases suivant

$$\begin{aligned}
 \Omega_U = \left\{ U = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 u_1, \dots, \alpha_N \rho_N u_N, \right. \\
 \left. \alpha_1 \rho_1 E_1, \dots, \alpha_N \rho_N E_N)^T \in \mathbb{R}^{4N-1}, \text{ tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1, \right. \\
 \left. \alpha_k \rho_k > 0 \text{ et } \alpha_k \rho_k (E_k - (u_k)^2/2) > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}.
 \end{aligned}$$

On rappelle que les lois de pressions phasiques $(\rho_k, e_k) \mapsto p_k(\rho_k, e_k)$ sont supposées satisfaire le second principe de la thermodynamique : il existe $T_k(\rho_k, e_k)$ et $s_k(\rho_k, e_k)$ avec $(\tau_k, e_k) \mapsto s_k(\tau_k^{-1}, e_k)$ convexe et

$$T_k ds_k = \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k - de_k.$$

Pour les lois de fermeture (3.86), les solutions régulières de (3.85) satisfont la conservation de toutes les entropies phasiques :

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k s_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k s_k u_k) = 0. \tag{3.87}$$

Les solutions faibles entropiques quant à elles sont les solutions faibles qui satisfont, au sens faible, les inégalités d'entropie phasiques :

$$\partial_t (\alpha_k \rho_k s_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k s_k u_k) \leq 0. \tag{3.88}$$

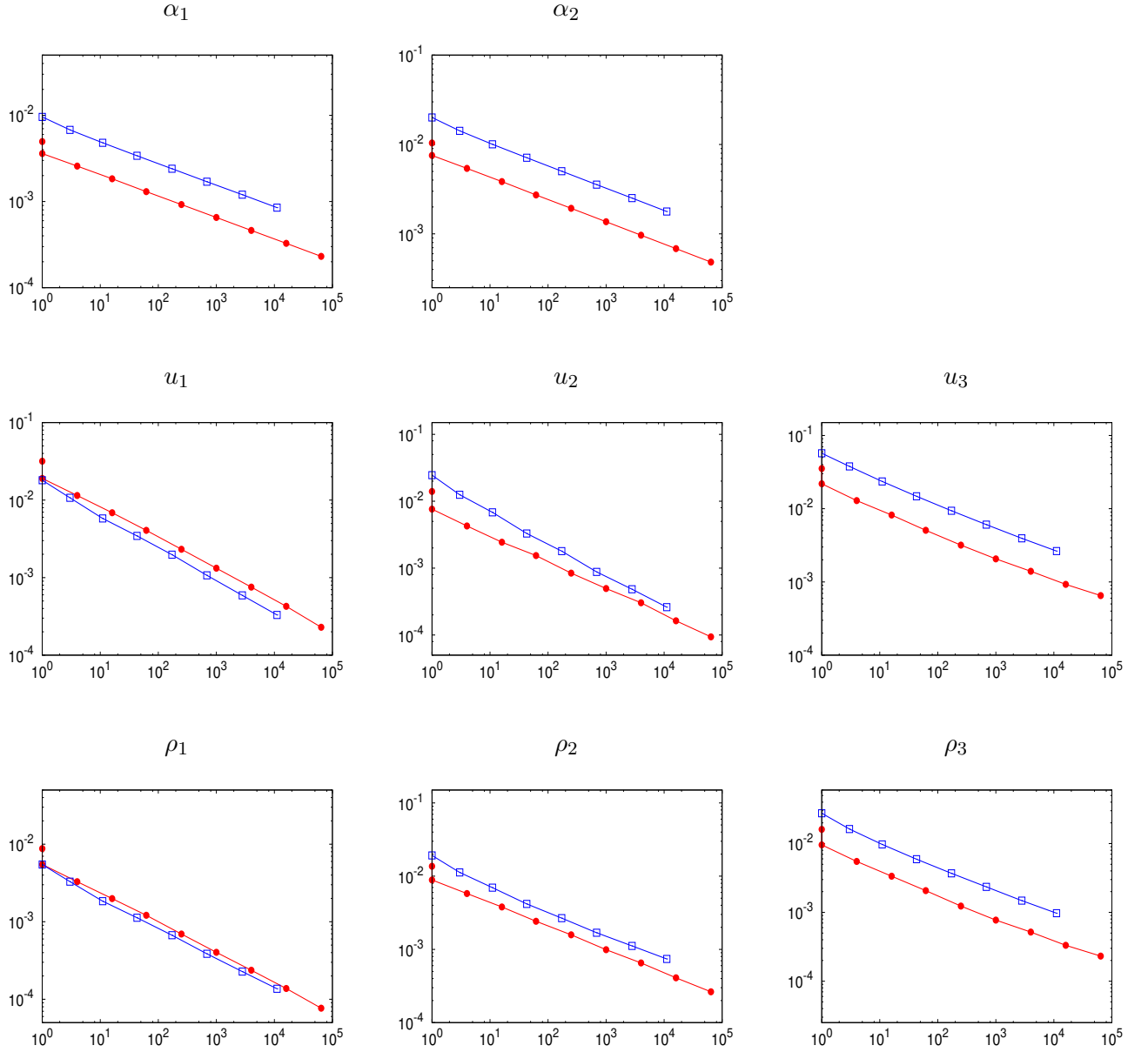


FIGURE 3.3 – Cas test 1 : Erreur L^1 en fonction du temps de calcul CPU (en secondes) pour le schéma de relaxation (points, ligne rouge) et le schéma de Rusanov (carrés, ligne bleue).

Comme dans le cas monophasique des équations d'Euler, il est possible d'étendre le schéma de relaxation à la Suliciu pour le modèle barotrope en considérant un schéma numérique en deux étapes, où la première étape consiste en un solveur de Riemann de relaxation pour un système auxiliaire où les équations d'énergies sont remplacées par les lois de conservation pour les entropies phasiques (3.87). La partie convective du système de relaxation s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \partial_t \alpha_k + u_1 \partial_x \alpha_k &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, s_k, \mathcal{T}_k)) + \sum_{l \neq k}^N \Pi_{kl}(\mathbb{W}) \partial_x \alpha_l &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k s_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k s_k u_k) &= 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k u_k) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

avec

$$\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k, s_k) = \mathcal{P}_k(\mathcal{T}_k, s_k) + a_k^2(\mathcal{T}_k - \tau_k). \tag{3.90}$$

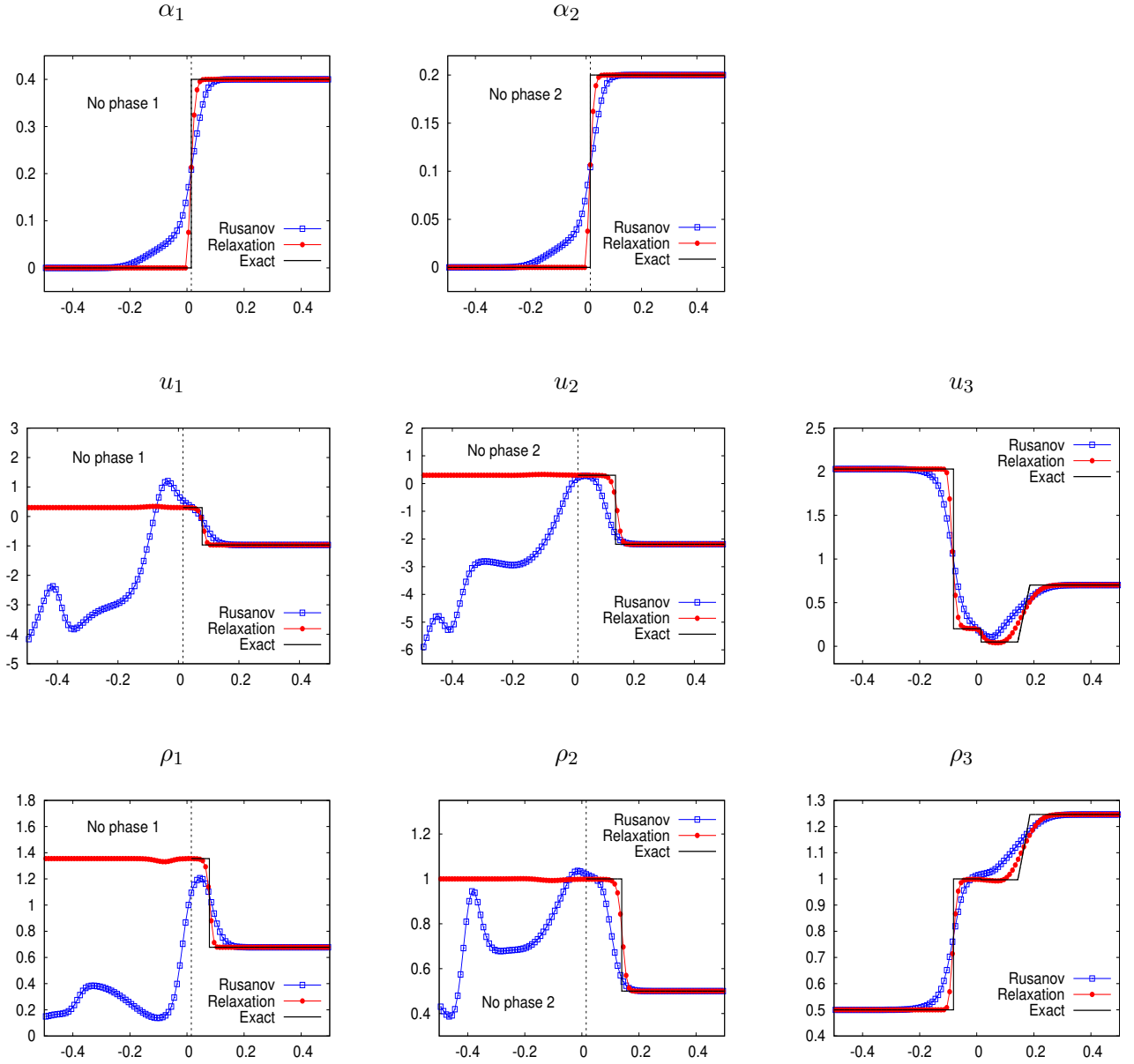


FIGURE 3.4 – Cas test 2 : variations spatiales de la solution au temps $T_{\max} = 0.05$. Maillage : 100 mailles.

où $\mathcal{P}_k(\tau, s) = p_k(\tau^{-1}, e_k(\tau, s))$ avec $s \mapsto e(\tau, s)$ la réciproque de $e \mapsto s(\tau^{-1}, e)$. Les paramètres a_k doivent satisfaire la condition de Whitham :

$$a_k^2 > -\partial_\tau \mathcal{P}_k(\mathcal{T}_k, s_k). \quad (3.91)$$

Les pressions d'interface pour le système de relaxation sont définies par :

$$\begin{cases} \Pi_{ll}(\mathbb{W}) = \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l), & \text{pour } l = 2, \dots, N \\ \Pi_{kl}(\mathbb{W}) = \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k), & \text{pour } k \geq 2, l = 1, \dots, N, l \neq k. \end{cases} \quad (3.92)$$

La solution est recherchée dans l'espace des phases suivant :

$$\Omega_{\mathbb{W}} = \left\{ U = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 u_1, \dots, \alpha_N \rho_N u_N, \right. \\ \left. \alpha_1 \rho_1 s_1, \dots, \alpha_N \rho_N s_N, \alpha_1 \rho_1 \mathcal{T}_1, \dots, \alpha_N \rho_N \mathcal{T}_N)^T \in \mathbb{R}^{5N-1}, \text{ tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1, \right. \\ \left. \alpha_k \rho_k > 0, \text{ et } \alpha_k \rho_k e_k(\tau_k, s_k) > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}.$$

On note alors $\mathbb{W}_{R,\text{ex}}(\xi; \mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R)$ la solution du problème de Cauchy pour (3.89) avec la donnée initiale de type Riemann suivante.

$$\mathbb{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L & x < 0, \\ \mathbb{W}_R & x > 0. \end{cases}$$

Cette solution s'obtient à partir de la solution du problème de Riemann de relaxation pour le modèle barotrope calculée à la section 3.2.3, en remplaçant formellement l'inconnue \mathcal{T}_k par le vecteur d'inconnues (\mathcal{T}_k, s_k) .

En notant Δt et Δx les pas d'espace et de temps et U_j^n l'approximation de la solution au temps $t^n = n\Delta t$ sur $C_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$ où $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on obtient un schéma qui se met sous la forme d'un schéma numérique de volumes finis non conservatif :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F^-(U_j^n, U_{j+1}^n) - F^+(U_{j-1}^n, U_j^n) \right). \quad (3.93)$$

Le pas de temps Δt est mis à jour de manière à satisfaire une condition CFL prescrite pas les ondes acoustiques du système de relaxation pour le modèle auxiliaire (3.89) :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \max_{j \in \mathbb{Z}} \max \left\{ |(u_k - a_k \tau_k)_j^n|, |(u_k + a_k \tau_k)_{j+1}^n| \right\} < \frac{1}{2}. \quad (3.94)$$

Théorème 3.3.5. *Le schéma de relaxation (3.93) a les propriétés suivantes :*

- **Positivité :** *Sous la condition CFL (3.94), le schéma préserve la positivité des taux de présence statistiques, des masses volumiques et des énergies internes : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(U_j^n \in \Omega_U$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$), alors $0 < (\alpha_k)_j^{n+1} < 1$, $(\alpha_k \rho_k)_j^{n+1} > 0$, et $(E_k - u_k^2/2)_j^{n+1} > 0$ pour tout $k = 1, \dots, N$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, i.e. $(U_j^{n+1} \in \Omega_U$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$).*
- **Conservativité :** *Les discrétisations des masses partielles $\alpha_k \rho_k$, $k = 1, \dots, N$, de la quantité de mouvement totale $\sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k u_k$ et de l'énergie totale de mélange $\sum_{k=1}^N \alpha_k \rho_k E_k$ sont conservatives.*
- **Inégalités d'entropie discrètes :** *On suppose que les paramètres de relaxation $(a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n$, $k = 1, \dots, N$ satisfont la condition de Whitham à chaque pas de temps et à chaque interface, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $(a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n$, $k = 1, \dots, N$, $(a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n$ vérifie*

$$((a_k)_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 > -\partial_{\tau_k} \mathcal{P}_k(\mathcal{T}_k, s_k), \quad (3.95)$$

pour tous \mathcal{T}_k et s_k dans la solution du problème de Riemann relaxé en $x_{j+\frac{1}{2}}$. Alors les valeurs U_j^n calculées par le schéma numérique satisfont des inégalités d'entropie discrètes : pour $k = 1, \dots, N$:

$$(\alpha_k \rho_k s_k)(U_j^{n+1}) \leq (\alpha_k \rho_k s_k)(U_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k s_k u_k)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\alpha_k \rho_k s_k u_k)_{j-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (3.96)$$

Remarque 3.3.2.

1. *Il est remarquable de noter que les propriétés de positivité des masses volumiques et des énergies internes ainsi que les inégalités d'entropie discrètes sont valables quel que soit le choix des lois d'états, pourvu qu'elles soient admissibles.*
2. *Même dans le cas diphasique $N = 2$ du système de Baer-Nunziato, le schéma de relaxation est le premier schéma numérique, et à ma connaissance le seul, pour lequel on peut démontrer ces propriétés de positivité et d'inégalités d'entropies discrètes.*

3.3.5 Un cas test pour le système diphasique ($N = 2$) avec énergies

L'extension du schéma numérique pour le modèle avec équations d'énergies n'a été mise en œuvre numériquement que dans le cas du modèle diphasique de Baer-Nunziato ($N = 2$). L'extension au cas général ($N \geq 3$) avec équations d'énergies est immédiate mais reste encore à mettre en œuvre numériquement.

On présente un cas test de type problème de Riemann tiré de [20]. La loi de fermeture considérée ici pour les vitesse et pression d'interface est :

$$V_I(U) = u_2, \quad P_I(U) = p_1.$$

D'autres cas tests peuvent être trouvés dans [20]. Les lois d'états des deux phases sont des lois de type gaz parfaits ou *stiffened gas* :

$$\begin{aligned} p_1(\rho_1, e_1) &= (\gamma_1 - 1)\rho_1 e_1, & \gamma_1 &= 1.4 \\ p_2(\rho_2, e_2) &= (\gamma_2 - 1)\rho_2 e_2 - \gamma_2 p_{\infty,2}, & \gamma_2 &= 3, \quad p_{\infty,2} = 100. \end{aligned}$$

La donnée initiale est de type Riemann et donnée dans le tableau 3.5.

	U_L	U_R
α_1	0.3	0.8
ρ_1	1.0	1.0
u_1	-19.59741	-19.59741
p_1	1000.0	0.01
ρ_2	1.0	1.0
u_2	-19.59716	-19.59741
p_2	1000.0	0.01

TABLE 3.5 – Donnée initiale.

Dans la figure 3.5, la solution approchée calculée avec le schéma de relaxation est comparée à la solution exacte et aux solutions approchées obtenues avec d'autres schémas de la littérature, à savoir le schéma de Rusanov, le schéma de type Godunov de Schwendeman *et al.* [50] et le schéma de type HLLC de Toro et Tokareva [56]. On voit que le schéma de relaxation a des performances similaires aux schémas de Godunov et HLLC. Les trois schémas sont beaucoup plus précis que le schéma de Rusanov qui, avec un maillage de 100 mailles ne capture que très approximativement les états intermédiaires. Dans la figure 3.6, on montre la convergence de l'erreur en norme L^1 en fonction du pas du maillage Δx ainsi que l'évolution de l'erreur en fonction du temps de calcul CPU pour les schémas de relaxation et de Rusanov. Comme pour le cas barotrope, le gain en temps de calcul pour une erreur donnée est très significatif pour le schéma de relaxation comparativement au schéma de Rusanov.

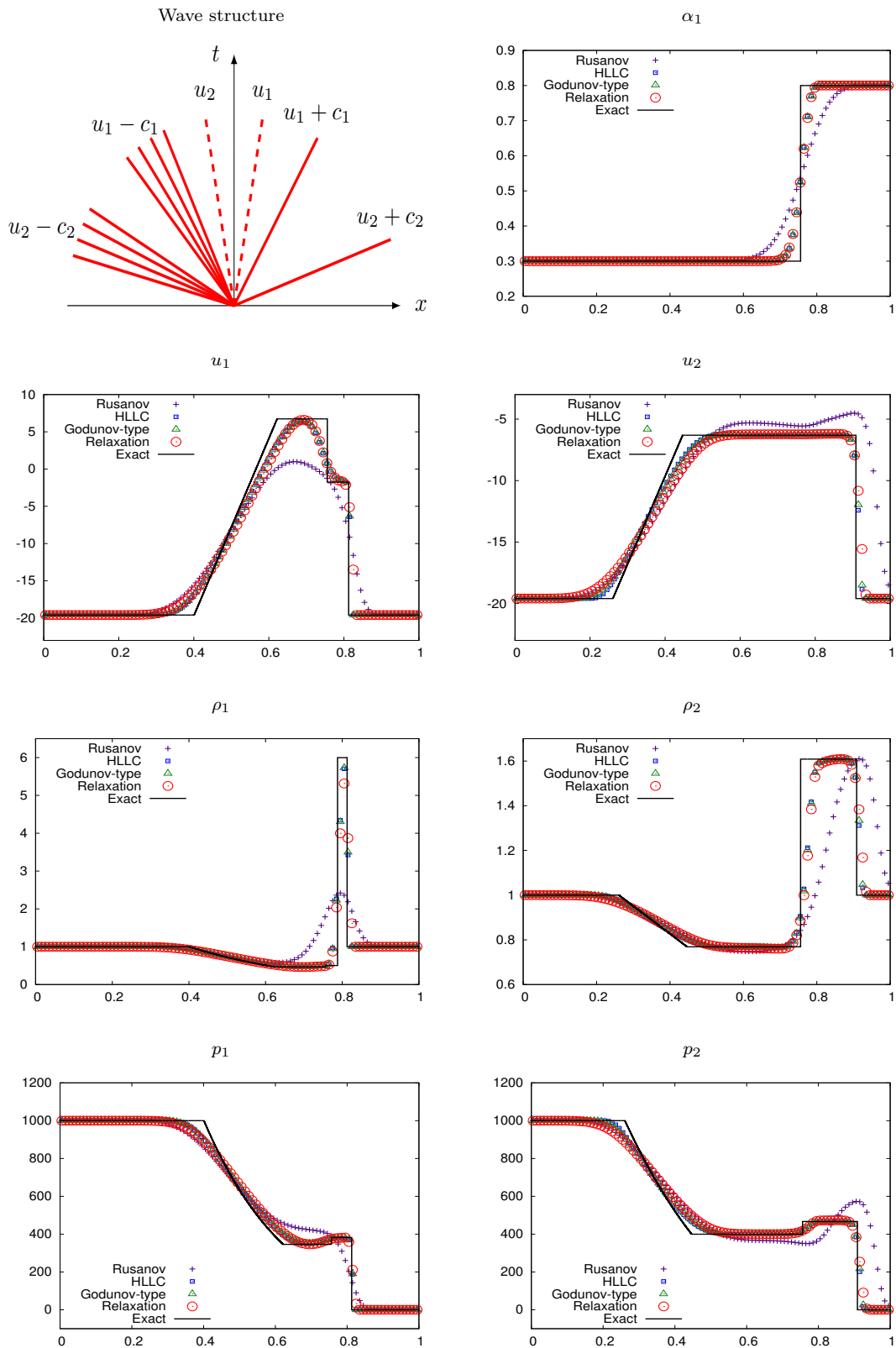


FIGURE 3.5 – Variations spatiales de la solution au temps $T_{\max} = 0.15$.
Maillage : 100 mailles.

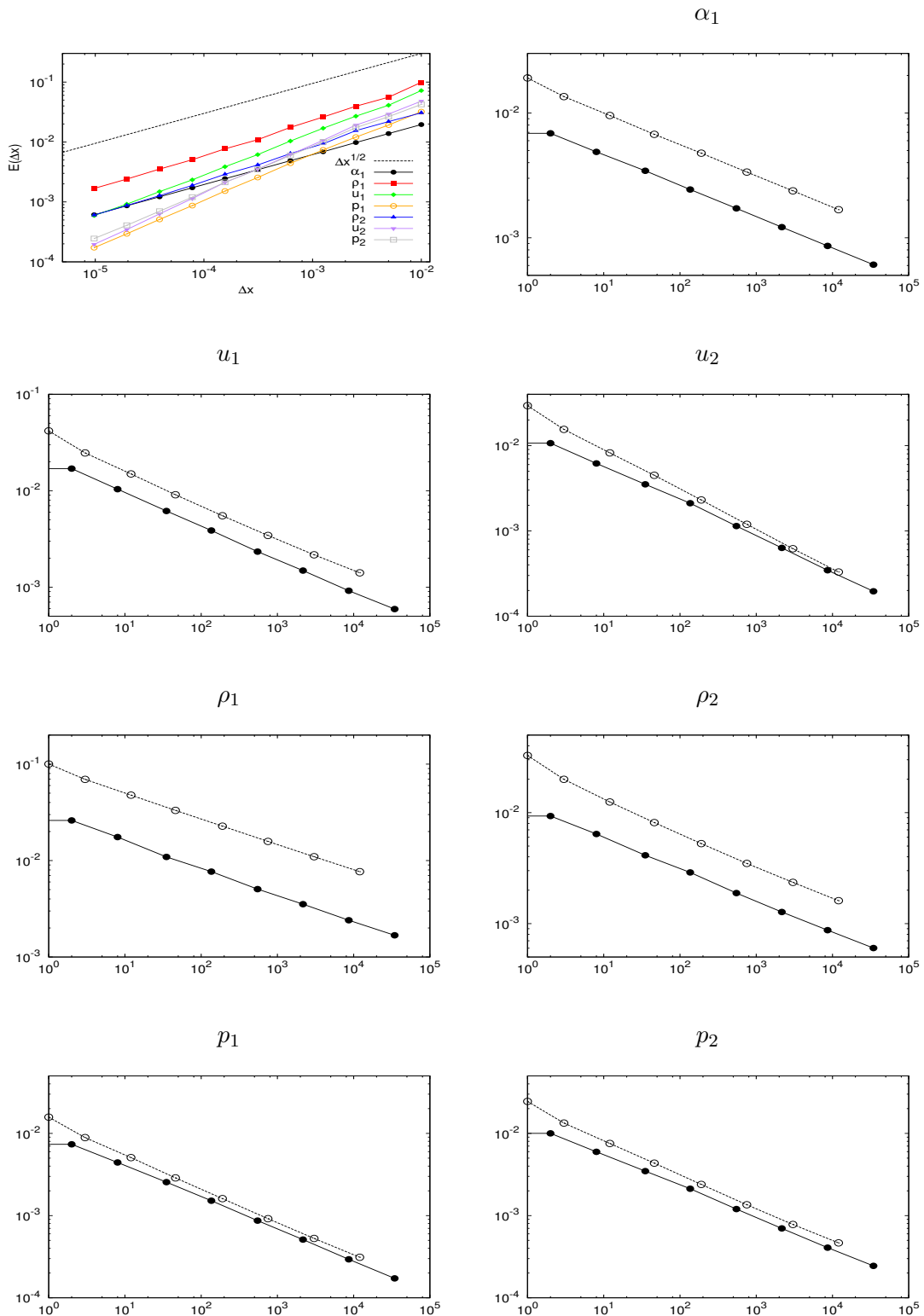


FIGURE 3.6 – Erreur L^1 en fonction de Δx et en fonction du temps de calcul CPU (en secondes) pour le schéma de relaxation (ligne continue) et le schéma de Rusanov (ligne pointillée).

3.4 Extension à un modèle multifluide avec champs miscibles

Les modèles multifluides considérés jusqu'ici ne permettent pas de modéliser des écoulements avec des phases miscibles c'est-à-dire des écoulements où certaines phases sont constituées de plusieurs constituants. C'est le cas par exemple d'un écoulement mettant en jeu de l'eau sous forme liquide (l), de la vapeur d'eau (v) et un gaz inerte (g) (qui n'échange pas de masse avec l'eau), tel que de l'air, qui partage la phase gazeuse avec la vapeur d'eau. On parle alors d'écoulement diphasique à trois champs. Dans l'industrie nucléaire, de tels écoulements peuvent apparaître dans des configurations accidentelles telles que l'accident de perte de réfrigérant primaire (APRP).

Une extension des modèles multifluides de type Baer-Nunziato pour la prise en compte de tels écoulements a été effectuée dans [33]. La version barotrope et sans termes sources du modèle unidimensionnel s'écrit, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_l + u_l \partial_x \alpha_l &= 0, \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l(\rho_l)) + p_v(\rho_v) \partial_x \alpha_v + p_g(\rho_g) \partial_x \alpha_g &= 0, \end{aligned}$$

et pour $k = v, g$:

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k(\rho_k)) - p_k(\rho_k) \partial_x \alpha_k &= 0. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Pour $k \in \{l, v, g\}$, $\rho_k(t, x) > 0$ et $u_k(t, x) \in \mathbb{R}$ sont respectivement la masse volumique et la vitesse du champ k . La pression du champ k ne dépend que de la densité du champ correspondant et est donnée par une équation d'état barotrope $p_k : \rho_k \mapsto p_k(\rho_k)$ strictement croissante. Enfin, $\alpha_k \in (0, 1)$ est la fraction statistique du champ k . Comme le champ de vapeur et le gaz inerte partagent la même phase gazeuse, nous avons la contrainte de saturation suivante

$$\alpha_v = \alpha_g = 1 - \alpha_l. \tag{3.98}$$

Remarque 3.4.1. *Des termes sources peuvent être ajoutés au modèle (3.97) pour tenir compte des transferts de masse entre eau liquide et eau vapeur et des échanges thermodynamiques.*

Proposition 3.4.1. *On note $\mathbb{U} := (\alpha_l, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_v \rho_v, \alpha_v \rho_v u_v, \alpha_g \rho_g, \alpha_g \rho_g u_g)$. Le système (3.97) est faiblement hyperbolique et admet les valeurs propres réelles suivantes*

$$\sigma_1(\mathbb{U}) = u_l, \quad \sigma_{2,3}(\mathbb{U}) = u_l \pm c_l(\rho_l), \quad \sigma_{4,5}(\mathbb{U}) = u_v \pm c_v(\rho_v), \quad \sigma_{6,7}(\mathbb{U}) = u_g \pm c_g(\rho_g),$$

où $c_k(\rho_k) = \sqrt{p'_k(\rho_k)}$ est la vitesse du son du champ k . Tous les champs caractéristiques sont vraiment non linéaires, à l'exception de σ_1 qui est linéairement dégénéré. L'ensemble des vecteurs propres correspondants engendre \mathbb{R}^7 si et seulement si

$$|u_k - u_l| \neq c_k(\rho_k) \quad \text{pour } k = g, v. \tag{3.99}$$

L'énergie spécifique totale du champ k est définie par $E_k = e_k + u_k^2/2$, où l'énergie interne spécifique du champ k est telle que $e'_k(\rho_k) = p_k(\rho_k)/\rho_k^2$. La fonction $\mathbb{U} \mapsto (\alpha_k \rho_k E_k)(\mathbb{U})$ est (non strictement) convexe. Les solutions faibles entropiques du système (3.97) sont les solutions faibles qui satisfont l'inégalité suivante au sens faible :

$$\partial_t \left(\sum_{k=l,g,v} \alpha_k \rho_k E_k \right) + \partial_x \left(\sum_{k=l,g,v} (\alpha_k \rho_k E_k u_k + \alpha_k p_k(\rho_k) u_k) \right) \leq 0. \tag{3.100}$$

Pour les solutions régulières de (3.97), (3.100) est une égalité.

3.4.1 Schéma de relaxation

Comme pour les modèles à phases non miscibles, on introduit un système de relaxation pour lequel on cherche à construire un solveur de Riemann exact. Pour le système diphasique à trois champs, la partie convective du modèle de relaxation s'écrit, tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\partial_t \alpha_l + u_l \partial_x \alpha_l &= 0, \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)) + \pi_v(\tau_v, \mathcal{T}_v) \partial_x \alpha_v + \pi_g(\tau_g, \mathcal{T}_g) \partial_x \alpha_g &= 0, \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l \mathcal{T}_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l \mathcal{T}_l u_l) &= 0,\end{aligned}$$

$$\text{et pour } k = v, g : \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) \partial_x \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k u_k) &= 0,\end{aligned}$$

avec les lois de pression

$$\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = P_k(\mathcal{T}_k) + a_k^2 (\mathcal{T}_k - \tau_k), \quad k = l, g, v,$$

où $\tau \mapsto P_k(\tau) = p_k(\tau^{-1})$. Les paramètres de relaxation $a_k > 0$ sont choisis de manière à satisfaire la condition de Whitham :

$$a_k^2 \geq -P'_k(\mathcal{T}_k). \tag{3.102}$$

Dans la résolution du problème de Riemann pour le système de relaxation du modèle multifluide à trois phases non miscibles, les équations de transport pour α_l et α_v sont résolues et par la relation de saturation $\sum_{k=l,v,g} \alpha_k = 1$, α_g est calculé en appliquant l'initialisation suivante :

$$\alpha_g(t=0) := 1 - \alpha_l(t=0) - \alpha_v(t=0).$$

L'extension au problème relaxé pour le modèle diphasique à trois champs ci-dessus est assez simple. Elle consiste à résoudre l'équation de transport pour α_l tandis que $\alpha_g = \alpha_v$ sont calculés en appliquant l'initialisation :

$$\alpha_g(t=0) = \alpha_v(t=0) := 1 - \alpha_l(t=0).$$

Puisque dans les cas miscibles et non miscibles, les taux de présence statistiques α_k satisfont la même équation de transport :

$$\partial_t \alpha_k + u_l \partial_x \alpha_k = 0,$$

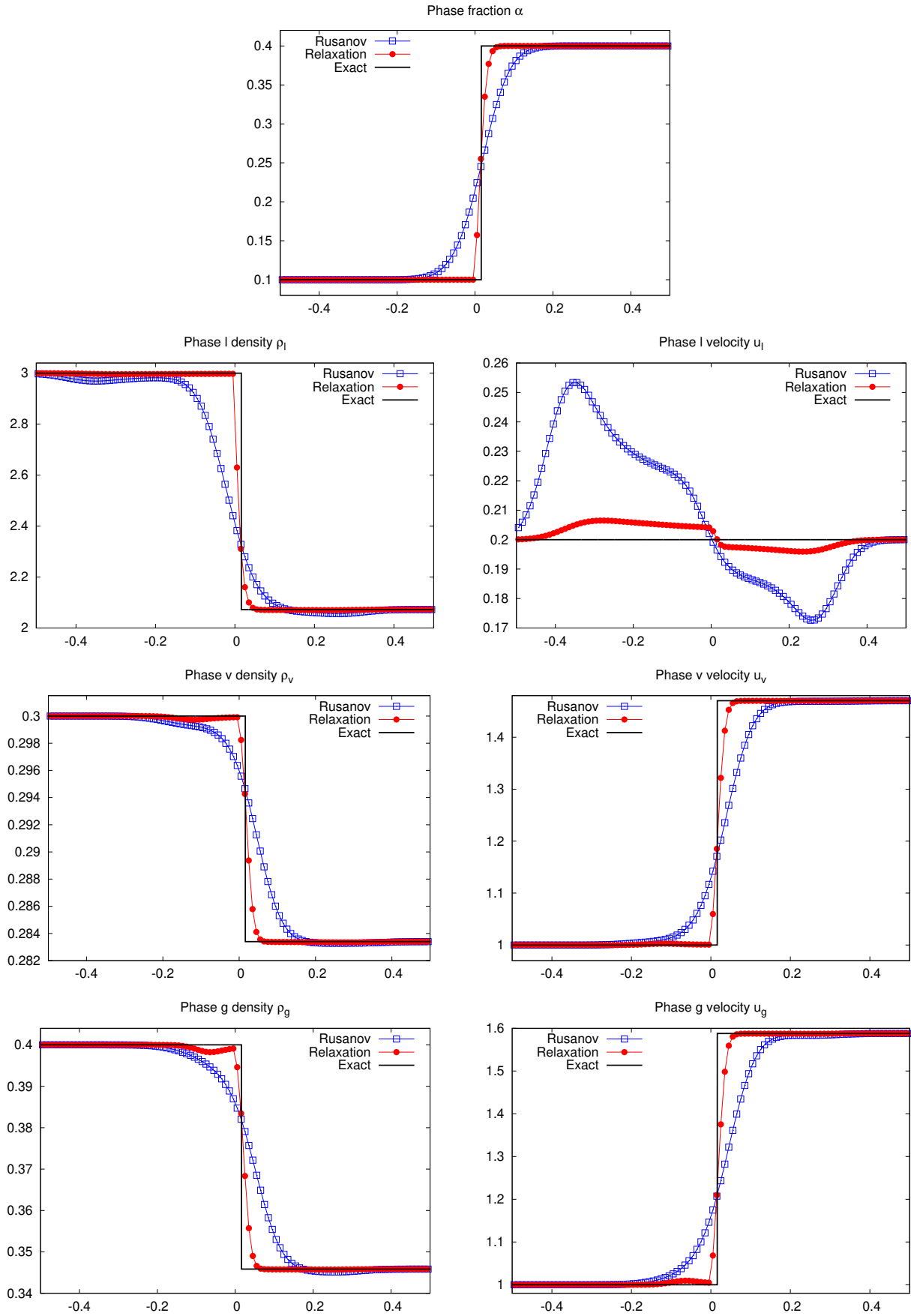
l'expression de la solution globale du problème de Riemann est inchangée! On obtient donc là aussi un schéma numérique qui prend la forme d'un schéma de volumes finis explicite non conservatif et qui a les mêmes propriétés que précédemment : positivité des taux de présence statistiques et des masses volumiques, inégalités d'énergie discrètes. Il peut être également étendu à une version du modèle avec équations d'énergies prenant en compte des lois d'état complètes (non barotropes). Le schéma qui en résulte préserve la positivité des taux de présence, des masses volumiques et des énergies internes. Il vérifie également des inégalités d'entropie discrètes.

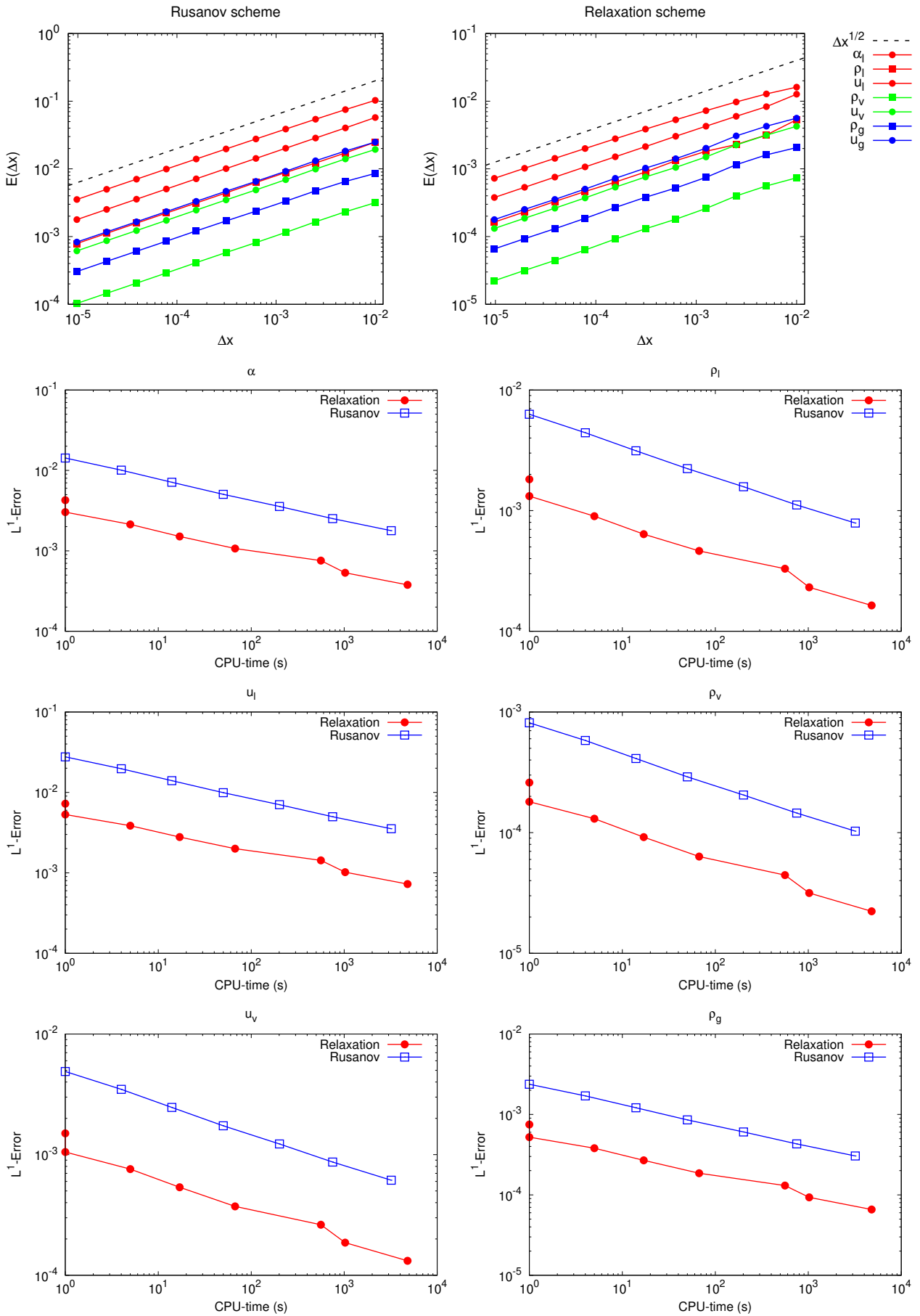
3.4.2 Un cas test numérique

On présente un cas test numérique composé de l'unique onde de vitesse u_l . D'autres simulations peuvent être trouvées dans [15] et [14], notamment des simulations où des termes sources de retour à l'équilibre thermodynamique entre les phases sont discrétisés. La donnée initiale est donnée par

$$\begin{aligned}U_L &= (0.1, 3.0, 0.2, 0.3, 1.0, 0.4, 1.0), \\ U_R &= (0.4, 2.0724212862957074, 0.2, 0.28339834471128433, \\ &\quad 1.4702967632600488, 0.34584269153214842, 1.5879142504747157).\end{aligned} \tag{3.103}$$

La solution exacte au temps $T = 0.08$ ainsi que les solutions approchées par le schéma de relaxation et le schéma de Rusanov sont donnés dans la figure 3.7. On présente également le tracé de l'erreur L^1 en fonction du pas d'espace Δx et du temps de calcul CPU (en secondes) dans la Figure 3.8. Les résultats sont comparables à ceux des sections précédentes.

FIGURE 3.7 – Variations spatiales de la solution au temps $T = 0.08$. Maillage : 100 mailles.

FIGURE 3.8 – Erreur L^1 en fonction de Δx et en fonction du temps de calcul CPU (en secondes).

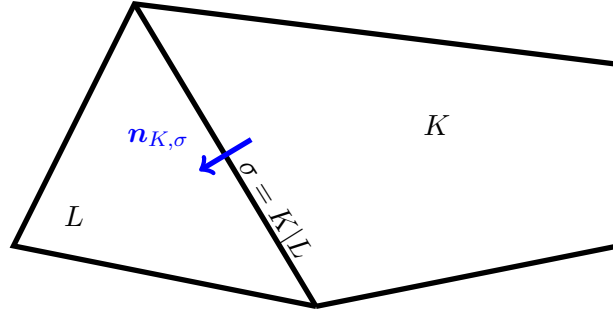


FIGURE 3.9 – Notations pour un maillage conforme non structuré.

3.5 Extension multidimensionnelle du schéma de relaxation

On souhaite étendre le schéma de relaxation en un schéma de volumes finis multidimensionnel afin d’approcher les solutions faibles d’un problème de Cauchy pour le modèle multifluide que l’on réécrit ici : pour $k = 1, \dots, N$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \{2, 3\}$) :

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_k + \mathbf{V}_I(U) \cdot \nabla \alpha_k &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (\alpha_k p_k) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(U) \nabla \alpha_l &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k E_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k E_k \mathbf{u}_k + \alpha_k p_k \mathbf{u}_k) + \mathbf{V}_I(U) \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N P_{kl}(U) \nabla \alpha_l &= 0. \end{aligned}$$

On suppose des lois de fermeture sur la vitesse et les pressions interfaciales données par $\mathbf{V}_I(U) = u_1$ et (2.12). On se restreint au cas de la dimension 2 (on peut généraliser à la dimension 3) et on écrit le problème sous forme vectorielle, pour $t > 0$ et $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \partial_t U + \partial_x f_1(U) + \partial_y f_2(U) + c_1(U) \partial_x U + c_2(U) \partial_y U &= 0, \\ U(0, x) &= U_0(x). \end{aligned} \quad (3.104)$$

La solution est à valeurs dans l’espace des états admissibles

$$\begin{aligned} \Omega_U = \left\{ U = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_1 \rho_1, \dots, \alpha_N \rho_N, \alpha_1 \rho_1 \mathbf{u}_1, \dots, \alpha_N \rho_N \mathbf{u}_N, \right. \\ \left. \alpha_1 \rho_1 E_1, \dots, \alpha_N \rho_N E_N)^T \in \mathbb{R}^{5N-1}, \text{ tel que } 0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} < 1, \right. \\ \left. \alpha_k \rho_k > 0 \text{ et } \alpha_k \rho_k (E_k - |\mathbf{u}_k|^2/2) > 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, N \right\}. \end{aligned}$$

3.5.1 Schéma de volumes finis sur maillages non structurés

On introduit un pas de temps Δt et les temps discrets $t^n = n\Delta t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La discrétisation spatiale est une discrétisation sur maillage conforme non structuré donnée par la

Définition 3.5.1 (Maillage conforme, voir Figure 3.9). *Un maillage \mathcal{M} de \mathcal{O} est une famille composée de polygones convexes $K \in \mathcal{M}$ qui forme une partition de \mathcal{O} : $\overline{\mathcal{O}} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \overline{K}$. On suppose que le maillage est conforme i.e. que “toute face σ d’un élément $K \in \mathcal{M}$ est soit contenue dans la frontière $\partial \mathcal{O}$, soit égale à une face d’un autre élément L ”, et on note alors $\sigma = K|L$. Pour chaque $K \in \mathcal{M}$, on note $\mathcal{E}(K)$ l’ensemble des faces de K , et par \mathcal{E} l’ensemble des faces du maillage. On note \mathcal{E}_{ext} resp. \mathcal{E}_{int} l’ensemble des faces externes resp. internes : $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial \mathcal{O}\}$ et $\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$. Le vecteur unitaire normal à $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ et sortant de K est noté $\mathbf{n}_{K,\sigma}$. Dans la suite, la notation $|K|$, $|\partial K|$ ou $|\sigma|$ désigne indifféremment l’aire de K dans \mathbb{R}^2 ou la longueur dans \mathbb{R} de ∂K ou de la face σ .*

La discrétisation par volumes finis consiste à approcher la solution de (3.104) aux temps discrets t^n par une fonction constante sur chaque maille K notée U_K^n représentant sa moyenne sur cette maille

K . On initialise la solution discrète en posant :

$$U_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K U_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad K \in \mathcal{M}. \quad (3.105)$$

On cherche à écrire un schéma de volumes finis qui est l'analogue 2D d'un schéma explicite à 3-points en 1D. Le schéma prend la forme suivante :

$$U_K^{n+1} = U_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(K) \\ \sigma = K|L}} |\sigma| \mathbf{F}(U_K^n, U_L^n; \mathbf{n}_{K,\sigma}), \quad K \in \mathcal{M}, \quad n \geq 0. \quad (3.106)$$

Notons que, le système (3.104) étant non conservatif, les flux numériques ne sont pas conservatifs. En général, la fonction $\mathbf{F}(U_1, U_2; \mathbf{n})$ est telle que

$$\mathbf{F}(U_1, U_2; \mathbf{n}) \neq -\mathbf{F}(U_2, U_1; -\mathbf{n}).$$

On cherche donc à déterminer les flux numériques. Pour $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^1$, notons $R(\mathbf{n}) \in SO(2)$ la rotation de \mathbb{R}^2 telle que $\mathbf{n} = R(\mathbf{n})\mathbf{e}_x$. On définit également $\mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1} : \Omega_U \rightarrow \Omega_U$, $U \mapsto \tilde{U}$ la transformation qui agit sur un vecteur d'état U en gardant inchangées les quantités scalaires et en changeant les vecteurs vitesses

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k, \quad \tilde{\rho}_k = \rho_k, \quad \tilde{e}_k = e_k, \quad \tilde{\mathbf{u}}_k = R(\mathbf{n})^{-1}\mathbf{u}_k \quad k = 1, \dots, N.$$

Étant donnée la solution $U(t, \mathbf{x})$ de (3.104), on considère le changement de variable suivant correspondant à une rotation du repère :

$$\tilde{U}(t, \mathbf{x}') := \mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U(t, R(\mathbf{n})\mathbf{x}').$$

Dans le voisinage d'une interface $\sigma = K|L$, la solution discrète étant constante de part et d'autre de l'interface, on peut considérer que l'on a un problème de Riemann local 1D pour (3.104) dans la direction de $\mathbf{n}_{K,\sigma}$. Grâce à l'invariance par rotation des équations ce problème de Riemann s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{U} + \partial_{x'} f_1(\tilde{U}) + \partial_{y'} f_2(\tilde{U}) + c_1(\tilde{U}) \partial_{x'} \tilde{U} + c_2(\tilde{U}) \partial_{y'} \tilde{U} = 0, \\ \tilde{U}(t=0, x', y') = \begin{cases} \mathcal{R}(\mathbf{n}_{K,\sigma}) U_K^n & \text{si } x' < 0, \\ \mathcal{R}(\mathbf{n}_{K,\sigma}) U_L^n & \text{si } x' > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Si on considère que la solution est constante dans la direction orthogonale à $\mathbf{n}_{K,\sigma}$, c'est à dire qu'elle ne dépend pas de la variable tangentielle y' ce problème de Riemann se réduit à

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{U} + \partial_{x'} f_1(\tilde{U}) + c_1(\tilde{U}) \partial_{x'} \tilde{U} = 0, \\ \tilde{U}(t=0, x') = \begin{cases} \mathcal{R}(\mathbf{n}_{K,\sigma}) U_K^n & \text{si } x' < 0, \\ \mathcal{R}(\mathbf{n}_{K,\sigma}) U_L^n & \text{si } x' > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (3.107)$$

qui n'est autre que le problème de Riemann pour le modèle 1D supplémenté d'équations d'advection à vitesse \tilde{u}_k pour les vitesses tangentielles \tilde{v}_k :

$$\partial_t \tilde{v}_k + \tilde{u}_k \partial_{x'} \tilde{v}_k = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

On construit alors naturellement un flux numérique pour le système (3.107) en complétant le flux numérique F^- du schéma de relaxation pour le modèle 1D (voir (3.93)) par une discrétisation décentrée amont (par rapport à la valeur u_k^* de la vitesse de propagation de l'onde matérielle de valeur propre u_k dans le problème de Riemann relaxé) des vitesses tangentielles. Notons $\tilde{F}^-(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$ le flux ainsi obtenu et définissons le flux numérique suivant pour le schéma 2D :

$$\mathbf{F}(U_1, U_2; \mathbf{n}) := \mathcal{R}(\mathbf{n}) \tilde{F}^-(\mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U_1, \mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U_2). \quad (3.108)$$

Remarque 3.5.1. *Il est naturel de prendre le flux numérique F^- et non le flux F^+ car dans la direction du vecteur $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ orienté de la maille K vers la maille L , le flux numérique doit correspondre à la trace à gauche du flux physique évalué en 0^- pour le problème de Riemann approché.*

Le schéma numérique 1D étant consistant avec le flux physique 1D on a $\tilde{F}^-(\mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U, \mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U) = f_1(\mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U)$ pour tout $U \in \Omega_U$ et tout $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^1$. De plus, l'invariance par rotation du système donne

$$f_1(\mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U) = \mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1} [f_1(U), f_2(U)] \cdot \mathbf{n} := \mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1} (f_1(U)n_x + f_2(U)n_y),$$

pour tout U , et tout $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ dans \mathbb{S}^1 . On voit alors que le flux numérique 2D (3.108) est consistant avec le flux physique au sens où

$$\mathbf{F}(U, U; \mathbf{n}) = \mathcal{R}(\mathbf{n})f_1(\mathcal{R}(\mathbf{n})^{-1}U) = [f_1(U), f_2(U)] \cdot \mathbf{n}, \quad \forall U \in \Omega_U, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{S}^1. \quad (3.109)$$

En invoquant l'identité géométrique $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0$ on peut écrire le schéma (3.106) sous la forme suivante.

$$U_K^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \frac{|\sigma|}{|\partial K|} \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{n}_{K,\sigma}) \tilde{U}_{K,\sigma}^{n+1} \quad (3.110)$$

avec

$$\tilde{U}_{K,\sigma}^{n+1} = \tilde{U}_K^n - \frac{\Delta t |\partial K|}{|K|} \left(\tilde{F}^-(\tilde{U}_K^n, \tilde{U}_L^n) - f_1(\tilde{U}_K^n) \right). \quad (3.111)$$

La forme (3.110)-(3.111) est l'analogie 2D de la décomposition en demi-cellules introduite par Harten, Lax et Van Leer [28]. Comme la formule (3.111) correspond au modèle 1D complété par des équations de transport pour les vitesses tangentielles à la face, on voit par la formule (3.110) que l'inconnue est mise à jour par une combinaison convexe de problèmes de Riemann 1D entre la cellule K et la face $\sigma \in \mathcal{E}(K)$. Ainsi, Les résultats de positivité et les inégalités d'entropie discrètes peuvent être étendus au schéma 2D. La condition CFL à imposer en 2D est similaire à la condition CFL 1D :

$$\frac{\Delta t}{\min_{K \in \mathcal{M}} \frac{|K|}{|\partial K|}} \max_{K \in \mathcal{M}} \max_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(K) \\ k=1, \dots, N \\ \sigma=K|L}} \max(|(\mathbf{u}_k^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \pm a_k \tau_k^n)_K|, |(\mathbf{u}_k^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \pm a_k \tau_k^n)_L|) < \frac{1}{2}. \quad (3.112)$$

3.5.2 Un cas test numérique en dimension 2

On considère ici le modèle bifluide de Baer-Nunziato barotrope avec des termes sources de retour à l'équilibre en pression et vitesse ainsi qu'une force de gravité et on se propose de faire une simulation en dimension deux. Le modèle est donné pour $k = 1, 2$, $t > 0$ et $\mathbf{x} \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + \mathbf{V}_I(U) \cdot \nabla \alpha_1 &= \frac{1}{\tau_p} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{P_0} (p_1(\rho_1) - p_2(\rho_2)), \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) &= 0, \\ \partial_t (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla (\alpha_k p_k(\rho_k)) - P_I(U) \nabla \alpha_k \\ &= \frac{1}{\tau_u} \frac{(\alpha_1 \rho_1)(\alpha_2 \rho_2)}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2} (-1)^k |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - \alpha_k \rho_k \mathbf{g}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{V}_I(U) = \mathbf{u}_2, \quad P_I(U) = p_1.$$

On approche les solutions de ce modèle avec un schéma numérique à pas fractionnaire. A chaque pas de temps, la partie convective du modèle est traitée à l'aide du schéma de relaxation, puis les deux termes sources (qui sont indépendants) sont discrétisés à tour de rôle par un schéma numérique implicite sur chaque maille (voir [46] pour plus de détails).

On considère un cas test présentant le ballonnement d'un liquide dans un disque $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. À $t = 0$, le liquide qui se trouve initialement dans le quart de disque en bas à gauche (avec $\alpha_1 = 0.99$) est

“libéré” et se met à osciller dans le fond du disque sous l’effet de la gravité. Dans le but de reproduire un rapport de densité liquide/vapeur, on considère des équations d’état données par

$$p_1(\rho_1) = \rho_1 \quad (\text{liquide}), \quad p_2(\rho_2) = (\rho_2)^4 \quad (\text{vapeur}).$$

Les paramètres dans les termes sources sont $P_0 = 1$, $\tau_p = 10^{-9}$, $\tau_u = 10^{-4}$ et $\mathbf{g} = -9.81\mathbf{e}_y$. Le domaine de calcul \mathcal{O} est le disque unité centré en $(0, 0)$ et la condition initiale est donnée par (avec $\mathbb{U} = (\alpha_1, \alpha_1\rho_1, \alpha_1\rho_1u_1, \alpha_1\rho_1v_1, \alpha_2\rho_2, \alpha_2\rho_2u_2, \alpha_2\rho_2v_2)$) :

$$\mathbb{U}(x, y, 0) = \begin{cases} (0.99, 0.99 \times 81, 0, 0, 0.01 \times 3, 0, 0) & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0, \\ (0.01, 0.01 \times 81, 0, 0, 0.99 \times 3, 0, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On applique des conditions aux limites de type paroi sur toute la frontière du domaine (grâce à la technique des cellules miroirs). Le maillage est composé de 6888 cellules triangulaires et de 3545 sommets, voir la Figure 3.10. Nous présentons dans la Figure 3.11 la fraction statistique de phase 1, α_1 et la

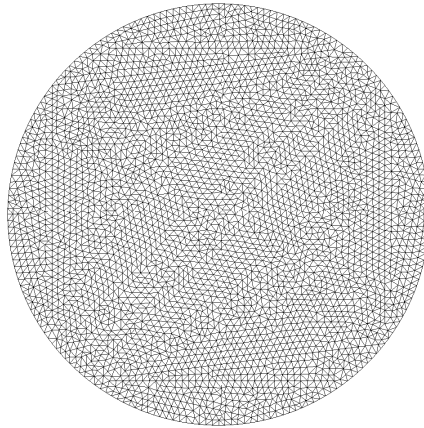


FIGURE 3.10 – Maillage test numérique en 2D.

masse partielle de phase 1, $\alpha_1\rho_1$ à différents instants. La solution approchée est conforme à l’intuition : après libération de la donnée initiale, la phase la plus lourde (phase 1) oscille au fond du disque sous l’effet de la gravité. La solution observée est similaire à la solution plane de Thacker pour les équations de Saint-Venant [53], caractérisée par une surface plane et un comportement périodique. Ici, on peut observer que la surface devient de plus en plus plane et que le nombre de cellules dans l’épaisseur de l’interface diminue. Bien sûr, pour des temps beaucoup plus longs, la solution numérique n’est pas entièrement périodique en raison de la diffusion numérique qui introduit un léger amortissement, laissant la solution tendre vers une solution stationnaire avec une surface horizontale. Le schéma numérique est très robuste puisque la fraction α_1 prend ses valeurs sur une large plage allant de 10^{-2} à $1 - 10^{-2}$. De plus, en raison des différents termes sources, la vitesse relative de l’écoulement reste subsonique, de sorte que le schéma de relaxation est applicable tout au long de la simulation.

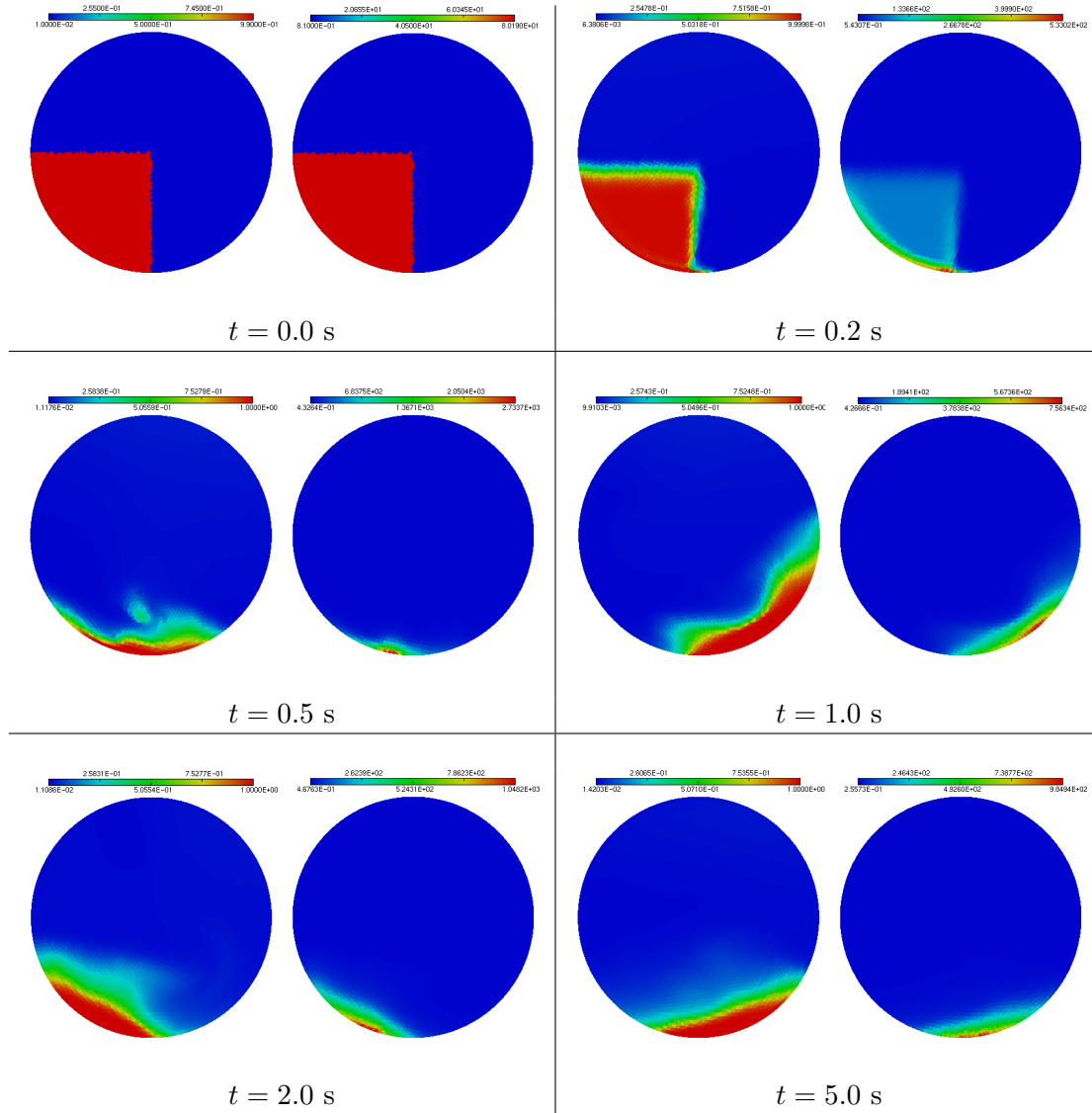


FIGURE 3.11 – Fraction statistique de la phase 1, α_1 (à gauche) et masse partielle de phase 1 $\alpha_1 \rho_1$ (à droite).

Bibliographie de la Partie I

- [1] R. ABGRALL et R. SAUREL. « Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures ». In : *Journal of Computational Physics* 186.2 (2003), p. 361-396.
- [2] K. AIT-AMEUR, S. KOKH, M. MASSOT, M. PELANTI et T. PICHARD. « An acoustic-transport splitting method for the barotropic Baer-Nunziato two-phase flow model ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 72 (2023), p. 93-116.
- [3] A. AMBROSO, C. CHALONS et P.-A. RAVIART. « A Godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow ». In : *Computers and Fluids* 54.0 (2012), p. 67-91.
- [4] A. AMBROSO, C. CHALONS et P.-A. RAVIART. « A Godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow ». In : *Computers & Fluids* 54 (2012), p. 67-91.
- [5] M.R. BAER et J.W. NUNZIATO. « A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials ». In : *International Journal of Multiphase Flow* 12.6 (1986), p. 861-889.
- [6] H. BOUKILI et J.-M. HÉRARD. « Relaxation and simulation of a barotropic three-phase flow model ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (2018).
- [7] H. BOUKILI et J.-M. HÉRARD. « Simulation and preliminary validation of a three-phase flow model with energy ». In : *Comput. & Fluids* 221 (2021), Paper No. 104868, 27.
- [8] D. BRESCH, C. BURTEA et F. LAGOUTIÈRE. « Mathematical justification of a compressible bi-fluid system with different pressure laws : A semi-discrete approach and numerical illustrations ». In : *Journal of Computational Physics* (2023), p. 112259.
- [9] D. BRESCH, C. BURTEA et F. LAGOUTIÈRE. « Mathematical justification of a compressible bifluid system with different pressure laws : a continuous approach ». In : *Applicable Analysis* 101.12 (2022), p. 4235-4266.
- [10] D. BRESCH et M. HILLAIRET. « A compressible multifluid system with new physical relaxation terms ». In : *arXiv preprint arXiv :1601.08038* (2016).
- [11] D. BRESCH et M. HILLAIRET. « Note on the derivation of multi-component flow systems ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 143.8 (2015), p. 3429-3443.
- [12] D. BRESCH et X. HUANG. « A multi-fluid compressible system as the limit of weak solutions of the isentropic compressible Navier–Stokes equations ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 201 (2011), p. 647-680.
- [13] J. BUSSAC. « A non-equilibrium multi-component model with miscible conditions ». In : *Communications in Mathematical Sciences* (2023).
- [14] J. BUSSAC. « Modélisation et simulation d'écoulements multiphasiques avec phases miscibles ». Theses. Nantes Université, sept. 2023.
- [15] J. BUSSAC et K. SALEH. « Numerical Simulation of a Barotropic Two-Phase Flow Model with Miscible Phases ». In : *Finite Volumes for Complex Applications X—Volume 2, Hyperbolic and Related Problems*. Cham : Springer Nature Switzerland, 2023, p. 63-71.
- [16] F. COQUEL, T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN. « Closure laws for a two-fluid two pressure model ». In : *C. R. Acad. Sci.* I-334.5 (2002), p. 927-932.

- [17] F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « A class of two-fluid two-phase flow models ». In : *AIAA paper 2012-3356*. <https://www.aiaa.org/> (2012).
- [18] F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « A Robust Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Isentropic Baer-Nunziato Model ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48.1 (2014). 42 pages, p. 165-206.
- [19] F. COQUEL, J.-M. HÉRARD, K. SALEH et N. SEGUIN. « Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 12.3 (2014).
- [20] F. COQUEL, HÉRARD, J.-M. et K. SALEH. « A Positive and Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Baer-Nunziato Model ». In : *Journal of Computational Physics* 330 (2017), p. 401-435.
- [21] S. DALLET. « A comparative study of numerical schemes for the Baer-Nunziato model ». In : *International Journal on Finite Volumes* 13 (2016), p. 1-37.
- [22] V. DELEDICQUE et M. V. PAPALEXANDRIS. « A conservative approximation to compressible two-phase flow models in the stiff mechanical relaxation limit ». In : *J. Comput. Phys.* 227.21 (2008), p. 9241-9270.
- [23] D.A. DREW et S. L. PASSMAN. *Theory of multicomponent fluids*. T. 135. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1999, p. x+308.
- [24] T. GALLOUËT, P. HELLUY, J.-M. HÉRARD et J. NUSSBAUM. « Hyperbolic relaxation models for granular flows ». In : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 44.2 (2010), p. 371-400.
- [25] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN. « Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach ». In : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14.5 (2004), p. 663-700.
- [26] S. GAVRILYUK et R. SAUREL. « Mathematical and Numerical Modeling of Two-Phase Compressible Flows with Micro-Inertia ». In : *Journal of Computational Physics* 175.1 (2002), p. 326-360.
- [27] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. T. 118. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1996, p. viii+509.
- [28] A. HARTEN, P. D. LAX et B. van LEER. « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws ». In : *SIAM Rev.* 25.1 (1983), p. 35-61.
- [29] J.-M. HÉRARD. « A class of compressible multiphase flow models ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 354.9 (2016), p. 954-959.
- [30] J.-M. HÉRARD. « A three-phase flow model ». In : *Math. and Comp. Modelling* 45.5-6 (2007), p. 732-755.
- [31] J.-M. HÉRARD, O. HURISSE et L. QUIBEL. « A four-field three-phase flow model with both miscible and immiscible components ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 55 (2021), S251-S278.
- [32] J.-M. HÉRARD et G. JOMÉE. « Pressure relaxation in some multiphase flow models ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 72 (2023), p. 19-40.
- [33] J.-M. HÉRARD et H. MATHIS. « A three-phase flow model with two miscible phases ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (2019).
- [34] M. HILLAIRET. « On Baer-Nunziato multiphase flow models ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 66 (2019), p. 61-83.
- [35] M. HILLAIRET. « Propagation of density-oscillations in solutions to the barotropic compressible Navier–Stokes system ». In : *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 9 (2007), p. 343-376.
- [36] M. HILLAIRET, H. MATHIS et N. SEGUIN. « Analysis of compressible bubbly flows. Part II : Derivation of a macroscopic model ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 57.5 (2023), p. 2865-2906.
- [37] M. ISHII et T. HIBIKI. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. With a foreword by Lefteri H. Tsoukalas. New York : Springer, 2006, p. xvi+462.

- [38] A. K. KAPILA, S. F. SON, J. B. BDZIL, R. MENIKOFF et D. S. STEWART. « Two-phase modeling of DDT : Structure of the velocity-relaxation zone ». In : *Physics of Fluids* 9.12 (1997), p. 3885-3897.
- [39] A.K. KAPILA, R. MENIKOFF et D.S. STEWART. « Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials : Reduced equations ». In : *Physics of Fluids* 13.6 (2 2001), p. 3002-3024.
- [40] S. KARNI et G. HERNÁNDEZ-DUEÑAS. « A Hybrid Algorithm for the Baer-Nunziato Model Using the Riemann Invariants ». In : *Journal of Scientific Computing* 45 (1 2010), p. 382-403.
- [41] T. KATO. « The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 58.3 (1975), p. 181-205.
- [42] S. MÜLLER, M. HANTKE et P. RICHTER. « Closure conditions for non-equilibrium multi-component models ». In : *Contin. Mech. Thermodyn.* 28.4 (2016), p. 1157-1189.
- [43] M. PAPIN et R. ABGRALL. « Fermetures entropiques pour les systèmes bifluïdes à sept équations ». In : *Compt. Rendu. Acad. Sci. Mécanique* 333 (2005), p. 838-842.
- [44] V.H RANSOM et D.L HICKS. « Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow ». In : *Journal of Computational Physics* 53.1 (1984), p. 124-151.
- [45] K. SALEH. « A relaxation scheme for a hyperbolic multiphase flow model - Part I : Barotropic EOS ». In : *ESAIM : M2AN* 53.5 (2019), p. 1763-1795.
- [46] K. SALEH. « Analyse et Simulation Numérique par Relaxation d'Écoulements Diphasiques Compressibles. Contribution au Traitement des Phases Évanescentes. » Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2012.
- [47] K. SALEH et N. SEGUIN. « Some mathematical properties of a barotropic multiphase flow model ». In : *ESAIM : Proceedings and Surveys* 69 (2020), p. 70-78.
- [48] R. SAUREL et R. ABGRALL. « A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows ». In : *Journal of Computational Physics* 150.2 (1999), p. 425-467.
- [49] R. SAUREL, S. GAVRILYUK et F. RENAUD. « A multiphase model with internal degrees of freedom : application to shock–bubble interaction ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 495 (2003), p. 283-321.
- [50] D.W. SCHWENDEMAN, C.W. WAHLE et A.K. KAPILA. « The Riemann problem and a high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow ». In : *Journal of Computational Physics* 212.2 (2006), p. 490-526.
- [51] C. G. SPEZIALE. « Closure relations for the pressure-strain correlation of turbulence ». In : *The Physics of Fluids* 23.3 (1980), p. 459-463.
- [52] H B. STEWART et B. WENDROFF. « Two-phase flow : Models and methods ». In : *Journal of Computational Physics* 56.3 (1984), p. 363-409.
- [53] W. C. THACKER. « Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations ». In : *J. Fluid Mechanics* 107 (1981), p. 499-508.
- [54] M. D. THANH, D. KRÖNER et N. T. NAM. « Numerical approximation for a Baer–Nunziato model of two-phase flows ». In : *Applied Numerical Mathematics* 61.5 (2011), p. 702-721.
- [55] M.D. THANH, D. KRÖNER et C. CHALONS. « A robust numerical method for approximating solutions of a model of two-phase flows and its properties ». In : *Applied Mathematics and Computation* 219.1 (2012), p. 320-344.
- [56] S.A. TOKAREVA et E.F. TORO. « HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow ». In : *Journal of Computational Physics* 229.10 (2010), p. 3573-3604.

Deuxième partie

Méthodes numériques pour la transition compressible-incompressible

Chapitre 4

La limite incompressible pour les équations de Navier-Stokes compressibles

4.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles barotropes	85
4.2 La limite incompressible pour les solutions faibles	87
4.2.1 Adimensionnement et limite formelle	87
4.2.2 Quelques éléments de preuve	88
4.2.3 Remarques importantes concernant de la condition <i>inf-sup</i>	91
4.3 La limite incompressible pour les schémas numériques	92
4.3.1 Difficultés numériques liées à la limite incompressible	92
4.3.2 Une approche alternative : partir des méthodes numériques pour l'incompressible	95

Il est connu que lorsque le nombre de Mach, qui est le rapport entre la vitesse caractéristique de l'écoulement d'un fluide compressible et la célérité des ondes acoustiques dans ce fluide, tend vers zéro, le fluide se comporte comme un fluide incompressible. On parle alors de limite compressible-incompressible. On dit en général qu'un écoulement de fluide pour lequel le nombre de Mach est petit est dans un *régime faiblement compressible* ou *proche de l'incompressible*. L'objectif de ce chapitre est triple :

1. Présenter le système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes régissant l'écoulement d'un fluide compressible visqueux pour lequel la pression est une fonction de la masse volumique. On donne ensuite quelques résultats sur l'existence de solutions faibles et sur leurs propriétés.
2. Donner une formulation mathématique à la limite compressible-incompressible. On introduit pour cela un système adimensionné par les grandeurs caractéristiques de l'écoulement, dans lequel le nombre de Mach (noté ε) apparaît comme un paramètre, puis on rappelle dans les grandes lignes, les principaux résultats mathématiques connus sur la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.
3. Donner un panorama des principales difficultés rencontrées lors de l'approximation numérique des équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) compressibles lorsque le fluide est dans un régime proche de l'incompressible, en discuter les causes et les remèdes.

4.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles barotropes

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et connexe, avec $d \in \{2, 3\}$. On considère le système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes qui décrit l'évolution sur l'intervalle de temps $[0, T]$ d'un fluide visqueux occupant le volume Ω , et dont la pression locale est une fonction uniquement

de la masse volumique locale du fluide. En l'absence de forces volumiques extérieures s'appliquant sur le fluide, ce système s'écrit :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (4.1a)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla p = 0, \quad (4.1b)$$

$$p = \wp(\rho). \quad (4.1c)$$

Les quantités $\rho = \rho(t, \mathbf{x}) \geq 0$, $p = p(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), \dots, u_d(t, \mathbf{x}))^T$ sont respectivement la masse volumique, la pression et la vitesse du fluide pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et $t \in (0, T)$. On supposera que la loi de pression $\rho \mapsto \wp(\rho)$ est une fonction régulière et strictement croissante. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ est déterminé par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I}, \quad \mu > 0, \lambda + \mu \geq 0. \quad (4.2)$$

Le coefficient μ est la viscosité dynamique du fluide. Un choix classique pour λ est $\lambda = -\frac{\mu}{3}$ (si $d = 3$). Enfin on complète le système (4.1) par des conditions initiales ainsi que des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq 0, \quad (\rho \mathbf{u})|_{t=0} = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.3)$$

avec $\mathbf{q}_0 = 0$ sur $\{\rho_0 = 0\}$.

On montre que les solutions régulières de (4.1)-(4.3) satisfont l'équation suivante, dite *équation d'énergie cinétique* :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} + \nabla \wp(\rho) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.4)$$

De plus, on montre que pour les solutions régulières, pour toute fonction $b \in \mathcal{C}^0([0, \infty)) \cap \mathcal{C}^1(0, \infty)$, on a l'identité suivante appelée *identité de renormalisation* :

$$\partial_t b(\rho) + \operatorname{div}(b(\rho) \mathbf{u}) + (\rho b'(\rho) - b(\rho)) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4.5)$$

En particulier pour l'énergie libre, qui est la fonction H solution de

$$\rho H'(\rho) - H(\rho) = \wp(\rho), \quad \rho \geq 0,$$

on obtient l'*équation d'énergie interne* (on appelle énergie interne la fonction e telle que $H(\rho) = \rho e(\rho)$, e est une primitive de $\rho \mapsto \wp(\rho)/\rho^2$) :

$$\partial_t H(\rho) + \operatorname{div}(H(\rho) \mathbf{u}) + \wp(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4.6)$$

En sommant (4.4) et (4.6) on obtient l'*équation d'énergie totale* :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + H(\rho) \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + H(\rho) \mathbf{u} + \wp(\rho) \mathbf{u} \right) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.7)$$

En intégrant sur $(0, t) \times \Omega$ et en utilisant des intégrations par parties dans le terme de diffusion et la condition de Dirichlet homogène on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} H(\rho(t)) \, d\mathbf{x} + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \, dt + (\mu + \lambda) \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} \, dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{q}_0|^2}{\rho_0} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} H(\rho_0) \, d\mathbf{x}, \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (4.8)$$

On s'intéresse aux solutions faibles du système (4.3)-(4.1) c'est à dire aux couples (ρ, \mathbf{u}) qui vérifient les équations du système au sens des distributions :

(i) Pour tout ϕ dans $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$,

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho(\mathbf{x}, t) (\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \, dt = \int_\Omega \rho_0(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}.$$

(ii) Pour tout \mathbf{v} dans $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)^d$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega & \left(-\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right. \\ & \left. + \mu \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right. \\ & \left. - \wp(\rho(\mathbf{x}, t)) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \, d\mathbf{x} \, dt = \int_\Omega \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

où toutes les fonctions impliquant le couple (ρ, \mathbf{u}) sont (au moins) dans $L^1_{\text{loc}}((0, T) \times \Omega)$. On dira que (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible d'énergie finie si de plus elle vérifie l'estimation (4.8). Enfin on dit que (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible renormalisée si elle vérifie l'équation de renormalisation (4.5) dans $\mathcal{D}'((0, T) \times \Omega)$ (où (ρ, \mathbf{u}) est prolongé par 0 en dehors de Ω) pour toute fonction $b \in C^0([0, \infty)) \cap C^1(0, \infty)$ vérifiant certaines inégalités prescrivant son comportement au bord de l'intervalle $(0, \infty)$ (voir [110] et (7.24)).

Pour les lois d'état de type gaz parfait :

$$\wp(\rho) = \kappa \rho^\gamma, \quad \kappa > 0, \gamma > 1, \quad (4.9)$$

les premiers résultats d'existence de solutions faibles pour le système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes sont dus à P.-L. Lions [104] qui a démontré l'existence de solutions pour $\gamma > 9/5$ (pour $d = 3$). Ces résultats ont été par la suite étendus par Feireisl à des coefficients adiabatiques $\gamma > 3/2$ [77]. On a le résultat d'existence suivant dont on peut trouver une preuve dans [110] :

Théorème 4.1.1. *On suppose que la loi d'état est une loi d'état de type gaz parfait (4.9) avec $\gamma > \frac{3}{2}$. Soit (ρ_0, \mathbf{q}_0) tels que $\rho_0 \geq 0$, $\rho_0 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $H(\rho_0) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\mathbf{q}_0 \in \mathbf{L}^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$, $\mathbf{q}_0 = 0$ sur $\{\rho_0 = 0\}$, $|\mathbf{q}_0|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$. Alors il existe (ρ, \mathbf{u}) une solution faible renormalisée d'énergie finie de (4.3)-(4.1). Cette solution vérifie les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \rho & \in L^\infty((0, T); L^\gamma(\Omega)) \cap L^{\frac{5\gamma-3}{3}}((0, T) \times \Omega), \\ \rho & \in C^0([0, T]; L^\gamma_{\text{faible}}(\Omega)), \\ \mathbf{u} & \in L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\ \rho \mathbf{u} & \in C^0([0, T]; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}_{\text{faible}}(\Omega)), \\ \rho |\mathbf{u}|^2 & \in L^\infty((0, T); L^1(\Omega)) \cap L^{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}((0, T) \times \Omega). \end{aligned}$$

4.2 La limite incompressible pour les solutions faibles

4.2.1 Adimensionnement et limite formelle

Pour comprendre le comportement des fluides dans les régimes faiblement compressibles ainsi que la limite incompressible, on adimensionne les équations (4.1). Si on note L_∞ une longueur caractéristique de l'écoulement, U_∞ une vitesse caractéristique de l'écoulement, c_∞ la vitesse du son caractéristique dans le fluide et ρ_∞ la masse volumique caractéristique du fluide, on peut introduire les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$\bar{t} = t \frac{U_\infty}{L_\infty}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{L_\infty}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_\infty}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_\infty c_\infty^2}.$$

Les grandeurs dimensionnées $(\rho, \rho \mathbf{u})$ étant solutions des équations de masse (4.1a) et de quantité de mouvement (4.1b), leurs homologues adimensionnées $(\bar{\rho}, \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}})$ sont solutions de

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty U_\infty}{L_\infty} \left(\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}_{\bar{x}}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) \right) &= 0, \\ \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L_\infty} \left(\partial_t(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) + \operatorname{div}_{\bar{x}}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) - \bar{\mu} \Delta_{\bar{x}} \bar{\mathbf{u}} - (\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \nabla_{\bar{x}}(\operatorname{div}_{\bar{x}} \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_{\bar{x}} \bar{\varphi}(\bar{\rho}) \right) &= 0 \end{aligned}$$

où $\bar{\varphi}(\bar{\rho}) = \rho_\infty^{-1} c_\infty^{-2} \varphi(\rho_\infty \bar{\rho})$ et où

$$\varepsilon = \frac{U_\infty}{c_\infty}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_\infty U_\infty L_\infty}{\mu} = \frac{1}{\bar{\mu}}$$

sont respectivement les nombres de Mach et de Reynolds qui sont des nombres caractéristiques de l'écoulement et où $\bar{\lambda} = (\mu + \lambda)/(\rho_\infty U_\infty L_\infty) - \bar{\mu}$.

Ainsi si l'on suppose que $\bar{\mu}$ et $\bar{\lambda}$ sont constants et indépendants du nombre de Mach, le système adimensionné s'écrit (on allège les notations en enlevant les barres) :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) &= 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) - \mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \varphi(\rho^\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Formellement, lorsque que le nombre de Mach ε tend vers zéro, si $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho$ et $\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}$ alors, par l'équation de quantité de mouvement on a $\nabla \varphi(\rho^\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. À la limite on a alors $\rho = \rho(t)$. En intégrant l'équation de conservation de la masse sur Ω et en utilisant les conditions de Dirichlet homogènes sur la vitesse, on obtient que la masse volumique limite ρ est constante en temps et en espace. En passant à la limite dans les deux équations, on obtient alors le système des équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \Pi &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $\Pi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} (\varphi(\rho^\varepsilon) - \varphi(\rho))$.

4.2.2 Quelques éléments de preuve

La justification rigoureuse de cette limite singulière a fait l'objet (et continue de faire l'objet) de nombreux travaux de recherche, les plus anciens remontant aux années 80 avec les articles de Klainerman et Majda [101] et de Schochet [116] qui se sont intéressés à la limite incompressible pour les équations d'Euler compressibles (sans les termes de viscosité donc). Concernant la limite incompressible pour les solutions faibles (d'énergie finie) des équations de Navier-Stokes compressibles, on peut citer les travaux de Lions et Masmoudi [105] dans le cas où $\Omega = \mathbb{T}^d$, Desjardins *etal* [72, 73] pour les cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ et Ω borné avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

La principale difficulté réside dans la gestion des ondes acoustiques qui oscillent de plus en plus rapidement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet, le système (4.10) se réécrit

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) &= 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \varphi(\rho^\varepsilon) &= \mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Les estimations d'énergie permettent alors de montrer (modulo des hypothèses sur la donnée initiale) que le membre de droite de ce système est compact (pour des topologies faibles) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Le membre de gauche quant à lui est le système des équations d'Euler adimensionnées. C'est un système hyperbolique dont les valeurs propres (en dimension un) sont les vitesses de propagation des ondes acoustiques qui sont données par

$$\lambda_\pm^\varepsilon = u^\varepsilon \pm \frac{\sqrt{\varphi'(\rho^\varepsilon)}}{\varepsilon}.$$

La solution est donc de plus en plus oscillante dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et la difficulté principale réside dans la justification de la compacité du terme de convection dans l'équation de quantité de mouvement, terme non linéaire faisant intervenir un produit de fonctions qui ne convergent que faiblement.

Donnons un peu plus de détails sur le schéma de la preuve. On considère une suite de solutions faibles d'énergie finie de (4.12) associées à une suite de données initiales $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$. On supposera que la loi de pression est une loi de pression de type gaz parfait définie par

$$\wp(\rho) = \kappa \rho^\gamma, \quad \text{avec } \kappa = 1, \gamma \geq 2.$$

Le raisonnement peut être décomposé en deux étapes. Dans une première étape, on montre la convergence de la masse volumique vers une constante et la compacité de la vitesse. Dans une deuxième étape, on effectue le passage à la limite dans les équations.

Étape 1 : estimation d'énergie et compacité – A l'aide de l'inégalité d'énergie totale (4.8) vérifiée par les solutions faibles d'énergie finie de (4.12) (l'énergie libre est ici $H(\rho) = (\gamma - 1)^{-1} \rho^\gamma = (\gamma - 1)^{-1} \wp(\rho)$) et de l'équation de conservation de la masse on montre que les solutions vérifient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon(t) |\mathbf{u}^\varepsilon(t)|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\gamma - 1} \int_{\Omega} \Pi_\gamma[\rho^\varepsilon(t)] d\mathbf{x} + \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 ds \\ + (\mu + \lambda) \int_0^t \|\operatorname{div}(\mathbf{u}^\varepsilon(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0^\varepsilon |\mathbf{u}_0^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\gamma - 1} \int_{\Omega} \Pi_\gamma[\rho_0^\varepsilon] d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.13)$$

où la fonction $\Pi_\gamma[\rho]$ est donnée par

$$\Pi_\gamma[\rho] = \wp(\rho) - \wp(\bar{\rho}) - \wp'(\bar{\rho})(\rho - \bar{\rho}),$$

où $\bar{\rho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho d\mathbf{x}$ est la moyenne de $\rho : \Omega \mapsto \mathbb{R}^+$ sur Ω . Notons que par intégration de l'équation de la masse sur Ω et les conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la vitesse, $\bar{\rho}^\varepsilon$ est une constante (en temps et en espace) ne dépendant que de ε et déterminée par la masse volumique initiale. L'estimation (4.13) peut-être vue comme une estimation d'entropie relative qui permet un contrôle de la distance entre la masse volumique ρ^ε et sa moyenne $\bar{\rho}^\varepsilon$. On montre en effet, à l'aide d'un développement de Taylor que pour $\gamma \geq 2$ on a

$$\Pi_\gamma[\rho] \geq (\gamma - 1) \bar{\rho}^{\gamma-2} (\rho - \bar{\rho})^2. \quad (4.14)$$

On suppose que la donnée initiale $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon)$ est telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\rho}^\varepsilon = 1, \quad (4.15)$$

et que le membre de droite de (4.13) est borné, uniformément en ε ce qui exprime le fait que $\rho_0^\varepsilon = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. On parle alors de données initiales *mal préparées* (des données bien préparées seraient telles que $\rho_0^\varepsilon = \text{Cste} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et $\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon \rightarrow 0$).

De l'estimation d'entropie relative (4.13), de (4.14) et de (4.15) on déduit alors les résultats de compacité suivants sur la suite $(\rho^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)$:

1. On a $\Pi_\gamma[\rho^\varepsilon] = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dans $L^\infty(L^1)$ donc par (4.14) et (4.15) on a $|\rho^\varepsilon - \bar{\rho}^\varepsilon| \rightarrow 0$ et $\rho^\varepsilon \rightarrow 1$ fortement dans $L^\infty(L^2)$ (en fait on montre qu'on a convergence dans $L^\infty(L^\gamma)$) avec $|\rho^\varepsilon - \bar{\rho}^\varepsilon| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ dans $L^\infty(L^2)$.
2. La suite $(\mathbf{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\mathbf{H}_0^1)$ et il existe une fonction $\mathbf{u} \in L^2(\mathbf{H}_0^1)$ telle qu'à extraction d'une sous-suite près $\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}$ fortement dans $L^2(L^2)$ et faiblement dans $L^2(\mathbf{H}^1)$.
3. En passant à la limite dans l'équation de conservation de la masse on a $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow 0$ faiblement dans $L^2(L^2)$.

Étape 2 : passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les équations – On introduit $r^\varepsilon = (\rho^\varepsilon - \bar{\rho}^\varepsilon)/\varepsilon$. On a alors $r^\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ (dans $L^\infty(L^2)$) et le système (4.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t r^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) &= 0, \\ \partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{\varphi'(\bar{\rho}^\varepsilon)}{\varepsilon} \nabla r^\varepsilon &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \Pi_\gamma[\rho^\varepsilon] + \mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Comme $\varphi'(\bar{\rho}^\varepsilon) \rightarrow \gamma$ on peut, sans perte de complexité dans l'analyse, identifier cette constante ne dépendant que de ε à sa limite. L'étude du système (4.16) se ramène alors à l'étude du système suivant :

$$\partial_t U^\varepsilon + \mathcal{B}(U^\varepsilon, U^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A} U^\varepsilon = F_\varepsilon(U^\varepsilon) \quad (4.17)$$

avec

$$U^\varepsilon = \begin{pmatrix} r^\varepsilon \\ \rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(U^\varepsilon, U^\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{div} \\ \gamma \nabla & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_\varepsilon(U^\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \Pi_\gamma[\rho^\varepsilon] + \mu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Grâce à l'estimation d'énergie (4.13), on montre que les fonctions $\partial_t U^\varepsilon$, $\mathcal{B}(U^\varepsilon, U^\varepsilon)$ et $F_\varepsilon(U^\varepsilon)$ sont bornés uniformément en ε (pour certaines normes). On en déduit alors que $\mathcal{A} U^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ et à la limite $U^\varepsilon \rightarrow U$ avec $U \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. L'opérateur \mathcal{A} n'est autre que l'opérateur des ondes. C'est un opérateur anti-symétrique sur $L^2 \times (L^2)^d$ en vertu de l'identité de dualité gradient/divergence :

$$\int_\Omega r \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx + \int_\Omega \nabla r \cdot \mathbf{u} \, dx = 0.$$

Il vérifie la décomposition orthogonale $L^2 \times (L^2)^d = \operatorname{Ker} \mathcal{A} \oplus (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$ avec

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \mathcal{A} &= \left\{ (r, \mathbf{u}) \in L^2 \times (L^2)^d \text{ t.q. } r = \text{Cste et } \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \right\} \\ (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp &= \left\{ (r, \mathbf{u}) \in L^2 \times (L^2)^d \text{ t.q. } \int_\Omega r = 0 \text{ et } \exists \psi \in H^1, \mathbf{u} = \nabla \psi \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1. *La première composante de cette décomposition orthogonale est la décomposition de l'espace $L^2(\Omega)$ entre les champs constants (noyau de l'opérateur gradient) et les champs de moyenne nulle. La deuxième composante est la décomposition de Leray sur les champs de vitesse entre les champs à divergence nulle et les champs potentiels.*

En décomposant $U^\varepsilon = U_0^\varepsilon + \varepsilon U_1^\varepsilon$ avec $U_0^\varepsilon \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ et $\varepsilon U_1^\varepsilon \in (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$ on a $U_1^\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ (car $\mathcal{A} U^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$). On injecte alors cette décomposition dans l'équation (4.17) que l'on projette ensuite sur $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. On montre alors, quitte à extraire une sous-suite, que

$$\partial_t U_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P} \mathcal{B}(U^\varepsilon, U^\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

où \mathcal{P} est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ et $U_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_0^\varepsilon = (0, \mathbf{u})^T$ (avec \mathbf{u} la limite de \mathbf{u}^ε). Toute la difficulté de la preuve réside dans la justification de la compacité du terme non linéaire de convection $\mathcal{P} \mathcal{B}(U^\varepsilon, U^\varepsilon)$. Dans [105], à l'aide d'un calcul explicite s'appuyant sur les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur \mathcal{A} , les auteurs démontrent que :

$$\mathcal{P} \mathcal{B}(U^\varepsilon, U^\varepsilon) = \mathcal{B}(U_0, U_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q}^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{q}^\varepsilon \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{q}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{q}$ au sens des distributions où \mathbf{q} est un gradient (c'est-à-dire qu'il existe une distribution $\bar{\Pi}$ telle que $\mathbf{q} = \nabla \bar{\Pi}$) qui peut donc être incorporé au gradient de pression. À la limite, (4.18) donne donc le système de Navier-Stokes incompressible, avec une masse volumique constante égale à 1 :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \bar{\Pi} &= 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.2.3 Remarques importantes concernant de la condition *inf-sup*

Un propriété cruciale dans l'obtention de (4.18) est le fait que la première composante des vecteurs $(r, \mathbf{u}) \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ ne contient que des champs constants, ce qui permet de filtrer la composante oscillante de r^ε en projetant l'équation (4.17) sur $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Cela est dû au théorème de de Rham qui énonce que pour Ω connexe, le noyau de l'opérateur gradient

$$\nabla : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

est composé des champs constants. Afin de comprendre le comportement parfois problématique des schémas numériques dans les régimes de faible compressibilité, et d'envisager des corrections, il peut être judicieux de donner plusieurs équivalents à cette propriété.

Considérons alors les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L_0^2(\Omega) &= \left\{ r \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \int_{\Omega} r = 0 \right\} \\ \mathbf{V} &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ t.q. } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}. \\ \mathbf{V}^\circ &= \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \text{ t.q. } \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \right\}. \end{aligned}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe, borné, de bord Lipschitz. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes et vraies :*

1. *L'opérateur gradient réalise un isomorphisme bicontinu de $L_0^2(\Omega)$ dans \mathbf{V}° .*
2. *L'opérateur divergence réalise un isomorphisme bicontinu de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ dans $L_0^2(\Omega)$. L'inverse de cet opérateur est appelé l'opérateur de Bogovskii. On le note $\mathcal{B} : L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.*
3. *(Condition inf-sup de Ladyzenskaia-Babushka-Brezzi) Il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que :*

$$\inf_{\substack{p \in L_0^2(\Omega) \\ p \neq 0}} \left(\sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{\|p\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \right) \geq C(\Omega). \tag{4.20}$$

Lorsqu'un schéma numérique est utilisé pour approcher les solutions des équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) compressibles, disposer d'un équivalent discret de ces propriétés (pour les espaces de fonctions et les opérateurs gradient et divergence discrets) est crucial pour assurer le bon comportement du schéma dans la limite incompressible $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est l'objet de la section suivante.

Remarque 4.2.2.

1. *Une formulation équivalente de l'inégalité (4.20) est qu'il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que pour tout champ de pression $p \in L^2(\Omega)$, il existe $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ avec $\mathbf{v} \neq 0$ (si p est non constant, on peut choisir $\mathbf{v} = \mathcal{B}(p - \bar{p})$) tel que :*

$$C(\Omega) \|p - \bar{p}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \leq \|\nabla p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}.$$

On obtient ainsi un contrôle en norme L^2 de l'écart de la pression à sa moyenne par une estimation de son gradient en norme \mathbf{H}^{-1} , estimation qui peut être obtenue grâce à l'équation de quantité de mouvement et aux estimations sur (ρ, \mathbf{u}) issues de l'inégalité d'énergie.

2. L'opérateur de Bogovskii est en fait un opérateur continu de $L_0^{q'}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,q'}(\Omega)$ pour tout $q' \in (1, +\infty)$. De même, la condition inf-sup, qui est souvent énoncée pour des espaces fonctionnels basés sur l'espace L^2 , peut en fait être généralisée de la manière suivante :

Il existe une constante $C(q, \Omega)$ tel que pour tout champ $p \in L^q(\Omega)$, il existe $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_0^{1,q'}(\Omega)$ où $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ (si p est non constant, on peut prendre $\mathbf{v} = \mathcal{B}(P - \bar{P})$ où $P = (p - \bar{p})^{\frac{q'}{q}}$) tel que :

$$C(q, \Omega) \|p - \bar{p}\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^{q'}(\Omega)}} \leq \|\nabla p\|_{\mathbf{W}^{-1,q}(\Omega)}.$$

On obtient ainsi un contrôle en norme L^q de l'écart de la pression à sa moyenne par une estimation de son gradient en norme $\mathbf{W}^{-1,q}$, estimation qui peut être obtenue grâce aux estimations des différents termes de l'équation de quantité de mouvement. C'est de cette manière que l'on démontre l'estimation $L^{\frac{5\gamma-3}{3}}((0, T) \times \Omega)$ sur la masse volumique, vérifiée par les solutions faibles du système de Navier-Stokes compressible.

4.3 La limite incompressible pour les schémas numériques

Dans de nombreuses configurations industrielles, des transitions peuvent intervenir entre un écoulement incompressible ou faiblement compressible vers un écoulement fortement compressible. C'est le cas par exemple lorsque l'on étudie des situations accidentelles dans le domaine de la sûreté nucléaire. En fonctionnement normal, l'eau liquide du circuit primaire peut être considérée comme incompressible. Ce n'est que si un accident survient que des phénomènes compressibles tels que la propagation d'ondes de chocs ne peuvent plus être négligés. Il est alors essentiel de disposer de méthodes numériques permettant de simuler des écoulements à tout nombre de Mach.

Les difficultés soulevées par l'approximation numérique des écoulements faiblement compressibles relèvent du domaine général des méthodes numériques dites *asymptotic preserving*, c'est-à-dire des méthodes numériques reproduisant au niveau discret une limite singulière d'un modèle vers un autre dans la limite d'un paramètre ε tendant vers zéro. Considérons par exemple un modèle d'équations aux dérivées partielles dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$ et s'écrivant $S^\varepsilon(U^\varepsilon) = 0$ (par exemple les équations d'Euler ou de Navier Stokes compressibles avec $\varepsilon > 0$ le nombre de Mach) dont les solutions $(U^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent (en un certain sens) lorsque ε tend vers zéro vers une solution U d'un modèle $S^0(U) = 0$. On dira qu'une méthode numérique $S_{h,\delta t}^\varepsilon(U_{h,\delta t}^\varepsilon) = 0$ (où h est le pas d'espace et δt le pas de temps) pour le premier modèle est *asymptotic preserving* si, à discrétisation fixée (c'est-à-dire à h et δt fixés), les solutions discrètes $(U_{h,\delta t}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent lorsque ε tend vers zéro vers des solutions d'un schéma numérique $S_{h,\delta t}^0(U_{h,\delta t}) = 0$ stable et consistant pour le modèle limite $S^0(U) = 0$. Bien évidemment le schéma numérique $S_{h,\delta t}^\varepsilon(U_{h,\delta t}^\varepsilon) = 0$ doit également être stable et consistant avec le modèle $S^\varepsilon(U^\varepsilon) = 0$. On s'intéresse donc ici à la flèche rouge du diagramme de la Fig. 4.1 ci-dessous, diagramme que l'on souhaite être commutatif.

4.3.1 Difficultés numériques liées à la limite incompressible

Sans correction particulière, les schémas numériques les plus utilisés pour les modèles compressibles ne sont en général pas adaptés à la simulation numérique des écoulements qui sont dans des régimes à faibles nombres de Mach, c'est-à-dire proches de l'incompressible, et ce pour des raisons qui sont liées à la fois à la discrétisation temporelle et à la discrétisation spatiale.

$$\begin{array}{ccc}
S_{h,\delta t}^\varepsilon(U_{h,\delta t}^\varepsilon) = 0 & \xrightarrow{h, \delta t \rightarrow 0} & S^\varepsilon(U^\varepsilon) = 0 \\
\downarrow \varepsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\
S_{h,\delta t}^0(U_{h,\delta t}) = 0 & \xrightarrow{h, \delta t \rightarrow 0} & S^0(U) = 0
\end{array}$$

FIGURE 4.1 – Schémas numériques *asymptotic preserving*.

Difficultés liées à la discrétisation temporelle dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$: Pour des raisons de simplicité et de précision, les schémas utilisés pour approcher les solutions des modèles d'écoulements compressibles utilisent souvent des discrétisations *explicites*. La stabilité des solutions implique alors une restriction du pas de temps δt par une condition CFL dictée par la vitesse des ondes acoustiques :

$$\delta t \lesssim \frac{\varepsilon h}{|\mathbf{u}|}.$$

Ces schémas explicites ne peuvent donc pas rester stables lorsque le nombre de Mach ε tend vers zéro. Il est donc nécessaire, pour s'affranchir de cette contrainte de discrétiser de manière implicite certains termes qui deviennent raides dans les régimes à faibles nombres de Mach. En général on considère des discrétisations temporelles semi-implicites où les termes implicites sont, *a minima*, le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement ainsi que les flux de masse dans l'équation de continuité. Une discrétisation de (4.17) s'écrit donc formellement :

$$\frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\delta t} + \mathcal{B}_h(U_h^n, U_h^n) + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}_h U_h^{n+1} = F_h(U_h^n), \quad (4.21)$$

avec $U_h^n = (r_h^n, (\rho \mathbf{u})_h^n)$, $\mathcal{B}_h(U_h^n, U_h^n)$ une discrétisation (ici explicite) du terme de convection dans l'équation de quantité de mouvement, $F_h(U_h^n)$ une discrétisation explicite de la partie non singulière du gradient de pression et des termes de diffusion (souvent, les termes de diffusion sont en fait traités de manière implicite pour éviter des contraintes CFL diffusives du type $\delta t \lesssim |\rho| h^2 / \mu$), et \mathcal{A}_h un opérateur des ondes discret :

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} 0 & \text{div}_h \\ \gamma \nabla_h & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut citer les approches d'implicitation partielle de type IMEX ([70, 66]) ou les schémas de type Lagrange-projection avec une étape lagrangienne implicite [65, 117]. Toutes ces approches permettent de s'affranchir d'une condition CFL contrainte par la vitesse du son (singulière) et d'assurer la stabilité des schémas sous une contrainte CFL associée à la vitesse matérielle :

$$\delta t \lesssim \frac{h}{|\mathbf{u}|}.$$

Difficultés liées à la discrétisation spatiale dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$: Une deuxième limitation dont souffrent les schémas classiques pour les modèles d'écoulements compressibles dans les régimes à faible nombre de Mach est liée à la discrétisation spatiale. En général, ces schémas s'appuient sur un arrangement *colocalisé* des inconnues discrètes c'est-à-dire que tous les degrés de liberté sont attachés aux centres des cellules du maillage. Les schémas numériques de type volumes finis où les flux

numériques aux interfaces entre cellules sont par exemple déterminés par des solveurs de Godunov approchés locaux aux faces entrent dans cette catégorie. Par exemple, sur un maillage conforme tel qu'introduit dans la Définition 3.5.1, on peut écrire (4.21) au niveau d'une maille K comme

$$\frac{U_K^{n+1} - U_K^n}{\delta t} + \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}_h U_h^{n+1})_K = F_K^n \quad (4.22)$$

où F_K^n est une discrétisation explicite des termes non singuliers dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ (et de la convection) et où $(\mathcal{A}_h U_h^{n+1})_K$ est déterminé par des opérateurs divergence et gradient discrets qui ont la forme suivante :

$$(\operatorname{div}_h(\rho \mathbf{u}))_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| (\rho \mathbf{u})_\sigma, \quad (\nabla_h r)_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| r_\sigma \mathbf{n}_{K,\sigma}$$

où pour une face interne $\sigma = K|L$, les flux aux faces $(\rho \mathbf{u})_\sigma$ et r_σ sont calculés à partir de (U_K^{n+1}, U_L^{n+1}) en résolvant un problème de Riemann approché. Pour le schéma de Rusanov par exemple, on a (avec $\lambda \approx \max(|\mathbf{u}_K|, |\mathbf{u}_L|)$) :

$$\begin{pmatrix} (\rho \mathbf{u})_\sigma \\ r_\sigma \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{(\rho \mathbf{u})_K + (\rho \mathbf{u})_L}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ \frac{r_K + r_L}{2} \end{pmatrix}}_{\text{flux centré}} - \underbrace{\frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} r_L - r_K \\ \gamma^{-1} ((\rho \mathbf{u})_L - (\rho \mathbf{u})_K) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \end{pmatrix}}_{\text{diffusion numérique}}.$$

On voit alors qu'en raison du coefficient $1/\varepsilon$ devant l'opérateur des ondes discrets, le décentrement des flux (qui reste nécessaire à la stabilité du schéma malgré son caractère semi-implicite) induit une diffusion numérique de l'ordre de $1/\varepsilon$. Cette diffusion numérique devient donc trop importante dans les régimes proches de l'incompressible. En particulier, une perte de précision est observée sur l'approximation de la pression. Les variations de la pression autour de sa moyenne, qui doivent être de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sont plutôt de l'ordre de $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (voir par exemple [91, 90, 89, 71, 92, 108]). Ce problème peut être corrigé en multipliant la dissipation numérique par un coefficient de l'ordre du nombre de Mach c'est-à-dire en remplaçant λ par $\lambda(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Cela revient formellement à recentrer les flux dans la divergence et le gradient de pression discrets dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. On obtient alors à la limite (si $\rho \rightarrow 1$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) les opérateurs divergence et gradient *centrés* suivants :

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \frac{\mathbf{u}_K + \mathbf{u}_L}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad (\nabla_h r)_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \frac{r_K + r_L}{2} \mathbf{n}_{K,\sigma}. \quad (4.23)$$

Malheureusement, en raison de l'arrangement colocalisé des inconnues discrètes, le gradient centré $(\nabla_h r)$ défini ci-dessus ne satisfait pas la propriété

$$\nabla_h r = 0 \quad \implies \quad r = \text{Cste}$$

sur domaine connexe. Il est en effet facile de voir que sur un maillage cartésien régulier (les mailles sont rectangulaires et ont les mêmes longueurs et les mêmes largeurs) pour lequel les centres des mailles $(K_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ sont situés aux points $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$, un champ non constant du type

$$r_{K_{ij}} = (-1)^i (-1)^j, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

vérifie $\nabla_h r = 0$. Ce type de champ pathologique est appelé un *mode en échiquier* (checkerboard mode en anglais). Si l'on note

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{div}_h \\ \gamma \nabla_h & 0 \end{pmatrix}$$

l'opérateur des ondes discret associé aux discrétisations centrées (4.23), on observe que $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_h$ contient des champs de la forme $U_h = (r_h, \mathbf{u}_h)$ où $\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h = 0$ et où r_h est un mode en échiquier. Comme le schéma limite (pour l'incompressible) est formellement obtenu en projetant (4.22) sur $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_h$, des modes parasites en échiquier peuvent venir perturber les solutions discrètes. En réalité, ces modes parasites sont observés pour les discrétisations colocalisées y compris à des nombres de Mach ε strictement positifs (mais petits). Les schémas numériques colocalisés nécessitent alors des mécanismes de stabilisation additionnels dans la limite incompressible [107].

Remarque 4.3.1. *Le schéma limite pour le modèle incompressible que l'on obtient avec une discrétisation colocalisée est de la forme suivante :*

Connaissant (\mathbf{u}^n, p^n) , chercher $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ avec p^{n+1} de moyenne nulle et tels que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & K \in \mathcal{M}, \\ \frac{\mathbf{u}_K^{n+1} - \mathbf{u}_K^n}{\delta t} + (\nabla_h p^{n+1})_K &= F_K^n, & K \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

où les opérateurs divergence et gradient discrets sont donnés par (4.23). La pression solution p^{n+1} est calculée en appliquant l'opérateur divergence discret div_h à la deuxième équation. On est alors amené à la résolution d'un problème de Poisson discret :

Chercher $p^{n+1} = \sum_{K \in \mathcal{M}} p_K^{n+1} \mathbf{1}_K$ telle que $\sum_K |K| p_K^{n+1} = 0$ et telle que :

$$\operatorname{div}_h(\nabla_h p^{n+1}) = \operatorname{div}_h(F_K^n).$$

L'opérateur Laplacien discret $\operatorname{div}_h(\nabla_h \cdot)$ a un stencil étendu. Sa valeur à la maille K dépend des valeurs de la pression dans les mailles voisines des mailles voisines de la maille K . Par ailleurs, pour un maillage cartésien régulier, on observe que cet opérateur découple les mailles d'indices pairs et celles d'indices impairs. L'opérateur contient donc dans son noyau les modes en échiquier qui peuvent venir perturber la solution.

4.3.2 Une approche alternative : partir des méthodes numériques pour l'incompressible

Plutôt que de stabiliser dans les régimes des très petits ε les méthodes habituellement utilisées pour les modèles compressibles, une approche alternative consiste à partir de schémas stables et consistants pour les modèles incompressibles et étendre ces discrétisations aux modèles compressibles. Une discrétisation spatiale usuelle pour les modèles incompressibles consiste en un arrangement *décalé* des inconnues discrètes : les pressions discrètes sont attachées aux centres des cellules K d'un maillage dit *primal* \mathcal{M} :

$$\{p_K, K \in \mathcal{M}\}$$

tandis que les vitesses sont attachées aux faces $\sigma \in \mathcal{E}$ de ce même maillage :

$$\{\mathbf{u}_\sigma, \sigma \in \mathcal{E}\}.$$

La divergence dans l'équation de conservation de la masse est alors discrétisée à l'aide d'une formule de volumes finis faisant intervenir les inconnues de vitesse aux faces tandis que le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement est calculé de manière centrée en $\sigma = K|L$:

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad (\nabla_h p)_\sigma = \frac{1}{d_\sigma} (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad (4.24)$$

où d_σ est la distance entre deux centres \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_L de deux mailles voisines K et L partageant la face σ . Le schéma le plus célèbre introduisant une telle discrétisation sur grilles décalées est probablement le schéma MAC [93] pour les grilles cartésiennes. On peut également citer des méthodes similaires sur maillages plus généraux tels que des méthodes d'éléments finis non conformes de bas degré utilisant des degrés de liberté aux faces : les éléments finis de Crouzeix-Raviart [67] sur des maillages triangulaires ou les éléments finis de Rannacher-Turek [115] sur les maillages quadrangulaires. La particularité de ces discrétisations sur grilles décalées est qu'elles vérifient une version discrète de la condition *inf-sup*, ou de manière équivalente de l'existence d'un opérateur de Bogovskii discret, inverse de la divergence discrète div_h , ou encore de la propriété

$$(\nabla_h p)_\sigma = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E} \quad \implies \quad p = \text{Cste}$$

sur domaine connexe. Cette propriété est d'ailleurs évidente à partir de la définition (4.24) de $(\nabla_h p)_\sigma$. Ces discrétisations sur grilles décalées permettent donc d'éviter les modes en échiquier, et elles sont en général couplées avec une semi-implication en temps s'appuyant sur une technique de prédiction-correction.

Remarque 4.3.2. *Le schéma limite pour le modèle incompressible que l'on obtient avec une discrétisation décalée est de la forme suivante :*

Connaissant (\mathbf{u}^n, p^n) , chercher $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ avec p^{n+1} de moyenne nulle et tels que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & K \in \mathcal{M}, \\ \frac{\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n}{\delta t} + (\nabla_h p^{n+1})_\sigma &= F_\sigma^n, & \sigma \in \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

où les opérateurs divergence et gradient discrets sont donnés par (4.24). La pression solution p^{n+1} est calculée en appliquant l'opérateur divergence discret div_h à la deuxième équation. On est alors amené à la résolution d'un problème de Poisson discret :

Chercher $p^{n+1} = \sum_{K \in \mathcal{M}} p_K^{n+1} \mathbf{1}_K$ telle que $\sum_K |K| p_K^{n+1} = 0$ et telle que :

$$\operatorname{div}_h(\nabla_h p^{n+1}) = \operatorname{div}_h(F_\sigma^n)$$

qui dans ce cas est bien posé. En effet, l'opérateur Laplacien discret $\operatorname{div}_h(\nabla_h \cdot)$ est ici l'opérateur Laplacien correspondant au schéma TPFA (pour Two-Point Flux Approximation) pour l'équation de Poisson, schéma réputé consistant et stable sur les maillages dits admissibles (voir [76]). Nous verrons dans le chapitre suivant que le "bon" gradient de pression discret qu'il faut définir aux faces n'est en fait pas le gradient donné par (4.24) mais plutôt le gradient gonflé, obtenu par multiplication par la dimension d'espace :

$$(\nabla_h p)_\sigma = \frac{d}{d_\sigma} (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}.$$

Ce gradient gonflé est en fait le dual de la divergence discrète donnée en (4.24) (voir la Prop. 5.2.2 et la Remarque 5.2.1), propriété qui permet de démontrer sa consistance (au sens faible).

L'idée est donc d'étendre ces méthodes de manière à pouvoir approcher les solutions des modèles compressibles. Il faut donc pour cela discrétiser la masse volumique, qui n'est plus constante. Un choix naturel est de placer les degrés de liberté de la masse volumique au même endroit que ceux de la pression, c'est-à-dire aux centres des mailles. Cette approche remonte en fait aux années soixante et soixante dix [93, 94, 59]. Une classe de nouveaux schémas sur grilles décalées et utilisant une implication partielle par une approche de prédiction-correction a été développée depuis une quinzaine d'années dans le code de calcul CALIF³S [64] (développé à l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire) pour les modèles d'écoulements compressibles : d'abord pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes barotropes [96, 95] et ensuite pour le cas non barotrope [95, 88]. Les inconnues scalaires (masse volumique, pression et énergie interne dans le cas non barotrope) sont discrétisées sur les cellules d'un maillage dit *primal* et les vitesses sont discrétisées sur un maillage *dual* dont les cellules sont localisées au voisinage des faces du maillage primal.

Le chapitre suivant (chapitre 5) est dédié à la présentation, dans le cadre des équations de Navier-Stokes compressibles barotrope de ces discrétisations semi-implicites sur grilles décalées. Dans le chapitre 6 on s'intéresse à la flèche rouge du diagramme de la Fig. 4.1 c'est-à-dire à la limite des solutions discrètes à discrétisation fixée pour deux types de limites incompressibles (en particulier pour la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ où ε est le nombre de Mach). Enfin, dans le chapitre 7, on s'intéresse aux flèches bleues, c'est-à-dire à la convergence des solutions discrètes vers les solutions exactes des équations de Navier-Stokes compressibles (dans le cas stationnaire) et incompressibles.

Chapitre 5

Discrétisation sur grilles décalées pour les équations de Navier-Stokes compressibles

5.1	Maillages et inconnues discrètes	98
5.2	Discrétisation spatiale	100
5.2.1	Discrétisation de la convection	100
5.2.2	Discrétisation du gradient de pression	102
5.2.3	Discrétisation du terme de diffusion	103
5.2.4	La condition <i>inf-sup</i> discrète	105
5.3	Discrétisations temporelles	105
5.3.1	Le schéma implicite et ses propriétés	106
5.3.2	Un schéma de type <i>prédiction-correction de pression</i>	108
5.3.3	Un autre schéma semi-implicite	110

Dans ce chapitre nous expliquons comment les discrétisations spatiales sur grilles décalées et temporelles par des méthodes de prédiction-correction de pression, très classiques pour l'approximation numérique des modèles d'écoulements incompressibles, peuvent être étendues aux modèles d'écoulements compressibles. Nous décrivons donc l'extension de ces discrétisations dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes en dimensions deux et trois. Les degrés de liberté des grandeurs physiques scalaires (masse volumique, pression) sont situés aux centres des mailles d'un maillage dit *primal* tandis que les degrés de liberté des vitesses sont situés aux faces. Comme dans le cas incompressible (voir (4.25)) l'équation de conservation de la masse est discrétisée sur le maillage primal à l'aide de techniques de volumes finis, tandis que l'équation de quantité de mouvement est discrétisée sur un maillage *dual* dont les cellules sont situées au voisinage des faces du maillage primal. Dans cette dernière équation, les termes de diffusion sont discrétisés à l'aide d'éléments finis de bas degré (éléments finis de Crouzeix-Raviart ou de Rannacher-Turek) tandis que les termes de convection sont discrétisés par volumes finis. Mise à part la discrétisation implicite en temps, les schémas décrits sont implémentés dans le logiciel *open source* CALIF³S [64] développé par l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire.

Nous présentons les principales propriétés des schémas obtenus, à savoir : une version discrète de la condition *inf-sup* qui assure la stabilité et la précision des schémas dans les régimes faiblement compressibles (et incompressibles) ainsi que des équations d'énergie cinétique et d'énergie totale discrètes dont découlent des propriétés de stabilité non linéaire pour des pas de temps arbitrairement grands ou contraints par des conditions CFL indépendantes des ondes acoustiques.

Tous les schémas numériques décrits dans ce chapitre peuvent être généralisés aux équations d'Euler barotropes et au cas unidimensionnel. Notons également que ces schémas ont été étendus aux modèles non barotropes grâce à une discrétisation de l'équation d'énergie interne sur le maillage primal.

Notons enfin qu'en ce qui concerne les régimes compressibles, un certain nombre de travaux ont démontré que les schémas sur grilles décalées fournissent des approximations robustes et précises. Nous renvoyons par exemple à [96, 98, 87] où des versions semi-implicites ou explicites (d'ordre un ou avec des techniques de montée en ordre de type MUSCL) de ces schémas permettent la simulation numérique de cas tests de type tube à choc pour les équations d'Euler barotropes et non barotropes.

5.1 Maillages et inconnues discrètes

Dans tout le chapitre, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné, polygonal si $d = 2$, et polyédrique si $d = 3$. On cherche à écrire un schéma numérique pour approcher les solutions de (4.1)-(4.3).

Définition 5.1.1 (Discrétisation spatiale sur grilles décalées). *Une discrétisation sur grilles décalées de Ω , notée \mathcal{D} , est définie par un couple $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$, où :*

- \mathcal{M} est une famille finie composée de simplexes $K \in \mathcal{M}$ (triangles pour $d = 2$, tétraèdres pour $d = 3$) ou de quadrangles (quadrilatères pour $d = 2$, hexaèdres pour $d = 3$) appelée “maillage primal” qui forme une partition de Ω : $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \bar{K}$. On suppose que le maillage est conforme i.e. que “toute face σ d'un élément $K \in \mathcal{M}$ est soit contenue dans la frontière $\partial\Omega$, soit égale à une face d'un autre élément L ”, et on note alors $\sigma = K|L$. Pour chaque $K \in \mathcal{M}$, on note $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des faces de K , et par \mathcal{E} l'ensemble des faces du maillage. On note \mathcal{E}_{ext} resp. \mathcal{E}_{int} l'ensemble des faces externes resp. internes : $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial\Omega\}$ et $\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$. Le vecteur unitaire normal à $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ et sortant de K est noté $\mathbf{n}_{K,\sigma}$. Dans la suite, la notation $|K|$ où $|\sigma|$ désigne indifféremment la mesure d ou $(d-1)$ -dimensionnelle de K dans \mathbb{R}^d ou de σ dans \mathbb{R}^{d-1} .
- On définit un “maillage dual” associé aux faces $\sigma \in \mathcal{E}$ comme suit. Si K est un simplexe, un rectangle ou un parallélépipède rectangle, on définit, pour chaque face $\sigma \in \mathcal{E}(K)$, $D_{K,\sigma}$ comme le cône de base σ et de sommet \mathbf{x}_K le centre de gravité de K . On obtient alors une partition de K en $(d+1)$ si K est un simplexe, $2d$ si K est un quadrangle) sous-volumes de même mesure. On étend cette construction au cas général en supposant avoir construit une partition de K en $1/(\#\mathcal{E}(K))$ sous-volumes de même mesure (voir Figure 5.1). Le volume $D_{K,\sigma}$ est appelé la demi-maille duale associée à K et σ . Pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $\sigma = K|L$, on définit la maille duale D_σ associée à σ en posant $D_\sigma = D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$ et pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K)$, on définit D_σ par $D_\sigma = D_{K,\sigma}$. L'ensemble $\cup_{\sigma \in \mathcal{E}} D_\sigma$ est alors un autre maillage de Ω appelé “maillage dual” et est associé à l'ensemble \mathcal{E} . On note $\bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)$ l'ensemble des faces de D_σ , et $\epsilon = D_\sigma|D_{\sigma'}$ la face séparant les deux mailles duales D_σ et $D_{\sigma'}$. Comme pour le maillage primal, on note $\bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}$ l'ensemble des faces duales incluses dans le domaine Ω et $\bar{\mathcal{E}}_{\text{ext}}$ l'ensemble des faces duales situées sur le bord $\partial\Omega$. Dans ce dernier cas, il existe alors $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ tel que $\epsilon = \sigma$.

Définition 5.1.2 (Pas de la discrétisation). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation sur grilles décalées. Pour chaque maille $K \in \mathcal{M}$, on définit h_K le diamètre de K (mesure du plus grand segment inclus dans K). Le pas de la discrétisation est défini par :*

$$h_{\mathcal{D}} = \max_{K \in \mathcal{M}} h_K.$$

Définition 5.1.3 (Régularité de la discrétisation). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation sur grilles décalées. Pour chaque maille $K \in \mathcal{M}$, on définit ϱ_K le rayon de la plus grande boule inscrite dans K . Le paramètre de régularité de la discrétisation \mathcal{D} est défini par*

$$\theta_{\mathcal{D}} = \max \left\{ \frac{h_K}{\varrho_K}, K \in \mathcal{M} \right\} \cup \left\{ \frac{h_K}{h_L}, \frac{h_L}{h_K}, \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{\text{int}} \right\}. \quad (5.1)$$

Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation sur grilles décalées. Pour chaque maille $K \in \mathcal{M}$, on définit $\alpha_K = 0$ si K est un simplexe et si K est un quadrangle, $\alpha_K \in [0, \pi)$ est défini par $\alpha_K = \pi - \bar{\alpha}_K$ où $\bar{\alpha}_K$ est

l'angle maximal entre les vecteurs normaux sortants à deux faces opposées. α_K est une mesure de la déviation du quadrangle K par rapport à un parallélogramme (ou un parallélépipède rectangle) pour lequel on a $\alpha_K = 0$. On note

$$\alpha_{\mathcal{D}} = \max_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K. \quad (5.2)$$

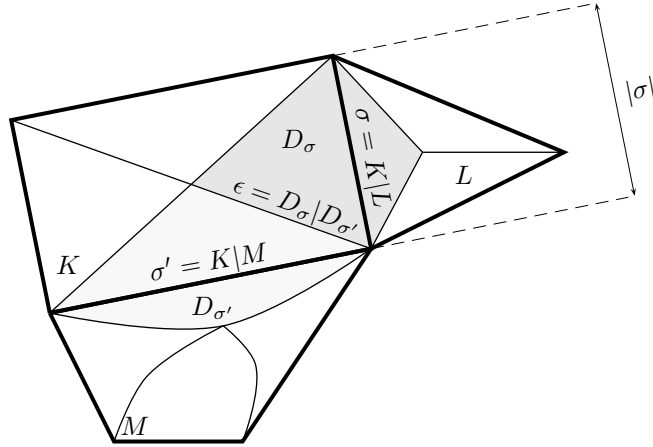


FIGURE 5.1 – Notations pour les mailles primales et duales.

Partant de la Définition 5.1.1, on propose une localisation différenciée des inconnues discrètes, similaire à celle du schéma MAC. Les degrés de liberté pour la masse volumique sont associés aux mailles du maillage primal \mathcal{M} et sont notés :

$$\{\rho_K, K \in \mathcal{M}\},$$

tandis que les degrés de liberté pour la vitesse sont localisés au niveau des faces du maillage primal, et sont donc associés aux cellules du maillage dual D_σ , $\sigma \in \mathcal{E}$. La condition aux limites de Dirichlet homogène sur la vitesse $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ est prise en compte en fixant à zéro les inconnues de vitesse associées aux faces externes. Pour des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, les inconnues discrètes pour la vitesse sont donc :

$$\{\mathbf{u}_\sigma, \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}\}.$$

Aux inconnues discrètes nous associons des fonctions constantes par mailles comme suit.

Définition 5.1.4 (Espaces fonctionnels discrets). Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω sur grilles décalées comme introduite à la Définition 5.1.1.

- On note $L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ l'espace des fonctions scalaires constantes sur chaque maille K du maillage primal. Pour tout $q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $K \in \mathcal{M}$, on note q_K la valeur constante de q sur K . La fonction q est alors donnée par :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \mathbf{1}_K(\mathbf{x}) \quad \text{p.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega,$$

où $\mathbf{1}_K$ est la fonction indicatrice de K . On note $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ les fonctions de $L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ de moyenne nulle sur Ω .

- On note $H_{\mathcal{E}}(\Omega)$ l'espace des fonctions scalaires constantes sur chaque maille du maillage dual D_σ , $\sigma \in \mathcal{E}$. Pour tout $u \in H_{\mathcal{E}}(\Omega)$ et $\sigma \in \mathcal{E}$, on note u_σ la valeur constante de u sur D_σ . La fonction u est alors donnée par :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_\sigma \mathbf{1}_{D_\sigma}(\mathbf{x}) \quad \text{p.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

On note $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega) = H_{\mathcal{E}}(\Omega)^d$. Enfin, on note $H_{\mathcal{E},0}(\Omega) = \{u \in H_{\mathcal{E}}(\Omega), u_\sigma = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}\}$ et $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega) = H_{\mathcal{E},0}(\Omega)^d$.

5.2 Discrétisation spatiale

Décrivons à présent la discrétisation des équations de conservation de la masse et de bilan de quantité de mouvement. L'équation de conservation de la masse est discrétisée sur le maillage primal et l'équation de quantité de mouvement est discrétisée sur le maillage dual.

5.2.1 Discrétisation de la convection

Étant donnés $(\rho, \mathbf{u}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, le terme $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$ dans l'équation de conservation de la masse est discrétisé par une formule de volumes finis sur la cellule K :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}), \quad (5.3)$$

où $F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u})$, le flux de masse numérique à travers une face σ est, nul à travers les faces externes $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ conformément à la condition aux limites de Dirichlet homogène sur la vitesse, et est défini pour les faces internes de la manière suivante :

$$F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) = |\sigma| \rho_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad (5.4)$$

où pour ρ_{σ} , on prend la valeur *décentrée amont* (upwind) par rapport à la composante orthogonale à σ de la vitesse, $\mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$:

$$\rho_{\sigma} = \begin{cases} \rho_K, & \text{si } \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \geq 0, \\ \rho_L, & \text{si } \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

On décrit maintenant la discrétisation de l'opérateur de convection $\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ dans l'équation de quantité de mouvement discrète. Cette discrétisation est définie de manière à pouvoir reproduire au niveau discret le calcul continu suivant, crucial pour l'établissement du bilan d'énergie cinétique :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{u} \left(\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right)}_{=0} + \rho \left(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right).$$

On choisit une discrétisation de type volumes finis sur le maillage dual. Afin de pouvoir considérer des discrétisations temporelles où la vitesse convectée et la vitesse convectante ne sont pas prises au même pas de temps, on définit l'approximation d'un opérateur de convection plus général à savoir $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$. Étant donnés une masse volumique discrète $\rho \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$, et deux champs de vitesses discrets $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, cette discrétisation est construite comme suit :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{\sigma} = \frac{1}{|D_{\sigma}|} \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_{\sigma})} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}) \mathbf{v}_{\epsilon}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (5.6)$$

La vitesse convectée est discrétisée au niveau des faces du maillage dual : \mathbf{v}_{ϵ} . Comme déjà mentionné, une face duale se trouvant sur le bord de Ω est aussi une face primale, et le flux à travers celle-ci est nul (pour des conditions de Dirichlet homogènes). Ainsi, les valeurs de \mathbf{v}_{ϵ} ne sont à définir que sur les faces duales internes. On choisit une valeur centrée :

$$\mathbf{v}_{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\sigma} + \mathbf{v}_{\sigma'}), \quad \text{pour } \epsilon = D_{\sigma}|D'_{\sigma}.$$

En fonction de la discrétisation temporelle, d'autres choix sont possibles. Par exemple, si ce terme est complètement explicite, on choisit pour \mathbf{v}_{ϵ} la valeur *décentrée amont* (upwind) par rapport au signe de $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u})$.

Le flux $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u})$ est un flux de masse numérique à travers une face ϵ de la cellule duale D_{σ} . Sa valeur est fixée à zéro si $\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}_{\text{ext}}$. Pour $\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}$, $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u})$ est une combinaison linéaire des flux de masses $F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u})$ sortants de la maille K contenant ϵ . Plus précisément, les flux duaux sont calculés en vertu de la définition suivante :

Définition 5.2.1 (Calcul des flux de masse duaux). *Les flux à travers les faces du maillage dual sont définis de manière à satisfaire les trois contraintes suivantes :*

(H1) *Les flux duaux $(F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}))_{\epsilon \subset K}$ à travers les faces du maillage dual qui sont incluses dans une cellule K sont solution du système linéaire suivant :*

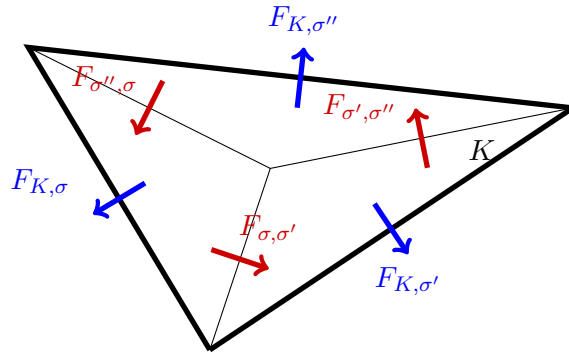
$$F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) + \sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma), \epsilon \subset K} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}) = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma'}(\rho, \mathbf{u}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(K). \quad (5.7)$$

(H2) *Les flux duaux sont conservatifs, i.e. pour toute face duale $\epsilon = D_\sigma|D'_\sigma$, on a $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}) = -F_{\sigma',\epsilon}(\rho, \mathbf{u})$.*

(H3) *Les flux duaux sont des fonctions bornées des flux primaux $(F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}))_{\sigma \in \mathcal{E}(K)}$:*

$$|F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u})| \leq \max \{|F_{K,\sigma'}(\rho, \mathbf{u})|, \sigma' \in \mathcal{E}(K)\}, \quad \forall \epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma), \epsilon \subset K. \quad (5.8)$$

Exemple 5.2.1 (Calcul des flux duaux en dimension $d = 2$ pour une cellule triangulaire). *Notons σ, σ' et σ'' les faces d'une maille K triangulaire. Connaissant les flux primaux $F_{K,\sigma}, F_{K,\sigma'}$ et $F_{K,\sigma''}$ sortants à travers les faces de la maille K , on cherche les flux duaux à travers les faces duales incluses dans K . Notons les ainsi : $F_{\sigma,\sigma'}$ le flux dual allant de D_σ à $D_{\sigma'}$, $F_{\sigma',\sigma''}$ celui de $D_{\sigma'}$ vers $D_{\sigma''}$ et $F_{\sigma'',\sigma}$ celui de $D_{\sigma''}$ vers D_σ .*



Par construction du maillage dual, on a $\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} = 1/3$ (lorsque $d = 2$) pour toute maille $K \in \mathcal{M}$ triangulaire et tout $\sigma \in \mathcal{E}(K)$. Ainsi, les hypothèses (H1) et (H2) expriment le fait que ces trois nombres sont solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} + F_{\sigma,\sigma'} - F_{\sigma'',\sigma} &= \frac{1}{3}(F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'} + F_{K,\sigma''}), \\ F_{K,\sigma'} - F_{\sigma,\sigma'} + F_{\sigma',\sigma''} &= \frac{1}{3}(F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'} + F_{K,\sigma''}), \\ F_{K,\sigma''} - F_{\sigma',\sigma''} + F_{\sigma'',\sigma} &= \frac{1}{3}(F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'} + F_{K,\sigma''}). \end{aligned}$$

Ce système admet une infinité de solutions (faire la somme des lignes pour voir que les équations sont liées). Une solution particulière qui satisfait l'hypothèse (H3) est donnée par :

$$F_{\sigma,\sigma'} = \frac{1}{3}(F_{K,\sigma'} - F_{K,\sigma}), \quad F_{\sigma',\sigma''} = \frac{1}{3}(F_{K,\sigma''} - F_{K,\sigma'}), \quad F_{\sigma'',\sigma} = \frac{1}{3}(F_{K,\sigma} - F_{K,\sigma''}).$$

Définissons à présent l'opérateur de dérivation temporelle $\partial_t(\rho \mathbf{u})$ apparaissant dans l'équation de quantité de mouvement. Cette équation étant discrétisée sur les mailles duales, et la masse volumique sur les mailles primales, il est nécessaire d'interpoler la masse volumique sur le maillage dual. La définition des masses volumiques duales ρ_{D_σ} est déterminée de sorte qu'une équation de conservation de la masse discrète soit satisfaite sur le maillage dual. On a le résultat suivant (voir par exemple [58, 96, 103] pour une preuve) :

Proposition 5.2.1 (Conservation de la masse discrète sur les mailles duales). *Soient $(\rho^n, \rho^{n+1}, \rho^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)^3 \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ des champs de masse volumique et de vitesse discrets. On suppose que ces champs vérifient la discrétisation suivante de l'équation de conservation de la masse sur le maillage primal :*

$$\frac{|K|}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho^*, \mathbf{u}^*) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (5.9)$$

On définit $\rho_{D_\sigma}^k$ pour $k = n$ et $k = n + 1$ une interpolation de la masse volumique discrète du maillage primal vers le maillage dual par :

$$|D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^k = |D_{K,\sigma}| \rho_K^k + |D_{L,\sigma}| \rho_L^k, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L. \quad (5.10)$$

On définit les flux duaux $F_{\sigma,\epsilon}(\rho^*, \mathbf{u}^*)$ à partir des flux primaux $F_{K,\sigma}(\rho^*, \mathbf{u}^*)$ comme dans la Définition 5.2.1. Alors une équation discrète de bilan de masse est satisfaite sur toutes les mailles duales :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho^*, \mathbf{u}^*) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (5.11)$$

5.2.2 Discrétisation du gradient de pression

Étant donné $\rho \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)$, la discrétisation du terme $\nabla \wp(\rho)$ dans l'équation de quantité de mouvement est définie par :

$$(\nabla p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\wp(\rho_L) - \wp(\rho_K)) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L. \quad (5.12)$$

Ce choix de discrétisation pour le gradient de pression satisfait un analogue discret de la propriété de dualité entre le gradient et la divergence, vérifiée dès que \mathbf{u} satisfait des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} p (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma(\mathbf{x}) = 0.$$

Proposition 5.2.2 (Dualité gradient-divergence discrète). *Pour tous $(\rho, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, on a l'égalité suivante :*

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \wp(\rho_K) \operatorname{div}(\mathbf{u})_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (\nabla p)_\sigma = 0 \quad (5.13)$$

où $\operatorname{div}(\mathbf{u})_K = |K|^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ est obtenu en prenant $\rho \equiv 1$ dans (5.3).

Remarque 5.2.1. *Le gradient discret (5.12) est le gradient dit gonflé. Dans le cas où le segment $[\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L]$ (reliant les centres des mailles K et L) est orthogonal à la face σ (et donc colinéaire à $\mathbf{n}_{K,\sigma}$), en notant d_σ la distance entre \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_L on a $|D_\sigma| = |\sigma| d_\sigma / d$. Le gradient $(\nabla p)_\sigma$ est donc donné par :*

$$(\nabla p)_\sigma = \frac{d}{|d_\sigma|} (\wp(\rho_L) - \wp(\rho_K)) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L.$$

Il s'agit donc du gradient correspondant à la Two Point Flux Approximation (TPFA) multiplié par la dimension de l'espace.

5.2.3 Discrétisation du terme de diffusion

Le terme de diffusion est discrétisé à l'aide d'éléments finis non conformes de bas degré qui utilisent les degrés de liberté de la vitesse aux faces : les éléments finis de *Crouzeix-Raviart* sur les simplexes et les éléments finis de *Rannacher-Turek* sur les mailles quadrangulaires. Notons $\Pi(K)$ l'espace polynomial associé à ces éléments finis. Lorsque $K \in \mathcal{M}$ est un simplexe, $\Pi(K)$ est l'espace \mathbb{P}_1 des fonctions affines définies sur K . Lorsque $K \in \mathcal{M}$ est un quadrangle on note \mathbb{Q}_K l'unique fonction quadratique qui envoie les sommets du cube unité sur les sommets de K . L'espace $\Pi(K)$ est alors donné par

$$\Pi(K) = \left\{ f \circ \mathbb{Q}_K^{-1}, \text{ avec } f \in \text{span} \{1, (x_i)_{i=1,\dots,d}, (x_i^2 - x_{i+1}^2)_{i=1,\dots,d-1}\} \right\}.$$

Une fonction $\hat{u} \in \Pi(K)$ est entièrement déterminée par ses valeurs moyennes sur les faces de K c'est-à-dire par les formes linéaires suivantes

$$F_\sigma(\hat{u}) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \hat{u} \, d\gamma(\mathbf{x}), \quad \sigma \in \mathcal{E}(K).$$

On définit alors un espace discret associé à ces éléments finis et s'appuyant sur des degrés de liberté aux faces :

Définition 5.2.2 (Espaces d'éléments finis pour la vitesse).

- On définit l'espace de fonctions $\mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$ associé à l'élément fini de *Crouzeix-Raviart* ou *Rannacher-Turek* :

$$\mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega) = \left\{ \hat{u} \in L^2(\Omega) \mid \hat{u}|_K \in \Pi(K), \forall K \in \mathcal{M}; \right. \\ \left. \text{avec } F_\sigma(\hat{u}) \text{ continue à travers chaque face } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \right\}.$$

- On définit $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \subset \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace des fonctions discrètes dont les degrés de liberté associés aux faces de bord sont nuls :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) = \left\{ \hat{u} \in \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega) \mid F_\sigma(\hat{u}) = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \right\}.$$

On note $\mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega) := \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)^d$ et $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) := \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)^d$

Définition 5.2.3 (Fonctions de forme). On appelle fonctions de forme les fonctions $\zeta_\sigma \in \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$, $\sigma \in \mathcal{E}$, telles que pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}$, $F_{\sigma'}(\zeta_\sigma) = \delta_\sigma^{\sigma'}$ où $\delta_\sigma^{\sigma'} = 1$ si $\sigma = \sigma'$ et $\delta_\sigma^{\sigma'} = 0$ sinon. On a alors, pour tout $\hat{u} \in \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$:

$$\hat{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_\sigma \zeta_\sigma, \quad \text{où } u_\sigma = F_\sigma(\hat{u}) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \hat{u} \, d\gamma(\mathbf{x}), \forall \sigma \in \mathcal{E}.$$

On a $\hat{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ si, et seulement si $u_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$.

Remarque 5.2.2. Une fonction de forme $\zeta_\sigma \in \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$ a son support inclus dans les mailles adjacentes à σ .

L'espace $\mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$ (resp. $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$) est isomorphe à l'espace des vitesses discrètes constantes sur les mailles duales $\mathbf{H}_\mathcal{E}(\Omega)$ (resp. $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$). À chaque fonction $\mathbf{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_\sigma \mathbb{1}_{D_\sigma} \in \mathbf{H}_\mathcal{E}(\Omega)$ est associée une unique fonction $\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_\sigma \zeta_\sigma \in \mathbf{H}_\mathcal{M}(\Omega)$. On définit alors la discrétisation des termes de diffusion par éléments finis de la manière suivante : étant donné $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\mathcal{E}(\Omega)$, on pose :

$$-\text{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}))_\sigma = \mu \left(\frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \boldsymbol{\nabla} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \zeta_\sigma \, d\mathbf{x} \right) \\ + (\mu + \lambda) \left(\frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \text{div}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nabla} \zeta_\sigma \, d\mathbf{x} \right), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (5.14)$$

Donnons quelques propriétés liées à cette discrétisation par éléments finis non conformes. Premièrement, l'espace $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. En effet, les fonctions qui le composent sont discontinues à travers les faces du maillage primal. Les gradients de ces fonctions sont donc composés d'une partie régulière définie sur l'intérieur des mailles primales et d'une partie mesure supportée par les faces du maillage primal. On peut néanmoins définir sur $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ des opérateurs gradient et divergence réguliers sur l'intérieur de chaque maille comme suit :

$$\nabla_{\mathcal{M}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \nabla \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_K(\mathbf{x}), \quad (5.15)$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_K(\mathbf{x}). \quad (5.16)$$

On définit également sur $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$ des semi-normes $\mathbf{W}^{1,q}$ discrètes pour $q \in [1, +\infty)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}} := \left(\int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{M}} \hat{\mathbf{u}}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5.17)$$

Ces semi-normes sont en fait des normes sur l'espace $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ grâce à une inégalité de Poincaré discrète (voir la Prop. 7.1.5 et la remarque 7.1.2 dans le chapitre 7) :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq C(\theta_0, q) \|\mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega), \quad (5.18)$$

où $\theta_0 > 0$ est un réel tel que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$.

Il est facile de démontrer que la discrétisation du terme de diffusion satisfait une version discrète de la propriété de coercivité découlant du calcul suivant :

$$\int_{\Omega} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} \geq \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 5.2.3 (Coercivité de l'opérateur de diffusion discret). *Pour tout champ de vitesse discret $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, on a :*

$$\sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_{\sigma}| \mathbf{u}_{\sigma} \cdot (-\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}))_{\sigma}) = \mu \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla \hat{\mathbf{u}} : \nabla \hat{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + (\mu + \lambda) \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 \, d\mathbf{x} \geq \mu \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2.$$

Terminons cette partie par une propriété très importante des éléments finis de type Crouzeix-Raviart et Rannacher-Turek, à savoir l'existence d'un opérateur d'interpolation de Fortin :

$$I_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega) & \longrightarrow \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ \mathbf{u} & \longmapsto I_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \mathbf{u} \, d\gamma(\mathbf{x}) \right) \zeta_{\sigma}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Cet opérateur a les propriétés suivantes (voir [67] et [115]) :

Proposition 5.2.4. *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$ (où $\theta_{\mathcal{D}}$ est définie dans (5.1)). Alors pour tout $q \in [1, +\infty)$, il existe $C = C(\theta_0, q, d)$ telle :*

(i) *Stabilité :*

$$\|I_{\mathcal{M}} \mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{1,q}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega). \quad (5.20)$$

(ii) *Approximation :*

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} - I_{\mathcal{M}} \mathbf{u} \|_{\mathbf{L}^q(K)} + h_K \| \nabla (\mathbf{u} - I_{\mathcal{M}} \mathbf{u}) \|_{\mathbf{L}^q(K)} \\ & \leq C h_K (h_K + \alpha_K) \| \mathbf{u} \|_{\mathbf{W}^{2,q}(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{2,q}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega). \end{aligned} \quad (5.21)$$

(iii) *Préservation de la divergence :*

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(I_{\mathcal{M}} \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x}, \quad \forall p \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega), \mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega). \quad (5.22)$$

5.2.4 La condition *inf-sup* discrète

On énonce à présent la propriété cruciale qui justifie l'utilisation d'une discrétisation sur grilles décalées, à savoir que le couple d'espaces discrets $(\mathbf{L}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega))$ satisfait une version discrète de la condition *inf-sup* ou encore, de manière équivalente, l'existence d'un opérateur de Bogovskii discret, c'est-à-dire d'un "inverse" pour l'opérateur de divergence discret $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}$ défini en (5.16).

Proposition 5.2.5 (Opérateur de Bogovskii discret dans L^q). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$ (où $\theta_{\mathcal{D}}$ est définie dans (5.1)). Alors il existe un opérateur linéaire*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{M}} : \mathbf{L}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$$

ne dépendant que de Ω et de la discrétisation et qui a les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $p \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} r \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}}p) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} r p \, d\mathbf{x}, \quad \forall r \in L_{\mathcal{M}}(\Omega).$$

(ii) Pour tout $q \in (1, +\infty)$, il existe $C = C(q, d, \Omega, \theta_0)$, tel que

$$\|\mathcal{B}_{\mathcal{M}}p\|_{1,q,\mathcal{M}} \leq C \|p\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall p \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega).$$

Démonstration. L'opérateur $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = I_{\mathcal{M}} \circ \mathcal{B}$ où $\mathcal{B} : L_0^q(\Omega) \rightarrow \mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega)$ est l'opérateur de Bogovskii convient. Voir [111] pour plus de détails. \square

Remarque 5.2.3. *L'opérateur de divergence discret $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}$ n'est pas à valeurs dans $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ car les divergences des fonctions de $\Pi(K)$ ne sont pas constantes lorsque K est un quadrangle. La propriété (i) de la Prop. 5.2.5 est équivalente au fait que la moyenne sur chaque maille $K \in \mathcal{M}$ de $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}}p)$ est égale à p_K . Dans le cas d'un maillage composé uniquement de simplexes où $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}}p)$ est une fonction constante sur les mailles du maillage primal, on a alors bien que $\operatorname{div}_{\mathcal{M}}(\mathcal{B}_{\mathcal{M}}p) = p$.*

On a le résultat équivalent suivant :

Proposition 5.2.6 (Condition *inf-sup* discrète dans L^q). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$ (où $\theta_{\mathcal{D}}$ est définie dans (5.1)). Alors pour tout $q \in (1, +\infty)$, il existe $C(q, \Omega, \theta_0) > 0$ tel que*

$$\inf_{\substack{p \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ p \neq 0}} \left(\sup_{\substack{v \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} v \, d\mathbf{x}}{\|p\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{1,q',\mathcal{M}}} \right) \geq C(q, \Omega, \theta_0), \quad (5.23)$$

où $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Tout comme dans le cas continu, la condition *inf-sup* discrète (où l'opérateur de Bogovskii discret) permet un contrôle de l'écart de la pression à sa moyenne à travers le contrôle du gradient de pression. Une condition cruciale pour assurer le bon comportement des solutions discrètes dans la limite incompressible.

5.3 Discrétisations temporelles

Décrivons à présent la discrétisation temporelle. Nous considérons trois discrétisations dont on donne les principales propriétés : une discrétisation complètement implicite. Une discrétisation semi-implicite sur le modèle des schémas de prédiction-correction de pression ainsi qu'une autre discrétisation semi-implicite où seuls les termes de convection dans l'équation de continuité et le gradient de pression sont implicites. Toutes ces discrétisations temporelles sont adaptées à la limite bas Mach dans

la mesure où les deux premières discrétisations sont stables sans condition sur le pas de temps, et où la troisième discrétisation est stable sous une condition CFL n'impliquant pas les ondes acoustiques. L'équation de conservation de la masse est discrétisée sur le maillage primal tandis que l'équation de quantité de mouvement est discrétisée sur le maillage dual.

Dans toute la suite, on se donne $\delta t > 0$ un pas de temps que l'on supposera constant pour simplifier. On suppose aussi que le temps final T est un multiple entier de δt , *i.e.* que $T = N\delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$. On note $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ l'approximation de la solution (ρ, \mathbf{u}) de (4.1)-(4.3) au temps $t_n = n\delta t$ pour $0 \leq n \leq N$.

5.3.1 Le schéma implicite et ses propriétés

On considère dans un premier temps un schéma numérique complètement implicite pour le calcul de la solution approchée $(\rho^n, \mathbf{u}^n)_{n=0,\dots,N}$. Le schéma s'écrit :

Initialisation :

On calcule les champs discrets initiaux $(\rho^0, \mathbf{u}^0) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ en posant :

$$\begin{aligned} \rho_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, on résout le système suivant d'inconnues $(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K \in \mathcal{M}, & (5.25a) \\ \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma \\ &\quad - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1}))_\sigma + (\nabla p^{n+1})_\sigma &= 0, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. & (5.25b) \end{aligned} \right.$$

Les opérateurs différentiels discrets ci-dessus sont ceux décrits à la section précédente.

On énonce à présent les principales propriétés du schéma implicite (5.24)-(5.25). On commence par la positivité de la masse volumique discrète, qui est une conséquence du choix décentré amont pour la masse volumique (5.5) (voir [86, Lemme 2.1]).

Proposition 5.3.1. *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors toute solution du schéma implicite (5.24)-(5.25) satisfait la positivité de la masse volumique discrète :*

$$\rho_K^n \geq 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall n = 0, \dots, N.$$

Si $\rho_0 > 0$ presque partout dans Ω , alors $\rho_K^n > 0$ pour tous $K \in \mathcal{M}$ et $n = 0, \dots, N$.

Une propriété très importante pour la stabilité des solutions discrètes est l'existence d'un équivalent discret de l'équation d'énergie cinétique satisfaite au niveau continu par les solutions (régulières) de (4.1)-(4.3) :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} + \nabla_{\wp}(\rho) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

La démonstration, que l'on peut trouver dans [58, 96, 103], repose de manière cruciale sur l'existence d'une équation de conservation de la masse satisfaite sur les mailles duales

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \quad (5.26)$$

grâce au choix particulier des interpolations ρ_{D_σ} de la masse volumique sur les mailles duales et au choix des flux duaux $F_{\sigma,\epsilon}$ (voir la Définition 5.2.1 et la Prop. 5.2.1). La démonstration est alors quasi-identique au cas continu. On développe l'opérateur de convection dans l'équation de quantité de mouvement discrète, que l'on simplifie grâce à la conservation de la masse sur les mailles duales (5.26). On multiplie ensuite le résultat par la vitesse locale \mathbf{u}_σ puis on se ramène à une forme conservative en utilisant à nouveau la conservation de la masse sur les mailles duales (5.26).

Proposition 5.3.2 (Bilan d'énergie cinétique discret). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors toute solution du schéma implicite (5.24)-(5.25) satisfait une équation d'énergie cinétique discrète : pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, et $0 \leq n \leq N-1$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} \left(\rho_{D_\sigma}^{n+1} |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \epsilon = D_\sigma | D'_\sigma}} F_{\sigma,\epsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1}))_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + (\nabla p)_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + R_\sigma^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\text{avec } R_\sigma^{n+1} = \frac{1}{2\delta t} \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2.$$

Nous avons aussi un équivalent discret de l'identité de renormalisation satisfaite par les solutions de renormalisation (ainsi que les solutions régulières) de (4.1)-(4.3) :

$$\partial_t(b(\rho)) + \mathbf{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + (\rho b'(\rho) - b(\rho)) \mathbf{div} \mathbf{u} = 0,$$

pour toute fonction régulière b . En particulier, on a un équivalent discret de l'équation d'énergie interne :

$$\partial_t(\rho e(\rho)) + \mathbf{div}(\rho e(\rho)\mathbf{u}) + \wp(\rho) \mathbf{div} \mathbf{u} = 0.$$

Proposition 5.3.3 (Équation de renormalisation discrète). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Soit $b \in \mathcal{C}^0([0, +\infty)) \cap \mathcal{C}^1(0, +\infty)$. Alors toute solution du schéma implicite (5.24)-(5.25) satisfait une équation de renormalisation discrète : pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, et $0 \leq n \leq N-1$:*

$$\frac{1}{\delta t} \left(b(\rho_K^{n+1}) - b(\rho_K^n) \right) + \mathbf{div}(b(\rho^{n+1})\mathbf{u}^{n+1})_K + \left(\rho_K^{n+1} b'(\rho_K^{n+1}) - b(\rho_K^{n+1}) \right) (\mathbf{div} \mathbf{u}^{n+1})_K + R_K^{n+1} = 0, \quad (5.28)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}(b(\rho^{n+1})\mathbf{u}^{n+1})_K &= \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| b(\rho_\sigma^{n+1}) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \\ R_K^{n+1} &= \frac{1}{2\delta t} b''(\bar{\rho}_K^{n+1}) (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)^2 + \frac{1}{2|K|} \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma})^- b''(\bar{\rho}_\sigma^{n+1}) (\rho_L^{n+1} - \rho_K^{n+1})^2, \end{aligned}$$

où $\bar{\rho}_K^{n+1} \in [\min(\rho_K^{n+1}, \rho_K^n), \max(\rho_K^{n+1}, \rho_K^n)]$, $\bar{\rho}_\sigma^{n+1} \in [\min(\rho_\sigma^{n+1}, \rho_K^{n+1}), \max(\rho_\sigma^{n+1}, \rho_K^{n+1})]$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}(K)$, et pour $a \in \mathbb{R}$, $a^- \geq 0$ est défini par $a^- = -\min(a, 0)$. Si b est une fonction convexe (ce qui est le cas pour $b(\rho) = \rho e(\rho)$ si \wp est croissante), alors R_K^{n+1} est positif.

Démonstration. Voir [95]. □

En sommant les équations d'énergie cinétique (5.27) et d'énergie interne (5.28) (avec $b(\rho) = \rho e(\rho)$) et en utilisant la dualité gradient-divergence, on obtient un équivalent discret de l'inégalité d'énergie totale (intégrée sur Ω) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t) e(\rho(t)) d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} \leq 0, \quad \forall t \in (0, T).$$

Proposition 5.3.4 (Bilan d'énergie totale discret local en temps). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors toute solution du schéma implicite (5.24)-(5.25) satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout $0 \leq n \leq N - 1$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_{\sigma}| \left(\rho_{D_{\sigma}}^{n+1} |\mathbf{u}_{\sigma}^{n+1}|^2 - \rho_{D_{\sigma}}^n |\mathbf{u}_{\sigma}^n|^2 \right) + \frac{1}{2\delta t} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \left(\rho_K^{n+1} e(\rho_K^{n+1}) - \rho_K^n e(\rho_K^n) \right) \\ + \mu \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \mathcal{R}^{n+1} \leq 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

où $\mathcal{R}^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_{\sigma}| R_{\sigma}^{n+1} + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| R_K^{n+1} \geq 0$.

Enfin, en intégrant en temps (c'est-à-dire en multipliant par δt et en sommant sur n) on obtient un équivalent discret de l'inégalité d'énergie totale (intégrée sur $(0, t) \times \Omega$) satisfaite par les solutions régulières de (4.1)-(4.3) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho(t) e(\rho(t)) d\mathbf{x} + \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^d}^2 ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \rho_0 e(\rho_0) d\mathbf{x}, \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned}$$

Proposition 5.3.5 (Bilan d'énergie totale discret). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors toute solution du schéma implicite (5.24)-(5.25) satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout $1 \leq n \leq N$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_{\sigma}| \rho_{D_{\sigma}}^n |\mathbf{u}_{\sigma}^n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \rho_K^n e(\rho_K^n) + \mu \sum_{k=1}^n \delta t \|\mathbf{u}^k\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \bar{\mathcal{R}}^n \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_{\sigma}| \rho_{D_{\sigma}}^0 |\mathbf{u}_{\sigma}^0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \rho_K^0 e(\rho_K^0). \end{aligned} \quad (5.30)$$

où $\bar{\mathcal{R}}^n = \sum_{k=1}^n \delta t \mathcal{R}^k \geq 0$.

Grâce aux estimations d'énergie, on obtient des bornes sur la solution discrète $(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$ de l'étape de marche en temps (5.25). Un argument de point fixe de Brouwer (ou de degré topologique de Brouwer) permet alors de démontrer l'existence de solutions au schéma implicite (voir par exemple [102]). Cependant, bien que des solutions existent, la mise en œuvre pratique d'un tel schéma est exclue car il n'existe pas de méthodes numériques rapides et robustes permettant de résoudre un tel système non linéaire. C'est pourquoi d'autres discrétisations en temps sont utilisées en pratique dans les codes de calcul tels que le logiciel CALIF^{3S} [64].

5.3.2 Un schéma de type *prédiction-correction de pression*

Nous présentons à présent un schéma obtenu grâce à un découplage partiel des équations discrètes, et qui fait partie de la classe des schémas de prédiction-correction de pression. Il consiste (après une étape de remise à l'échelle du gradient de pression) en deux étapes. Dans une première étape, dite de prédiction, une vitesse provisoire est calculée en résolvant une équation de quantité de mouvement linéarisée dans laquelle le flux de masse convectif et le gradient de pression sont explicites. Puis, dans une seconde étape, un problème non linéaire sur la pression est résolu, et la vitesse est corrigée de manière à imposer une équation de conservation de la masse discrète. Le schéma s'écrit :

Initialisation :

On calcule les champs discrets initiaux $(\rho^{-1}, \mathbf{u}^0) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned}\rho_K^{-1} &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

On calcule le champ $\rho^0 \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ en résolvant un schéma implicite (linéaire) en ρ^0 :

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^0 - \rho_K^{-1}) + \text{div}(\rho^0 \mathbf{u}^0)_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}.\tag{5.32}$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, calculer $\rho^{n+1} \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ à travers les étapes :

Étape de mise à l'échelle du gradient de pression :

$$(\overline{\nabla p})_\sigma^n = \left(\frac{\rho_{D_\sigma}^n}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} \right)^{1/2} (\nabla p^n)_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.\tag{5.33a}$$

Étape de prédiction – Résoudre en $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_\sigma \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))_\sigma + (\overline{\nabla p})_\sigma^n = 0,\end{aligned}\quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.\tag{5.33b}$$

Étape de correction – Résoudre en $\rho^{n+1} \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\frac{1}{\delta t} \rho_{D_\sigma}^n (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + (\nabla p^{n+1})_\sigma - (\overline{\nabla p})_\sigma^n = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},\tag{5.33c}$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}.\tag{5.33d}$$

L'étape de prédiction consiste en un problème implicite linéaire en la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}$, dont on peut montrer facilement qu'il est bien posé quelle que soit la valeur du pas de temps δt . L'étape de correction quant à elle consiste en un problème de convection-diffusion sur la pression $p^{n+1} = \wp(\rho^{n+1})$, dont on peut montrer qu'il admet des solutions pour tout pas de temps δt par un argument de point fixe de Brouwer. Bien que non linéaire (à cause de la non linéarité de la loi de pression), l'algorithme de Newton permet de calculer de manière robuste des solutions à ce problème. Il est à noter que pour $\rho \equiv 1$, cet algorithme de prédiction-corrrection restitue exactement le schéma de correction de pression classique, très utilisé pour la discrétisation temporelle des équations de Navier-Stokes incompressibles.

Le schéma de correction de pression bénéficie de propriétés similaires à celles du schéma implicite. Comme la discrétisation de l'équation de masse (dans l'étape de correction) est identique à celle du schéma implicite, la positivité de la masse volumique est vérifiée, de même que l'équation de renormalisation discrète (5.28), et par conséquent une version discrète de l'équation d'énergie interne.

Le décalage en temps entre les masses volumiques (ρ^{n-1}, ρ^n) et les vitesses $(\mathbf{u}^n, \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})$ dans l'étape de prédiction permet d'utiliser une équation de conservation de la masse vérifiée sur les mailles duales (conséquence de l'étape de correction du pas de temps précédent et de la proposition 5.2.1) :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n - \rho_{D_\sigma}^{n-1}) + \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$$

pour démontrer une inégalité d'énergie cinétique pour l'étape de correction. En combinant cette inégalité avec la première étape dite de mise à l'échelle et avec la première équation de l'étape de correction, on peut démontrer le résultat suivant (voir [95]) :

Proposition 5.3.6 (Bilan d'énergie cinétique discret). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors le schéma de correction de pression (5.33) admet une solution qui satisfait une équation d'énergie cinétique discrète : pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, et $0 \leq n \leq N - 1$:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} \left(\rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\epsilon=D_\sigma|D'_\sigma} F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n) \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma'}^{n+1} \\ & - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))_\sigma \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} + (\nabla p^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + \frac{\delta t}{2} \left(\frac{|(\nabla p^{n+1})_\sigma|^2}{\rho_{D_\sigma}^n} - \frac{|(\nabla p^n)_\sigma|^2}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} \right) + R_\sigma^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\text{où } R_\sigma^{n+1} = \frac{1}{2\delta t} \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2.$$

En sommant les bilans d'énergie cinétique et d'énergie interne, on obtient là aussi un équivalent discret de l'inégalité d'énergie totale (intégrée sur Ω) :

Proposition 5.3.7 (Bilan d'énergie totale discret - local en temps). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors le schéma de correction de pression (5.33) admet une solution qui satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout $0 \leq n \leq N - 1$:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \left(\rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \left(\rho_K^{n+1} e(\rho_K^{n+1}) - \rho_K^n e(\rho_K^n) \right) \\ & + \mu \delta t \|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \frac{\delta t^2}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \left(\frac{|(\nabla p^{n+1})_\sigma|^2}{\rho_{D_\sigma}^n} - \frac{|(\nabla p^n)_\sigma|^2}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} \right) + \delta t \mathcal{R}^{n+1} \leq 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\text{où } \mathcal{R}^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} R_\sigma^{n+1} + \sum_{K \in \mathcal{M}} R_K^{n+1} \geq 0.$$

On a obtenu également un bilan d'énergie totale intégré en temps pour le schéma de correction de pression.

Proposition 5.3.8 (Bilan d'énergie totale discret). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors le schéma de correction de pression (5.33) admet une solution qui satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout $1 \leq n \leq N$:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \rho_K^n e(\rho_K^n) + \mu \sum_{k=1}^n \delta t \|\tilde{\mathbf{u}}^k\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \frac{\delta t^2}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{|D_\sigma|}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} |(\nabla p^n)_\sigma|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^{-1} |\mathbf{u}_\sigma^0|^2 + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \rho_K^0 e(\rho_K^0) + \frac{\delta t^2}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{|D_\sigma|}{\rho_{D_\sigma}^{-1}} |(\nabla p^0)_\sigma|^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\text{où } \bar{\mathcal{R}}^n = \sum_{k=1}^n \delta t \mathcal{R}^k \geq 0.$$

On déduit de ce résultat que tout comme le schéma implicite, le schéma de correction de pression est stable **sans condition sur le pas de temps** δt .

5.3.3 Un autre schéma semi-implicite

Considérons à présent un schéma aussi explicite que possible, obtenu en considérant une discrétisation implicite uniquement pour les termes permettant d'assurer la stabilité du schéma dans la limite incompressible, c'est-à-dire le flux de masse dans l'équation de continuité et le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement.

Initialisation :

On calcule les champs initiaux $(\rho^{-1}, \mathbf{u}^0) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \rho_K^{-1} &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

On calcule le champ $\rho^0 \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ en résolvant un schéma implicite :

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^0 - \rho_K^{-1}) + \text{div}(\rho^0 \mathbf{u}^0)_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (5.38)$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, résoudre en $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K \in \mathcal{M}, & (5.39a) \\ \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_\sigma^{\text{up}} & \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n))_\sigma + (\nabla p^{n+1})_\sigma &= 0, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. & (5.39b) \end{aligned} \right.$$

Ce schéma peut également se mettre sous la forme d'un schéma de correction de pression :

$$\left| \begin{aligned} \text{Étape de prédiction} - \text{Résoudre en } \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega) : \\ \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_\sigma^{\text{up}} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n))_\sigma &= 0, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. & (5.40a) \\ \text{Étape de correction} - \text{Résoudre en } \rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \text{ et } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega) : \\ \frac{1}{\delta t} \rho_{D_\sigma}^n (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + (\nabla p^{n+1})_\sigma &= 0, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, & (5.40b) \\ \frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K \in \mathcal{M}. & (5.40c) \end{aligned} \right.$$

Là encore, la discrétisation de l'équation de masse (dans l'étape de correction) étant identique à celle du schéma implicite et du schéma de prédiction-correction, la positivité de la masse volumique est vérifiée, de même que l'équation de renormalisation discrète (5.28), et par conséquent une version discrète de l'équation d'énergie interne.

Comme les termes de convection et de diffusion dans l'équation de quantité de mouvement sont explicites, on s'attend à ce que ce schéma soit stable sous une condition CFL de la forme $\delta t \lesssim (h_{\mathcal{D}}/|\mathbf{u}| + |\rho| h_{\mathcal{D}}^2/\mu)$, pourvu que les termes de convection soient calculés à l'aide d'un schéma *upwind*. Par conséquent, dans le cas particulier du schéma semi-implicite (5.39), le terme de convection dans l'équation de quantité de mouvement est défini par :

$$\mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_\sigma^{\text{up}} = \sum_{\epsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}) \mathbf{v}_\epsilon, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \quad (5.41)$$

où le flux à la face duale $\epsilon = D_\sigma | D'_\sigma$ est donné par : $\mathbf{v}_\epsilon = \mathbf{v}_\sigma$ si $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}) \geq 0$, et $\mathbf{v}_\epsilon = \mathbf{v}_{\sigma'}$ sinon.

Définition 5.3.1. On note \mathcal{A} la matrice de rigidité associée à la discrétisation des termes de diffusion (par les éléments finis de Crouzeix-Raviart ou de Rannacher-Turek). Il s'agit de la matrice carrée de taille $d\#\mathcal{E}_{\text{int}} \times d\#\mathcal{E}_{\text{int}}$ définie par blocs : $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{\sigma,\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_{\text{int}}}$, où pour tout $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, $\mathcal{A}_{\sigma,\sigma'}$ est la matrice de taille $d \times d$ donnée par :

$$\mathcal{A}_{\sigma,\sigma'} = \sum_{K \in \mathcal{M}} \left(\mu \int_K \nabla \zeta_\sigma \cdot \nabla \zeta_{\sigma'} \, d\mathbf{x} \, \mathbf{I}_d + (\mu + \lambda) \int_K \nabla \zeta_\sigma \otimes \nabla \zeta_{\sigma'} \, d\mathbf{x} \right), \quad (5.42)$$

où $(\zeta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}}$ sont les fonctions de formes. La matrice \mathcal{A} est une matrice symétrique, définie positive.

On a le résultat de stabilité suivant (voir [99]).

Proposition 5.3.9 (Inégalité d'énergie cinétique discrète). Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. Alors le schéma semi-implicite (5.39) admet une solution qui satisfait, pour tout $0 \leq n \leq N-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \left(\rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| (\nabla p^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \\ + \frac{\delta t}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{|D_\sigma|}{\rho_{D_\sigma}^n} |(\nabla p^{n+1})_\sigma|^2 + R_{\mathcal{E}}^{n+1} \leq 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

avec

$$R_{\mathcal{E}}^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \left(\frac{\rho_{D_\sigma}^n |D_\sigma|}{2\delta t} - \frac{1}{2} \sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} (F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n))^- - \frac{1}{4} \varrho(\mathcal{A}) \right) |\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2, \quad (5.44)$$

où $\varrho(\mathcal{A})$ est le rayon spectral de la matrice de rigidité associée à la discrétisation par éléments finis des termes de diffusion. Si la condition CFL suivante est vérifiée à chaque pas de temps

$$\delta t \leq \min_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{4\rho_{D_\sigma}^n |D_\sigma|}{2 \sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} (F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n))^- + \varrho(\mathcal{A})}, \quad (5.45)$$

alors $R_{\mathcal{E}}^{n+1} \geq 0$.

Remarque 5.3.1. La condition (5.45) est une condition CFL de type convective-diffusive. Elle est satisfaite sous la condition légèrement plus restrictive suivante :

$$\delta t \leq \min_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{\rho_{D_\sigma}^n |D_\sigma|}{\sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} (F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n))^-} \quad \text{et} \quad \delta t \leq \min_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{2\rho_{D_\sigma}^n |D_\sigma|}{\varrho(\mathcal{A})}.$$

La première condition est une condition CFL associée à la discrétisation par le schéma upwind explicite du terme de convection dans l'équation de quantité de mouvement ($F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n)$ est homogène à $h_{\mathcal{D}}^{d-1} \rho |\mathbf{u}|$ avec $h_{\mathcal{D}}$ le pas du maillage). La deuxième condition est une condition CFL diffusive associée à la discrétisation explicite des termes de diffusion. En effet, si les coefficients de Lamé μ et λ sont du même ordre, alors le rayon spectral de la matrice de rigidité se comporte comme $\mu h_{\mathcal{D}}^{d-2}$.

En sommant les bilans d'énergie cinétique et d'énergie interne, on obtient là aussi un équivalent discret de l'inégalité d'énergie totale (intégrée sur Ω) :

Proposition 5.3.10 (Bilan d'énergie totale discret - local en temps). Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. On suppose la condition CFL (5.45) vérifiée à chaque pas de temps. Alors le schéma semi-implicite (5.39) admet une solution qui satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout $0 \leq n \leq N-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \left(\rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \left(\rho_K^{n+1} e(\rho_K^{n+1}) - \rho_K^n e(\rho_K^n) \right) \\ + \frac{\delta t^2}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \frac{|(\nabla p^{n+1})_\sigma|^2}{\rho_{D_\sigma}^n} + \delta t \mathcal{R}^{n+1} \leq 0, \end{aligned} \quad (5.46)$$

où $\mathcal{R}^{n+1} = R_{\mathcal{E}}^{n+1} + \sum_{K \in \mathcal{M}} R_K^{n+1} \geq 0$.

On obtient également un bilan d'énergie totale intégré en temps pour ce deuxième schéma semi-implicite.

Proposition 5.3.11 (Bilan d'énergie totale discret). *Soit (ρ_0, \mathbf{u}_0) des données initiales dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $\rho_0 \geq 0$. On suppose la condition CFL (5.45) vérifiée à chaque pas de temps. Alors le schéma semi-implicite (5.39) admet une solution qui satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout $1 \leq n \leq N$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \rho_K^n e(\rho_K^n) + \frac{\delta t^2}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{|D_\sigma|}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} |(\nabla p^n)_\sigma|^2 \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^{-1} |\mathbf{u}_\sigma^0|^2 + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \rho_K^0 e(\rho_K^0) \end{aligned} \quad (5.47)$$

où $\bar{\mathcal{R}}^n = \sum_{k=1}^n \delta t \mathcal{R}^k \geq 0$.

Chapitre 6

Deux types de limites incompressibles pour les schémas sur grilles décalées

6.1 Schémas préservant l'asymptotique bas Mach	116
6.1.1 La limite incompressible pour le schéma implicite	117
6.1.2 La limite incompressible pour le schéma de correction de pression	120
6.1.3 La limite incompressible pour le deuxième schéma semi-implicite	121
6.2 Schémas numériques pour les modèles de congestion	123
6.2.1 La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour les solutions faibles	125
6.2.2 La limite de congestion dure pour le schéma de prédiction-corrrection de pression sur grilles décalées	127
6.2.3 Un cas test en dimension deux : collision de deux blocs denses	130

Les schémas numériques implicite ou semi-implicites sur grilles décalées décrits au chapitre précédent jouissent de propriétés leur permettant d'approcher de manière stable et consistante les solutions des modèles d'écoulements compressibles dans les régimes proches de l'incompressible :

1. La discrétisation temporelle est telle que les schémas sont stables sans restriction sur le pas de temps ou avec une restriction CFL s'appuyant sur la vitesse matérielle et non sur la vitesse des ondes acoustiques. En particulier, on dispose d'une inégalité d'énergie totale discrète fournissant des estimations sur les solutions discrètes.
2. La discrétisation spatiale vérifie une condition *inf-sup* discrète, propriété qui permet un contrôle de l'écart de la pression à sa moyenne à travers le contrôle du gradient de pression.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au caractère *asymptotic preserving* des schémas implicite ou semi-implicites sur grilles décalées, c'est-à-dire à la flèche rouge du diagramme de la Fig. 4.1. On étudie, à discrétisation fixée, la stabilité des solutions discrètes et le passage à la limite dans ces solutions pour deux limites incompressibles. La première limite est la limite classique où le nombre de Mach tend vers zéro dans la discrétisation pour les équations de Navier-Stokes adimensionnées. La deuxième limite est la limite d'un modèle de congestion dite *douce* (qui modélise un fluide compressible avec une contrainte maximale sur la densité) vers un modèle de congestion dite *dure* associant des zones compressibles (sans pression) où la contrainte de densité maximale n'est pas atteinte et des zones incompressibles où la densité maximale est atteinte.

Les travaux décrits dans ce chapitre font l'objet des publications suivantes :

- 1 R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « Low Mach number limit of a pressure correction MAC scheme for compressible barotropic flows ». In : *Finite Volumes for Complex Applications VIII-Methods and Theoretical Aspects : FVCA 8, Lille, France, June 2017 8*. Springer. 2017, p. 255-263.

- 2 R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « Low Mach number limit of some staggered schemes for compressible barotropic flows ». In : *Mathematics of Computation* 90.329 (2021), p. 1039-1087.
- 3 C. PERRIN et K. SALEH. « Numerical staggered schemes for the free-congested Navier-Stokes equations ». In : *SIAM J. Numer. Anal.* 60.4 (2022), p. 1824-1852.

6.1 Schémas préservant l'asymptotique bas Mach

Soit $T > 0$ et $\Omega \in \mathbb{R}^d$, avec $d \in \{2, 3\}$, un ouvert borné polygonal. On considère le système des équations de Navier-Stokes compressibles avec loi d'état barotrope, adimensionné et paramétré par le nombre de Mach $\varepsilon > 0$. Pour $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$:

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) = 0, \quad (6.1a)$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \otimes \mathbf{u}^\varepsilon) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla \wp(\rho^\varepsilon) = 0. \quad (6.1b)$$

La pression est donnée par une loi d'état de type gaz parfait

$$\wp(\rho) = \rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1. \quad (6.2)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses est tel que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}), \quad \mu > 0, \mu + \lambda > 0.$$

Enfin on complète le système (6.1) par une donnée initiale et des conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse :

$$\rho^\varepsilon|_{t=0} = \rho_0^\varepsilon > 0, \quad \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}_0^\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.3)$$

On montre que les solutions régulières, ainsi que les solutions faibles d'énergie finie et de renormalisation vérifient l'inégalité d'entropie relative suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^\varepsilon(t) |\mathbf{u}^\varepsilon(t)|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \Pi_\gamma(\rho^\varepsilon(t)) \, d\mathbf{x} + \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon(s)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)^d}^2 \, ds \\ + (\mu + \lambda) \int_0^t \|\operatorname{div}(\mathbf{u}^\varepsilon(s))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \, ds \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0^\varepsilon |\mathbf{u}_0^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \Pi_\gamma(\rho_0^\varepsilon) \, d\mathbf{x}, \quad \forall t \in (0, T) \end{aligned} \quad (6.4)$$

où la fonction Π_γ est définie par

$$\Pi_\gamma(\rho) = H(\rho) - H(1) - H'(1)(\rho - 1)$$

où l'énergie libre H est définie par $H(\rho) = \rho e(\rho)$, avec e l'énergie interne. Pour une loi d'état de type gaz parfait telle que définie en (6.2), la fonction H est une fonction convexe donnée par :

$$H(\rho) = \begin{cases} (\gamma - 1)^{-1} \rho^\gamma, & \text{si } \gamma > 1, \\ \rho \ln \rho, & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

Grâce à la convexité de H , on montre que la fonction $\Pi_\gamma(\rho)$ est une mesure de la distance entre ρ et la constante 1. On a en effet le résultat suivant (voir [99]) :

Proposition 6.1.1. *La fonction Π_γ vérifie les minoration suivantes :*

- Pour tout $\gamma \geq 1$ et $\delta > 0$, il existe $C_{\gamma, \delta} > 0$ tel que :

$$\Pi_\gamma(\rho) \geq C_{\gamma, \delta} |\rho - 1|^\gamma, \quad \forall \rho > 0 \text{ avec } |\rho - 1| \geq \delta, \quad (6.5a)$$

- Si $\gamma \geq 2$ alors $\Pi_\gamma(\rho) \geq |\rho - 1|^2, \quad \forall \rho > 0. \quad (6.5b)$

- Si $\gamma \in [1, 2)$ alors pour tout $R \in (2, +\infty)$, il existe $C_{\gamma, R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(\rho) &\geq C_{\gamma, R} |\rho - 1|^2, \quad \forall \rho \in (0, R), \\ \Pi_\gamma(\rho) &\geq C_{\gamma, R} |\rho - 1|^\gamma, \quad \forall \rho \in [R, \infty). \end{aligned} \quad (6.5c)$$

De plus, la fonction Π_γ vérifie la majoration suivante (pour les petites masse volumiques) : pour tout $\gamma \geq 1$ il existe C_γ tel que :

$$\Pi_\gamma(\rho) \leq C_\gamma |\rho - 1|^2, \quad \forall \rho \in (0, 2). \quad (6.6)$$

Dans toute la suite, on fixe $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation spatiale décalée au sens de la Définition (5.1.1) et $\delta t > 0$ un pas de temps, que l'on suppose donc constants. On suppose aussi que le temps final T est un multiple entier de δt , i.e. que $T = N\delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$. On note $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ l'approximation de la solution (ρ, \mathbf{u}) de (6.1)-(6.3) au temps $t_n = n\delta t$ pour $1 \leq n \leq N$, obtenu par l'un des trois schémas décrits au chapitre précédent. On étudie, pour ces trois schémas, le comportement de la solution dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

6.1.1 La limite incompressible pour le schéma implicite

Pour le schéma implicite, on suppose que la donnée initiale $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon)$ est *mal préparée* au sens suivant :

$$\begin{aligned} \rho_0^\varepsilon &\in \mathbf{L}^\infty(\Omega), & \rho_0^\varepsilon &> 0 \text{ p.p. dans } \Omega, & \mathbf{u}_0^\varepsilon &\in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} &\leq C, & \forall \varepsilon &> 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

De plus on suppose que \mathbf{u}_0^ε converge faiblement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ vers une fonction $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

On considère le schéma implicite suivant. Pour alléger la notation, on n'indique pas la dépendance de la solution du schéma par rapport au paramètre ε .

Initialisation :

On calcule les champs discrets initiaux $(\rho^0, \mathbf{u}^0) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ en posant :

$$\begin{aligned} \rho_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K &\in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall \sigma &\in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, on résout le système suivant d'inconnue $(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K &\in \mathcal{M}, & (6.9a) \\ \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma & \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1}))_\sigma + \frac{1}{\varepsilon^2} (\boldsymbol{\nabla} p^{n+1})_\sigma &= 0, & \forall \sigma &\in \mathcal{E}_{\text{int}}. & (6.9b) \end{aligned} \right.$$

Avant de donner le résultat de convergence du schéma lorsque que le nombre de Mach ε tend vers zéro, on introduit la pression désingularisée, qui est l'écart de la pression à sa moyenne divisée par ε^2 . Si $p^n = \wp(\rho^n) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \wp(\rho_K^n) \mathbb{1}_K$ est la pression au pas de temps n , on note

$$\delta p^n = \sum_{K \in \mathcal{M}} \delta p_K^n \mathbb{1}_K, \quad \text{avec} \quad \delta p_K^n = \frac{1}{\varepsilon^2} (\wp(\rho_K^n) - \bar{p}^n), \quad K \in \mathcal{M}$$

où \bar{p}^n est la moyenne de $\wp(\rho^n)$ sur Ω (i.e. $\bar{p}^n = |\Omega|^{-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \wp(\rho_K^n)$).

On a le résultat de convergence suivant pour la solution du schéma implicite lorsque le nombre de Mach tend vers zéro.

Théorème 6.1.2. Soit $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres (de Mach) positifs tendant vers zéro, et soit $(\rho^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de solutions associée du schéma numérique implicite (6.8)-(6.9). On suppose que la donnée initiale $(\rho_0^{\varepsilon^{(m)}}, \mathbf{u}_0^{\varepsilon^{(m)}})$ est mal préparée au sens de (6.7). Alors

1. La suite $(\rho^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^\infty((0, T), L^\gamma(\Omega))$ vers la fonction constante $\rho = 1$ lorsque m tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $q \in [1, \min(2, \gamma)]$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|\rho^{(m)} - 1\|_{L^\infty((0, T); L^q(\Omega))} \leq C\varepsilon^{(m)}, \quad \text{pour } m \text{ assez grand.}$$

2. Les suites $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\delta p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ sont bornées et quitte à extraire une sous-suite, la suite $(\delta p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\delta p, \mathbf{u}) \in (L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega))^{N+1}$ (pour toute norme) où $(\delta p, \mathbf{u})$ est solution d'un schéma numérique standard (Rannacher-Turek ou Crouzeix-Raviart) implicite pour les équations de Navier-Stokes incompressibles :

Initialisation :

On calcule $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ par :

$$\mathbf{u}_\sigma^0 = \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.10)$$

où \mathbf{u}_0 est la limite faible dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de \mathbf{u}_0^ε .

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\delta p^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ résoudre en $(\delta p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ le système discret suivant :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad (6.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1}))_\sigma + (\nabla \delta p^{n+1})_\sigma = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.11b)$$

La démonstration est très similaire à la démonstration de la limite incompressible pour les solutions faibles des équations de Navier-Stokes décrite au chapitre 4, à ceci près que, la discrétisation étant fixée, les solutions discrètes évoluent dans l'espace de dimension finie $(L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega))^{N+1}$. Les topologies y sont donc toutes équivalentes, avec des constantes de dominations qui certes peuvent dépendre de la discrétisation (et qui peuvent donc exploser lorsque les pas d'espace ou de temps tendent vers zéro) mais qui ici sont fixées. Ainsi, on évite toutes les difficultés dues à la convergence du terme non linéaire de convection faisant intervenir des limites faibles. La preuve repose donc essentiellement sur deux ingrédients :

1. L'établissement d'une estimation d'entropie relative, contrepartie discrète de l'estimation (6.4), permettant de montrer la convergence de la masse volumique et une borne sur la vitesse uniforme en ε .
2. Le contrôle de la pression désingularisée $\delta p^{(m)} = (\wp(\rho^{(m)}) - \bar{p}^{(m)})/\varepsilon^2$ (où $\bar{p}^{(m)}$ est la moyenne sur Ω de $p^{(m)} = \wp(\rho^{(m)})$) grâce à la condition *inf-sup* discrète vérifiée par la discrétisation sur grilles décalées.

Une adaptation directe au cas du système adimensionné (6.1)-(6.3) des estimations d'énergie énoncées au chapitre précédent permet en effet de montrer que toute solution du schéma numérique vérifie, pour tout $1 \leq n \leq N$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \mu \sum_{k=1}^n \delta t \|\mathbf{u}^k\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \Pi_\gamma(\rho_K^n) \\ \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^0 |\mathbf{u}_\sigma^0|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \Pi_\gamma(\rho_K^0), \end{aligned} \quad (6.12)$$

et on montre que si la donnée initiale $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon)$ est mal préparée, alors le second membre de cette inégalité est uniformément borné en ε . En particulier, on a $\Pi_\gamma = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dans $L^\infty(L^1)$. On déduit alors des propriétés de la fonction Π_γ (voir la Prop. 6.1.1) la convergence de la masse volumique vers la fonction constante égale à 1 et une borne sur la vitesse en norme $L^2(\mathbf{H}^1)$ discrète :

$$\|\rho^{(m)} - 1\|_{L^\infty((0,T);L^{\min(2,\gamma)}(\Omega))} \leq C\varepsilon^{(m)}, \quad \|\mathbf{u}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C.$$

Il reste alors à démontrer le contrôle, uniformément en ε de la pression désingularisée $\delta p = (\wp(\rho) - \overline{\wp(\rho)})/\varepsilon^2$. Ce contrôle découle de la condition *inf-sup* discrète. En effet, cette propriété implique qu'à chaque pas de temps n , il existe un champ de vitesse $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ qui satisfait $\|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}} = 1$ et tel que :

$$C(\Omega, \theta_0) \|\delta p^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K^n \operatorname{div}(\mathbf{v})_K = -\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| (\nabla p^n)_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma$$

où l'on a utilisé la dualité entre le gradient et la divergence discrets. En multipliant l'équation de quantité de mouvement (6.9b) par $|D_\sigma| \mathbf{v}_\sigma$ et en sommant sur $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, on obtient

$$\begin{aligned} C(\Omega, \theta_0) \|\delta p^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left| \frac{1}{\delta t} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| (\rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^{n-1}) \cdot \mathbf{v}_\sigma \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n))_\sigma \cdot \mathbf{v}_\sigma \right|. \end{aligned}$$

Il est alors possible de contrôler le membre de droite de façon uniforme en ε à l'aide des estimations sur la masse volumique et la vitesse discrètes déjà démontrées. On obtient alors que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur l'espace de dimension finie $L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ il existe une constante $C_{\mathcal{D},\delta t}$ dépendant de la discrétisation (et de la borne uniforme sur la donnée initiale) telle que :

$$\|\delta p^n\| \leq C_{\mathcal{D},\delta t}, \quad \forall 1 \leq n \leq N. \quad (6.13)$$

La suite $(\delta p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est donc bornée et on peut donc par le théorème de Bolzano-Weirstrass en extraire une sous suite, toujours notée $(\delta p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, qui converge vers un couple $(\delta p, \mathbf{u}) \in (L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega))^{N+1}$. En passant à la limite maille par maille dans le schéma numérique, on obtient le schéma (6.10)-(6.11).

Remarque 6.1.1. *L'estimation (6.13) indique que l'écart de la pression à sa moyenne est bien de l'ordre de ε^2 comme attendu. Il n'y a donc pas de perte de précision liée à une diffusion numérique trop importante comme on peut l'observer pour les schémas de type Godunov approchés.*

Remarque 6.1.2 (Limite incompressible du schéma sans termes de viscosité). *L'estimation (6.12) fournit un contrôle sur la suite des vitesses discrètes $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dans une norme $L^2(\mathbf{H}^1)$ discrète à condition que μ soit strictement positif. Cependant, même dans le cas du schéma pour les équations d'Euler où $\mu = \lambda = 0$, on peut déduire une borne uniforme sur $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dans n'importe quelle norme discrète. En effet, le maillage étant fixe, $\rho^{(m)} \rightarrow 1$ lorsque $m \rightarrow +\infty$ signifie que la masse volumique discrète $(\rho^{(m)})_K^n$ tend vers 1 dans chaque maille K et à chaque pas de temps n . Ainsi, par la partie énergie cinétique de l'estimation (6.12), il existe une densité minimale $\rho_{\min,\mathcal{D}} > 0$ dépendant du maillage fixe telle que $\|\mathbf{u}^{(m)}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \sqrt{\frac{2C}{\rho_{\min,\mathcal{D}}}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, où C est un majorant du membre de droite de (6.12), indépendant de ε . Par conséquent, le résultat du Théorème 6.1.2 est toujours valide pour les équations d'Euler : la solution du schéma compressible (6.9) (avec $\mu = \lambda = 0$ et des conditions aux limites de Neumann homogènes sur la vitesse) converge, lorsque le nombre de Mach tend vers zéro, vers la solution d'un schéma implicite stable (au sens où il vérifie une condition inf-sup discrète) pour les équations d'Euler incompressibles.*

6.1.2 La limite incompressible pour le schéma de correction de pression

On étudie à présent la limite incompressible du schéma semi-implicite de prédiction-correction de pression qui est le schéma utilisé en pratique dans le code de calcul CALIF³S [64]. On se donne donc une donnée initiale $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{u}_0^\varepsilon)$ que l'on suppose cette fois-ci bien préparée au sens suivant :

$$\begin{aligned} \rho_0^\varepsilon &\in L^\infty(\Omega), \quad \rho_0^\varepsilon > 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \mathbf{u}_0^\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C. \end{aligned} \quad (6.14)$$

On suppose également que \mathbf{u}_0^ε converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et faiblement dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ vers une fonction $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (ce qui est vrai à extraction d'une sous-suite près par l'estimation (6.14)).

On applique le schéma de prédiction-correction de pression au système adimensionné (6.10)-(6.11).

Initialisation :

On calcule les champs $(\rho^0, \mathbf{u}^0) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \rho_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{u}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\gamma(\mathbf{x}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

On calcule le champ $\rho^{-1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ en résolvant un schéma explicite *rétrograde* :

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^0 - \rho_K^{-1}) + \operatorname{div}(\rho^0 \mathbf{u}^0)_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (6.16)$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, calculer $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ à travers les étapes :

Mise à l'échelle du gradient de pression :

$$(\overline{\nabla p})_\sigma^n = \left(\frac{\rho_{D_\sigma}^n}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} \right)^{1/2} (\nabla p^n)_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.17a)$$

Étape de prédiction – Résoudre en $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_\sigma \\ - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))_\sigma + \frac{1}{\varepsilon^2} (\overline{\nabla p})_\sigma^n = 0, \end{aligned} \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.17b)$$

Étape de correction – Résoudre en $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\frac{1}{\delta t} \rho_{D_\sigma}^n (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + \frac{1}{\varepsilon^2} (\nabla p^{n+1})_\sigma - \frac{1}{\varepsilon^2} (\overline{\nabla p})_\sigma^n = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.17c)$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (6.17d)$$

On a le théorème de convergence suivant lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 6.1.3. Soit $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres (de Mach) positifs tendant vers zéro, et soit $(\rho^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de solutions associée du schéma numérique de correction de pression (6.15)-(6.16)-(6.17). On suppose que la donnée initiale $(\rho_0^{\varepsilon^{(m)}}, \mathbf{u}_0^{\varepsilon^{(m)}})$ est bien préparée au sens de (6.14). Alors

1. La suite $(\rho^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^\infty((0, T), L^\gamma(\Omega))$ vers la fonction constante $\rho = 1$ lorsque m tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $q \in [1, \min(2, \gamma)]$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|\rho^{(m)} - 1\|_{L^\infty((0, T); L^q(\Omega))} \leq C\varepsilon^{(m)}, \quad \text{pour } m \text{ assez grand.}$$

2. Les suites $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\delta p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Quitte à extraire une sous-suite, $(\delta p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\delta p, \mathbf{u}) \in (\mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega))^{N+1}$ (pour toute norme) où $(\delta p, \mathbf{u})$ est solution d'un schéma numérique de correction de pression standard (Rannacher-Turek ou Crouzeix-Raviart) pour les équations de Navier-Stokes incompressibles :

Initialisation :

On calcule $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ par :

$$\mathbf{u}_\sigma^0 = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\gamma(\mathbf{x}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.18)$$

où \mathbf{u}_0 est la limite dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de \mathbf{u}_0^ε .

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\delta p^n, \mathbf{u}^n) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ calculer $(\delta p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ à travers les étapes suivantes :

Étape de prédiction – Résoudre en $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\mathbf{u}^n \otimes \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_\sigma \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))_\sigma + (\nabla \delta p^n)_\sigma = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.19a)$$

Étape de correction – Résoudre en $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$:

$$\frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + (\nabla \delta p^{n+1})_\sigma - (\nabla \delta p^n)_\sigma = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.19b)$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (6.19c)$$

La preuve est similaire au cas implicite et repose sur l'estimation d'entropie relative pour la convergence de la masse volumique et l'estimation de la vitesse ainsi que sur la condition *inf-sup* discrète pour le contrôle de la pression. Notons cependant une différence avec le cas du schéma implicite. Le contrôle du membre de droite de l'inégalité d'entropie relative discrète (voir (5.36)) nécessite un contrôle du gradient de pression au pas de temps $n = 0$ en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ainsi qu'un contrôle de la masse volumique au pas de temps $n = -1$. C'est ce qui justifie que l'on suppose ici des données initiales bien préparées ainsi que l'initialisation particulière du schéma (6.15)-(6.16). On renvoie à [99] pour les détails de la preuve. Mentionnons que là aussi, on a $p - \bar{p} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et que la preuve reste valide pour les équations d'Euler, c'est-à-dire pour $\mu = \lambda = 0$.

6.1.3 La limite incompressible pour le deuxième schéma semi-implicite

On considère à présent la limite incompressible pour le deuxième schéma semi-implicite introduit au chapitre précédent. Dans le cas de ce schéma, on peut affaiblir les conditions sur les données initiales

bien préparées. On requiert toujours que la divergence de la vitesse initiale soit petite, en revanche, la masse volumique initiale est proche d'une constante à un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ près (et non $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$). On suppose donc que :

$$\begin{aligned} \rho_0^\varepsilon &\in L^\infty(\Omega), \quad \rho_0^\varepsilon > 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \mathbf{u}_0^\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\rho_0^\varepsilon - 1\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C. \end{aligned} \quad (6.20)$$

On suppose également que \mathbf{u}_0^ε converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et faiblement dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ vers une fonction $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (ce qui est vrai à extraction d'une sous-suite près par l'estimation (6.20)).

Le schéma s'écrit :

Initialisation :

On calcule les champs $(\rho^0, \mathbf{u}^0) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \rho_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{u}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\gamma(\mathbf{x}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

On calcule le champ $\rho^{-1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ en résolvant un schéma explicite *rétrograde* :

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^0 - \rho_K^{-1}) + \operatorname{div}(\rho^0 \mathbf{u}^0)_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (6.22)$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N-1$, connaissant $(\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, résoudre en $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K \in \mathcal{M}, & (6.23a) \\ \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \operatorname{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_\sigma^{\text{up}} & \\ - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n))_\sigma + \frac{1}{\varepsilon^2} (\nabla p^{n+1})_\sigma &= 0, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. & (6.23b) \end{aligned} \right.$$

Comme on l'a vu au chapitre précédent, ce schéma numérique vérifie une inégalité d'énergie totale sous la contrainte d'une condition CFL dictée par la convection par la vitesse matérielle et par la diffusion :

$$\delta t \leq \min_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{4 \rho_{D_\sigma}^n |D_\sigma|}{2 \sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} (F_{\sigma,\epsilon}(\rho^n, \mathbf{u}^n))^- + \varrho(\mathcal{A})}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (6.24)$$

où $\varrho(\mathcal{A})$ est le rayon spectral de la matrice de rigidité associée à la discrétisation par éléments finis des termes de diffusion. Afin de passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ à discrétisation **fixée**, il est nécessaire de supposer qu'il existe un pas de temps $\delta t > 0$ qui vérifie cette condition CFL pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui n'est pas évident puisque la contrainte CFL fait intervenir la vitesse solution du schéma $(\mathbf{u}^n)_{0 \leq n \leq N-1}$, qui dépend elle-même de ε . Néanmoins, on peut démontrer qu'un tel pas de temps existe. On renvoie à l'annexe de [99] pour les détails de la preuve.

On a le résultat de convergence suivant (qui est également vrai pour $\mu = \lambda = 0$) :

Théorème 6.1.4. *Soit $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres (de Mach) positifs tendant vers zéro, et soit $(\rho^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de solutions associée du schéma numérique (6.21)-(6.22)-(6.23). On suppose que la donnée initiale $(\rho_0^{\varepsilon^{(m)}}, \mathbf{u}_0^{\varepsilon^{(m)}})$ vérifie (6.20), et que le pas de temps δt vérifie la condition CFL (6.24) pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors :*

1. La suite $(\rho^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^\infty((0, T), L^\gamma(\Omega))$ vers la fonction constante $\rho = 1$ lorsque m tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $q \in [1, \min(2, \gamma)]$, il existe $C > 0$ tel que :

$$\|\rho^{(m)} - 1\|_{L^\infty((0, T); L^q(\Omega))} \leq C\varepsilon^{(m)}, \quad \text{pour } m \text{ assez grand.}$$

2. Les suites $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\delta p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Quitte à extraire une sous-suite, $(\delta p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\delta p, \mathbf{u}) \in (L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega))^{N+1}$ (pour toute norme) où $(\delta p, \mathbf{u})$ est solution du schéma numérique suivant pour les équations de Navier-Stokes incompressibles :

Initialisation :

On calcule $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ par :

$$\mathbf{u}_\sigma^0 = \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.25)$$

où \mathbf{u}_0 est la limite dans $L^2(\Omega)$ de \mathbf{u}_0^ε .

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\delta p^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$, résoudre en $\delta p^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ le système suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \end{array} \right. \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad (6.26a)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_\sigma^{\text{up}} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n))_\sigma + (\nabla \delta p^{n+1})_\sigma = 0, \end{array} \right. \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.26b)$$

6.2 Schémas numériques pour les modèles de congestion

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$. On considère sur $(0, T) \times \Omega$ le modèle d'écoulement suivant appelé modèle de *congestion dure* :

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (6.27a)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad (6.27b)$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad (1 - \rho)p = 0, \quad p \geq 0, \quad (6.27c)$$

où $\rho \geq 0$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$ sont respectivement la densité et la vitesse du fluide, et où le champ $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)^T$ est un champ de force volumique extérieure. Le tenseur des contraintes est donné par

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\text{div} \mathbf{u}) \quad \mu > 0, \quad \mu + \lambda > 0.$$

Ce modèle, qui fut introduit pour la première fois dans [60] à partir d'un modèle diphasique dans la limite $\rho_{\text{gas}}/\rho_{\text{liq}} \rightarrow 0$, est un modèle hybride, qui autorise la coexistence de zones compressibles sans pression dites zones *libres* où la densité vérifie $0 \leq \rho < 1$ et de zones dites *saturées* où la densité est maximale égale à 1 et où la pression peut être non nulle. Dans ces zones, la dynamique est régie par les équations de Navier-Stokes incompressibles (l'équation de conservation de la masse donne $\text{div} \mathbf{u} = 0$ dans les zones $\{\rho = 1\}$, si $\text{div} \mathbf{u} \neq 0$, la densité peut dépasser la valeur maximale 1) et la pression p , qui ne s'active que dans les zones saturées peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle sur la vitesse.

Très peu de méthodes numériques ont été proposées pour approcher les solutions du système (6.27). La difficulté principale résidant dans le fait qu'il s'agit là d'un problème de frontière libre où aucune

information n'est disponible sur l'interface entre les zones libres et les zones saturées (pas de dynamique explicite, aucune condition de transmission imposée). Mentionnons toutefois l'étude [60], qui présente en une dimension d'espace une méthode numérique basée sur une approximation par "sticky blocks" de la dynamique de (6.27), et les travaux [106] et [113] (limités au cas unidimensionnel) qui reposent sur une projection de la dynamique sur un ensemble de trajectoires admissibles. Cependant, ces trois articles ne traitent que du cas des écoulements non visqueux $\mu = \lambda = 0$ dans un cadre unidimensionnel.

L'idée, développée dans [62] dans le cas unidimensionnel, puis dans [114] dans le cas multidimensionnel, est alors d'approcher le modèle (6.27) par un modèle complètement compressible. La contrainte de pression incompressible ($p = 0$ dans les zones $\{\rho < 1\}$ et $p \geq 0$ dans les zones $\{\rho = 1\}$) est relaxée en une loi de pression compressible singulière de la forme suivante

$$p_\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \varepsilon \frac{\rho^\gamma}{(1-\rho)^\beta}, & \text{si } 0 \leq \rho < 1, \\ +\infty, & \text{si } \rho = 1. \end{cases} \quad \text{avec } \gamma, \beta > 1. \quad (6.28)$$

En raison de la singularité de la pression en $\rho = 1$, la pression (6.28) joue un rôle de barrière qui empêche la densité de dépasser la valeur critique 1 :

$$0 \leq \rho_\varepsilon(t, \mathbf{x}) < 1 \quad \text{p.p.t. } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega. \quad (6.29)$$

À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la pression p_ε tend vers un potentiel p qui ne s'active que lorsque la densité est maximale, égale à 1. On a alors, à la limite, la *contrainte d'exclusion* suivante : $(1 - \rho)p = 0$ (voir la Fig. 6.1).

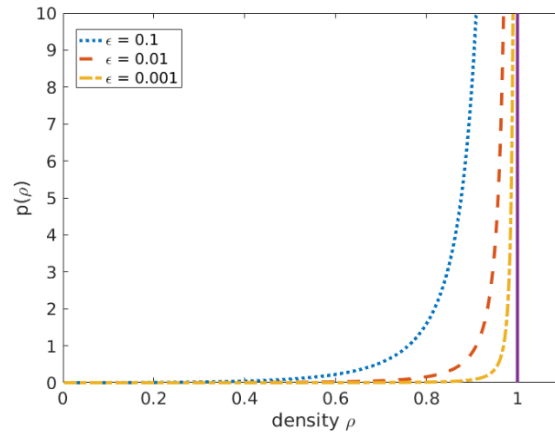


FIGURE 6.1 – Évolution de la pression singulière $\rho \mapsto p_\varepsilon(\rho)$ en fonction de ε .

Le modèle compressible sensé relaxer vers le modèle de congestion dure (6.27) dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ est alors le modèle de Navier-Stokes compressible barotrope pour lequel la loi de pression est donnée par (6.28). Il est donné sur $(0, T) \times \Omega$ par :

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) = 0, \quad (6.30a)$$

$$\partial_t(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) + \mathbf{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}_\varepsilon)) = \mathbf{f}. \quad (6.30b)$$

On complète le système (6.30) par une condition initiale et des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la vitesse :

$$\rho_\varepsilon|_{t=0} = \rho_0^\varepsilon, \quad (\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)|_{t=0} = \mathbf{q}_0^\varepsilon, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.31)$$

avec $\mathbf{q}_\varepsilon^0 \mathbf{1}_{\rho_0^\varepsilon=0} = 0$ p.p. dans Ω . Dans la suite, le modèle (6.31) sera appelé modèle de *congestion douce*. L'existence de solutions faibles au système (6.30)-(6.31) vérifiant la contrainte (6.29) et la convergence

de ces solutions vers des solutions du modèle de congestion dure (6.27) dans la limite singulière $\varepsilon \rightarrow 0$ a été prouvée dans [62] par Bresch, Perrin et Zatorska dans le cas unidimensionnel puis par Perrin et Zatorska dans [114] dans le cas multidimensionnel. Tout comme pour la limite bas Mach, le résultat de convergence s'appuie sur des estimations d'énergie, et des arguments de compacité classique dans le cadre des équations de Navier-Stokes compressibles. La condition *inf-sup* (ou l'opérateur de Bogovskii) y joue un rôle crucial dans le contrôle de la pression dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Tout comme pour la limite bas Mach, on démontre que la vitesse limite vérifie la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

D'un point de vue numérique, on rencontre des difficultés similaires à celles liées à la limite bas Mach. D'une part, on observe que la condition CFL associée à un schéma entièrement explicite dégénère lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les régions denses. En effet, la vitesse de propagation des ondes acoustiques $c_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = \sqrt{p'_\varepsilon(\rho_\varepsilon)}$, explose lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\rho_\varepsilon \rightarrow 1$. Un schéma numérique stable sous une condition CFL basée sur les ondes acoustiques ne permet donc pas d'approcher les solutions dans le régime $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans le cadre du modèle de congestion douce non visqueux, les auteurs de [70] proposent un schéma de volumes finis (Rusanov) où la pression est séparée en une partie bornée, traitée explicitement, et une partie implicite qui porte la singularité près de $\rho = 1$. Cette technique permet de contourner la dégénérescence de la condition CFL dans les régions denses. La viscosité physique est prise en compte dans l'étude plus récente [69] (qui traite également d'une contrainte de congestion variable), avec une discrétisation spatiale par volumes finis. Néanmoins, en raison de l'arrangement colocalisé des inconnues discrètes, l'analyse de ces schémas est assez éloignée de l'analyse des équations continues sous-jacentes réalisée dans [114]. En particulier, aucune estimation uniforme en ε de la pression discrète ne semble disponible dans [68], puisque les discrétisations spatiales colocalisées ne vérifient par un équivalent discret de la condition *inf-sup*.

6.2.1 La limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour les solutions faibles

Dans cette section on rappelle les résultats théoriques obtenus dans [114] concernant l'existence de solutions au modèle de congestion douce (6.30) et leur comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On présente également les principaux outils utilisés dans la démonstration de ces résultats, des outils qui seront adaptés ensuite au cadre discret.

Tout d'abord, on introduit l'énergie libre H_ε associée à la pression p_ε :

$$H'_\varepsilon(r)r - H_\varepsilon(r) = p_\varepsilon(r). \quad (6.32)$$

Le choix de pression (6.28) garantit que la fonction $r \mapsto H_\varepsilon(r)$ est convexe. Soit $T > 0$ et $\mathbf{f} \in L^2((0, T) \times \Omega)^d$. On suppose que la donnée initiale $(\rho_0^\varepsilon, \mathbf{q}_0^\varepsilon = \rho_0^\varepsilon \mathbf{u}_0^\varepsilon)$ est telle que :

$$0 \leq \rho_0^\varepsilon < 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \bar{\rho}_0^\varepsilon := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \rho^* < 1, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{q}_0^\varepsilon \mathbb{1}_{\rho_0^\varepsilon=0} = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \int_\Omega \left[\frac{|\mathbf{q}_0^\varepsilon|^2}{2\rho_0^\varepsilon} + H_\varepsilon(\rho_0^\varepsilon) \right] \leq E_0, \quad (6.34)$$

pour certains $\rho^*, E_0 > 0$ indépendants de ε .

On a le résultat suivant :

Théorème 6.2.1 (Perrin & Zatorska [114]). *On suppose que la loi de pression est donnée par (6.28) avec $\beta > 3$. On suppose également que la donnée initiale vérifie (6.33)-(6.34). Alors :*

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution faible globale d'énergie finie $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ au système (6.30)-(6.31).
- Il existe une sous-suite encore notée $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon(\rho_\varepsilon))_\varepsilon$ qui converge vers (ρ, \mathbf{u}, p) une solution faible globale de (6.27) avec des conditions aux limites identiques à (6.31). Plus précisément : pour tout $T > 0$, $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ fortement dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty)$, $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$ faiblement dans $L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega))$, $p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \rightharpoonup p$ faiblement dans $\mathcal{M}_+((0, T) \times \Omega)$.

Schéma de la preuve. Pour la construction de solutions faibles globales $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ à $\varepsilon > 0$ fixé, la première étape consiste en la définition d'un problème approché en introduisant un paramètre de coupure $\delta \in (0, 1)$ et une loi de pression approchée $p_{\varepsilon, \delta}$ comme suit :

$$p_{\varepsilon, \delta}(\rho) = \begin{cases} p_\varepsilon(\rho), & \text{si } 0 \leq \rho \leq 1 - \delta, \\ \varepsilon \delta^{-\beta} \rho^\gamma, & \text{si } \rho > 1 - \delta. \end{cases} \quad (6.35)$$

À $\delta > 0$ fixé et pour les grandes valeurs de ρ , $p_{\varepsilon, \delta}(\rho)$ se comporte comme une loi de pression de type gaz parfait. À $\delta > 0$ fixé, l'existence de solutions faibles globales $(\rho_{\varepsilon, \delta}, \mathbf{u}_{\varepsilon, \delta})$ est assurée par la théorie classique développée par Lions et Feireisl (voir par exemple [110]). Les solutions satisfont l'inégalité d'énergie :

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_{\varepsilon, \delta} |\mathbf{u}_{\varepsilon, \delta}|^2}{2} + H_{\varepsilon, \delta}(\rho_{\varepsilon, \delta}) \right] dx \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon, \delta}|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon, \delta})^2 \right] dx dt \leq C(1 + \|\mathbf{f}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}^2),$$

pour une constante positive C ne dépendant que de la donnée initiale et de la viscosité, mais indépendante de ε et de δ . En particulier, on obtient un contrôle de l'énergie libre $H_{\varepsilon, \delta}$ associée à la pression tronquée $p_{\varepsilon, \delta}$:

$$\|H_{\varepsilon, \delta}(\rho_{\varepsilon, \delta})\|_{L^\infty((0, T); L^1(\Omega))} \leq C \quad \text{pour } C > 0 \text{ indépendante de } \varepsilon, \delta.$$

Des arguments classiques basés sur la compacité du *flux effectif* permettent de passer à la limite $\delta \rightarrow 0$ dans la formulation faible des équations en assurant la convergence forte de la suite $(\rho_{\varepsilon, \delta})_{\delta > 0}$ vers une limite ρ_ε . On montre que la suite $(p_{\varepsilon, \delta}(\rho_{\varepsilon, \delta}))_{\delta > 0}$ est équi-intégrable sous la condition $\beta > 3$ et qu'elle converge (fortement) dans $L^1((0, T) \times \Omega)$ vers $p_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$. Enfin, en revenant au contrôle de l'énergie libre $H_{\varepsilon, \delta}$, on démontre que

$$\text{mesure} \{ \rho_{\varepsilon, \delta} \geq 1 - \delta \} \leq C(\varepsilon) \delta^{\beta-1}.$$

En conséquence de cette inégalité, on garantit la contrainte de densité maximale sur la limite ρ_ε : $0 \leq \rho_\varepsilon < 1$ p.p. dans $(0, T) \times \Omega$. La deuxième étape de la preuve consiste à passer à la limite par rapport au paramètre ε . Grâce à l'inégalité d'énergie :

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2}{2} + H_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \right] dx \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)^2 \right] dx dt \leq C(1 + \|\mathbf{f}\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}^2), \quad (6.36)$$

la vitesse $(\mathbf{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est contrôlée dans $L^2((0, T); \mathbf{H}^1(\Omega))$, tandis que la densité $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est automatiquement contrôlée dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$ grâce à la contrainte de densité maximale. Le contrôle de la pression $p_\varepsilon(\rho_\varepsilon)$ découle de l'utilisation de l'opérateur de *Bogovskii*, \mathcal{B} . En prenant $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathcal{B}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) \in \mathbf{H}^1((0, T); \mathbf{W}_0^{1, q}(\Omega))$ ($1 \leq q < +\infty$ pour $d = 2$, $q = 6$ pour $d = 3$) comme fonction test dans la formulation faible de (6.30b), on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathcal{B}(\partial_t \rho_\varepsilon) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \mathbf{v}_\varepsilon dx dt \\ \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon : \nabla \mathbf{v}_\varepsilon dx dt + (\lambda + \mu) \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon dx dt \\ - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_\varepsilon dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) (\rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) dx dt.$$

Grâce aux propriétés de continuité de l'opérateur de Bogovskii ([110], Lemme 3.17), l'inégalité d'énergie et le contrôle de la densité assurent que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est borné et donc :

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) (\rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) dx dt \right| \leq C \quad \text{pour } C > 0 \text{ indépendante de } \varepsilon.$$

Cette estimation permet alors de montrer que $(p_\varepsilon(\rho_\varepsilon))_\varepsilon$ est contrôlée dans $L^1((0, T) \times \Omega)$. Il existe alors ρ, \mathbf{u} et p tels que $\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho$ faiblement- $*$ dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$, $\mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}$ faiblement dans $L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega))$, $p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \rightharpoonup p$ faiblement dans $\mathcal{M}_+((0, T) \times \Omega)$, et (ρ, \mathbf{u}, p) est une solution au sens des distributions des équations de Navier-Stokes compressibles sans contrainte (6.27a)-(6.27b). Ensuite, on peut montrer la convergence forte de $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout $1 \leq q < +\infty$ en utilisant les concepts de flux effectif et de solutions renormalisées (voir [110, 79]). Enfin, la justification de la relation d'exclusion $(1 - \rho)p = 0$ est réalisée en deux étapes. D'une part, la convergence forte de $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ implique que

$$(1 - \rho_\varepsilon)p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) \longrightarrow (1 - \rho)p \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

D'autre part, on a

$$(1 - \rho_\varepsilon)p_\varepsilon(\rho_\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{\beta}} \rho_\varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}} (p_\varepsilon(\rho_\varepsilon))^{\frac{\beta-1}{\beta}} \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^{\frac{\beta}{\beta-1}}((0, T) \times \Omega).$$

Ainsi, la limite (ρ, p) satisfait $0 \leq \rho \leq 1$ presque partout, $(1 - \rho)p = 0$ dans \mathcal{D}' , et $p \in \mathcal{M}_+((0, T) \times \Omega)$. \square

6.2.2 La limite de congestion dure pour le schéma de prédiction-corrrection de pression sur grilles décalées

Au vu des résultats obtenus par les schémas semi-implicites sur grilles décalées dans la limite bas Mach, on se propose d'utiliser ces schémas pour approcher les solutions du système de congestion douce (6.30)-(6.31). Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on s'attend à obtenir une approximation stable et consistante du modèle de congestion dure (6.27).

On se donne donc un second membre $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2((0, T) \times \Omega)$ et une condition initiale qui vérifie

$$\rho_0^\varepsilon \in L^\infty(\Omega), \quad \rho_0^\varepsilon \in (0, 1), \quad \bar{\rho}_0^\varepsilon = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho_0^\varepsilon \, d\mathbf{x} \leq \rho^* < 1, \quad \mathbf{u}_0^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (6.37)$$

$$\|\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p_\varepsilon(\rho_0^\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} + \|(1 - \rho_0^\varepsilon)^{-1}[\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon]_-\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Remarque 6.2.1.

1. Ces conditions sont spécifiques au schéma de correction de pression. L'analyse peut être faite également dans le cas du schéma implicite pour lequel seules les conditions (6.33)-(6.34) sont nécessaires (voir [112]).
2. Le contrôle de la pression initiale en norme L^1 implique en fait que la densité initiale vérifie $1 - \rho_0^\varepsilon \geq C_0 \varepsilon^{\frac{1}{\beta}}$ pour une constante C_0 indépendante de ε , ce qui est plus restrictif que le contrôle de l'énergie libre initiale $H_\varepsilon(\rho_0^\varepsilon)$ dans $L^1(\Omega)$.
3. La condition sur la divergence de la vitesse initiale indique que la compression initiale $([\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon]_-)$ est petite dans les zones denses où ρ_0^ε est proche de 1.

On se donne une discrétisation sur grilles décalées $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ au sens de la Définition 5.1.1 et un pas de temps $\delta t > 0$. On suppose que le temps final T est un multiple entier de δt , i.e. que $T = N\delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$. On note $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ l'approximation de la solution (ρ, \mathbf{u}) de (6.30)-(6.31) au temps $t_n = n\delta t$ pour $1 \leq n \leq N$. Le schéma de correction de pression s'écrit :

Discrétisation du second membre :

$$\mathbf{f}_\sigma^n = \frac{1}{\delta t} \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{D_\sigma} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (6.38)$$

Initialisation :

On calcule les champs $(\rho^{-1}, \mathbf{u}^0) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} \rho_K^{-1} &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \mathbf{u}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\gamma(\mathbf{x}), & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

On calcule le champ $\rho^0 \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ en résolvant un schéma implicite :

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^0 - \rho_K^{-1}) + \text{div}(\rho^0 \mathbf{u}^0)_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (6.40)$$

Marche en temps :

Pour $0 \leq n \leq N - 1$, connaissant $(\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, calculer $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ à travers les étapes :

Mise à l'échelle du gradient de pression :

$$(\overline{\nabla p_{\varepsilon, \mathcal{M}}})_\sigma^n = \left(\frac{\rho_{D_\sigma}^n}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} \right)^{1/2} (\nabla p_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho^n))_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.41a)$$

Étape de prédiction – Résoudre en $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^n \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^{n-1} \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_\sigma \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}))_\sigma + (\overline{\nabla p_{\varepsilon, \mathcal{M}}})_\sigma^n = \mathbf{f}_\sigma^{n+1}, \end{aligned} \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.41b)$$

Étape de correction – Résoudre en $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$:

$$\frac{1}{\delta t} \rho_{D_\sigma}^n (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^{n+1}) + (\nabla p_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho^{n+1}))_\sigma - (\overline{\nabla p_{\varepsilon, \mathcal{M}}})_\sigma^n = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (6.41c)$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}. \quad (6.41d)$$

La pression utilisée dans le gradient de pression discret est une pression tronquée définie par

$$p_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho) = \begin{cases} \varepsilon \frac{\rho^\gamma}{(1-\rho)^\beta} & \text{si } \rho \leq 1 - \delta_{\varepsilon, \mathcal{M}}, \\ \varepsilon^{-\frac{1}{\beta-1}} h_{\mathcal{D}}^{-\alpha\beta} \rho^\gamma & \text{si } \rho > 1 - \delta_{\varepsilon, \mathcal{M}}, \end{cases} \quad (6.42)$$

avec $\delta_{\varepsilon, \mathcal{M}} = h_{\mathcal{D}}^\alpha \varepsilon^{\frac{1}{\beta-1}}$ et α un paramètre choisi tel que $\alpha(\beta-1) > d$. Lorsque le pas du maillage $h_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$ à ε fixé, cette pression tronquée restitue la pression du modèle de congestion douce (6.28), tandis que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à discrétisation fixée, on retrouve le potentiel p nul pour $\rho \in [0, 1)$ et qui ne s'active que lorsque la densité est égale à 1. Cette pression tronquée est très similaire à la pression tronquée (6.35) introduite dans [114] pour la construction des solutions faibles du modèle (6.30)-(6.31). À cette loi de pression tronquée, on associe une énergie libre $H_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho)$ solution de

$$\rho H'_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho) - H_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho) = p_{\varepsilon, \mathcal{M}}(\rho), \quad \rho \in [0, 1)$$

qui est une fonction convexe.

On montre que le schéma de correction de pression vérifie l'estimation d'énergie totale suivante :

Proposition 6.2.2 (Inégalité d'énergie totale). *On suppose que la donnée initiale vérifie (6.37). Alors il existe une solution $(\rho_\varepsilon^n, \mathbf{u}_\varepsilon^n)_{0 \leq n \leq N}$ du schéma (6.38)-(6.39)-(6.41). De plus, il existe $C > 0$ indépendante de ε telle que, pour ε suffisamment petit et pour tout $1 \leq n \leq N$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^{n-1} |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^n \delta t \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^k\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| H_{\varepsilon,\mathcal{M}}(\rho_K^n) \\ + \frac{\delta t^2}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \frac{|D_\sigma|}{\rho_{D_\sigma}^{n-1}} |(\nabla p_{\varepsilon,\mathcal{M}}(\rho_\varepsilon^n))_\sigma|^2 \leq C. \end{aligned} \quad (6.43)$$

L'estimation dans $L^\infty(L^1)$ de l'énergie libre tronquée $H_{\varepsilon,\mathcal{M}}(\rho)$ permet alors de démontrer, comme pour le modèle continu, que la densité vérifie une contrainte de saturation maximale.

Proposition 6.2.3 (Contrainte de saturation sur la densité). *On suppose que le paramètre α est tel que $\alpha(\beta - 1) > d$. Il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in (0, h_0)$, il existe une constante $C_{\mathcal{M}} > 0$ indépendante de ε (mais pas de la discrétisation), telle que*

$$\rho_K^n \leq 1 - \delta_{\varepsilon,\mathcal{M}} \leq 1 - C_{\mathcal{M}} \varepsilon^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}. \quad (6.44)$$

Enfin, grâce à la condition inf-sup discrète (plus précisément grâce à l'opérateur de Bogovskii discret) on montre une estimation L^1 sur la pression.

Proposition 6.2.4 (Contrôle de la pression). *On suppose que la donnée initiale vérifie (6.37). Alors pour tout $1 \leq n \leq N$ on a :*

$$\|p_{\varepsilon,\mathcal{M}}(\rho_\varepsilon^n)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_{\mathcal{M},\delta t}, \quad (6.45)$$

où $C_{\mathcal{M},\delta t} > 0$ est indépendante de ε .

On déduit grâce aux estimations ci-dessus qu'il existe ε_0 tel que les suites $(\rho_\varepsilon^n)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$, $(p_{\varepsilon,\mathcal{M}}(\rho_\varepsilon^n))_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ et $(\mathbf{u}_\varepsilon^n)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty(\Omega)$, $L^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$. Étant donné que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, ces suites sont bornées dans n'importe quelle norme. On conclut qu'il existe ρ, p, \mathbf{u} tels qu'à extraction près, on ait, pour tout $0 \leq n \leq N$:

$$\rho_\varepsilon^n \rightarrow \rho^n, \quad p_{\varepsilon,\mathcal{M}}(\rho_\varepsilon^n) \rightarrow p^n, \quad \mathbf{u}_\varepsilon^n \rightarrow \mathbf{u}^n, \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

dans n'importe quelle norme discrète. En conséquence de (6.44), il est facile de voir que la contrainte de densité maximale est vérifiée à la limite :

$$0 \leq \rho_K^n \leq 1, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall 0 \leq n \leq N. \quad (6.46)$$

On a également que $p^n \geq 0$. De plus, puisque sur chaque maille $K \in \mathcal{M}$ nous avons

$$(1 - (\rho_\varepsilon^n)_K) p_{\varepsilon,\mathcal{M}}((\rho_\varepsilon^n)_K) = \varepsilon \frac{(\rho_\varepsilon^n)_K^\gamma}{(1 - (\rho_\varepsilon^n)_K)^{\beta-1}} = \varepsilon^{\frac{1}{\beta}} (\rho_\varepsilon^n)_K^{\frac{\gamma}{\beta}} (p_{\varepsilon,\mathcal{M}}((\rho_\varepsilon^n)_K))^{\frac{\beta-1}{\beta}},$$

on obtient que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(1 - \rho_K^n) p_K^n = 0 \quad \text{où} \quad p_K^n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{\varepsilon,\mathcal{M}}((\rho_\varepsilon^n)_K).$$

Remarque 6.2.2.

1. Tout comme pour la limite bas Mach, les résultats restent valables sans termes de viscosité (c'est-à-dire pour $\mu = \lambda = 0$).
2. Une analyse similaire peut être faite dans le cas du schéma implicite. On renvoie à [112] pour les détails.

3. La troncature de la pression est en fait un artifice technique qui garantit l'existence d'une solution numérique aux schémas. L'estimation (6.44) indique que la densité de troncature $1 - \delta_{\varepsilon, \mathcal{M}}$ n'est en fait jamais atteinte à condition que la densité initiale soit inférieure à $1 - \delta_{\varepsilon, \mathcal{M}}$. En pratique, on peut donc conserver la loi de pression originale (6.28). C'est ce qui est fait dans les cas test effectués avec le logiciel CALIF³S.
4. Nous pourrions espérer un équivalent discret du fait que la divergence de la vitesse est nulle dans le domaine congestionné $\{\rho = 1\}$. Malheureusement, la seule observation (triviale) que nous pouvons faire est la suivante : supposons que sur la cellule K , $\rho_K^n, \rho_K^{n+1}, \rho_\sigma^{n+1}$ sont tous égaux à 1, alors par (6.41d) $\text{div}(\mathbf{u}^{n+1})_K = 0$ (voir [70] où une observation similaire est faite).

6.2.3 Un cas test en dimension deux : collision de deux blocs denses

On considère le cas test en dimension deux introduit dans [68] qui illustre la collision de deux blocs denses et la création, après collision d'une zone saturée qui se propage. Le domaine de calcul est $\Omega = (0, 1)^2$. Les régions denses à $t = 0$ sont situées dans les domaines $A = [\frac{1}{6}, \frac{5}{12}] \times [\frac{1}{3}, \frac{7}{12}]$ et $B = [\frac{7}{12}, \frac{5}{6}] \times [\frac{5}{12}, \frac{2}{3}]$. La densité ρ et la quantité de mouvement $\mathbf{q} = \rho \mathbf{u}$ initiales sont données par :

$$\rho = 0.6 + 0.2 \mathbf{1}_{A \cup B}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{1}_A + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{1}_B.$$

On utilise le schéma de correction de pression codé dans le logiciel CALIF³S pour calculer la solution approchée du système de congestion douce (6.30) sans terme de viscosité et pour $\varepsilon = 10^{-4}$. Le maillage est composé de 41648 triangles et le pas de temps est $\delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. On impose des conditions aux limites de non pénétration sur la vitesse. Le temps CPU du calcul est de 13 min pour 400 itérations permettant d'atteindre le temps final $t = 0.2$. Dans la Fig. 6.3 on peut observer, en échelle de couleur, la densité aux temps $t = 0$, $t = 0.005$ et $t = 0.2$ ainsi que le champ de vitesse (flèches blanches). La Fig. 6.2 présente les coupes de la densité et de la vitesse à $t = 0.005$ le long de l'axe $y = 0.5$. On observe bien la formation d'une zone saturée ($\rho \approx 1$) qui se propage dans le domaine.

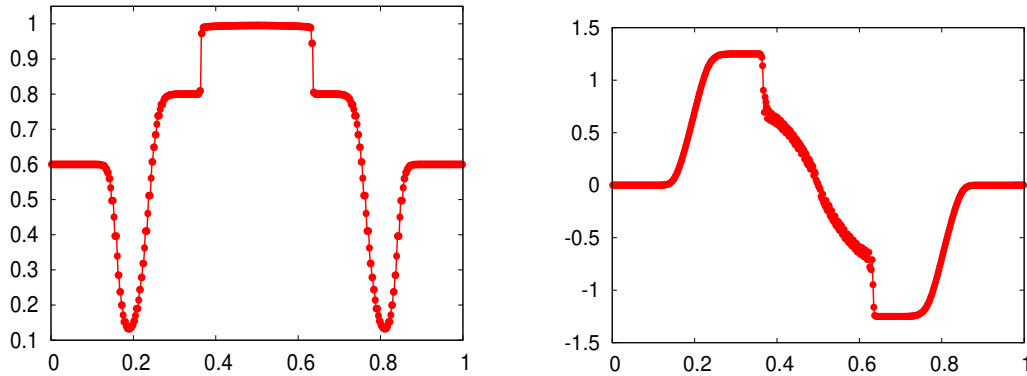


FIGURE 6.2 – Collision de deux blocs denses : densité (à gauche) et vitesse (à droite) en fonction de x le long de l'axe $y = 0.5$ à $t = 0.005$. $\varepsilon = 10^{-4}$.

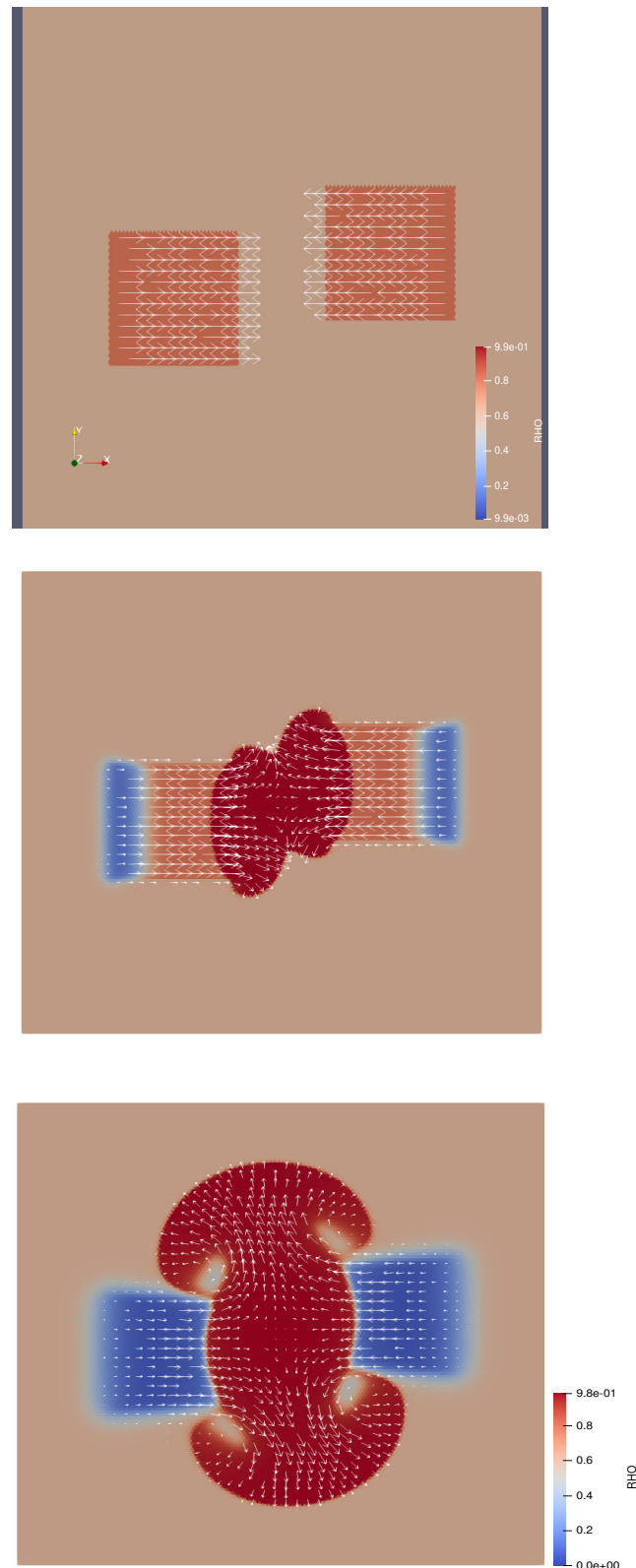


FIGURE 6.3 – Collision de deux blocs denses : densité et champ de vitesse à $t = 0$ (en haut), $t = 0.005$ (au milieu) et $t = 0.2$ (en bas). $\varepsilon = 10^{-4}$. Nombre de cellules 41648, $\delta t = 5.10^{-4}$.

Chapitre 7

Convergences de schémas sur grilles décalées

7.1	Analyse fonctionnelle discrète	134
7.1.1	Injections de Sobolev discrètes	134
7.1.2	Résultats de compacité	137
7.2	Navier-Stokes compressibles stationnaires	139
7.2.1	Le schéma numérique	140
7.2.2	Le résultat de convergence	141
7.3	Navier-Stokes incompressible	144
7.3.1	Le schéma numérique	145
7.3.2	Convergence du schéma	146

S'il était attendu que les schémas numériques sur grilles décalées aient les propriétés requises pour assurer stabilité et précision dans la limite incompressible (ce que nous avons pu montrer dans le chapitre précédent) il n'est pas évident *a priori* que ces schémas numériques où les degrés de liberté des quantités scalaires et des quantités vectorielles ne sont pas localisés aux mêmes endroits, fournissent des solutions discrètes consistantes avec les solutions exactes. Les premiers résultats en ce sens sont des théorèmes de consistance de type Lax-Wendroff : on montre que si la solution discrète converge dans des normes suffisamment fortes lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéro vers une certaine fonction, alors cette fonction est une solution faible du problème discrétisé (voir [96, 97, 81, 83]).

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des résultats de *convergence* des solutions de certains schémas sur grilles décalées vers les solutions faibles exactes des modèles discrétisés. Dans ce cas, la convergence des solutions discrètes n'est plus supposée mais démontrée à partir des estimations discrètes satisfaites par ces solutions et des résultats de compacité. On commence par donner quelques résultats d'analyse fonctionnelle discrète qui sont cruciaux pour l'analyse de convergence. On présente ensuite un résultat de convergence pour les équations de Navier-Stokes compressibles stationnaires avec des lois de pression barotropes de type gaz parfait, $\wp(\rho) = a\rho^\gamma$, $\gamma > \frac{3}{2}$. Enfin, on donne également un résultat de convergence pour le modèle de Navier-Stokes incompressible à masse volumique variable (la masse volumique est advectée) dans un cadre instationnaire.

Les travaux décrits dans ce chapitre font l'objet des publications suivantes :

- 1 J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « A Convergent Staggered Scheme for the Variable Density Incompressible Navier-Stokes Equations ». In : *Mathematics of Computation* 87.310 (2017), p. 581-632.
- 2 C. PERRIN et K. SALEH. « A convergent FV-FE scheme for the stationary compressible Navier-Stokes equations ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 41.2 (2021), p. 826-899.

7.1 Analyse fonctionnelle discrète

Dans cette section, on donne quelques résultats d'analyse fonctionnelle discrète, qui généralisent aux espaces de fonctions régulières par morceaux $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ issus de l'approximation par les éléments finis de Crouzeix-Raviart [67] ou de Rannacher-Turek [115], les résultats classiques d'analyse fonctionnelle que sont les injection de Sobolev et le théorème de compacité de Rellich. Les démonstrations s'inspirent très largement de travaux de R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, et de leurs collaborateurs. Nous renvoyons notamment aux livres [76, 74] et à l'annexe de l'article [75], où des résultats similaires sont démontrés pour des approximations par volumes finis.

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$, polygonal si $d = 2$, et polyédrique si $d = 3$. On se donne une discrétisation de Ω comme dans la Définition 5.1.1 et on considère les espaces d'éléments finis $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$, $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ introduits à la Définition 5.2.2.

Les fonctions de $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ présentent des sauts au niveau des faces du maillage. Ainsi, leurs gradients au sens des distributions contiennent des mesures supportées par les faces σ du maillage. Il est donc clair que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) \not\subset W^{1,p}(\Omega)$. On peut cependant définir pour les fonctions de $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ un équivalent discret des semi-normes $W^{1,p}$.

Définition 7.1.1 (Opérateurs discrets et semi-norme $W^{1,q}$ discrète). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω comme dans la Définition 5.1.1. On définit des opérateurs gradients et divergence discrets pour les fonctions discrètes régulières par morceaux $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$:*

$$\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_K(\mathbf{x}), \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_K(\mathbf{x}). \quad (7.2)$$

Pour une fonction scalaire $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et pour tout $1 \leq q < +\infty$, on définit $\|u\|_{1,q,\mathcal{M}}$ la semi-norme $W^{1,q}$ discrète de u par :

$$\|u\|_{1,q,\mathcal{M}} := \left(\int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{M}} u|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (7.3)$$

Pour une fonction à valeurs vectorielles $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ et pour tout $1 \leq q < +\infty$, on définit $\|\mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}}$ la semi-norme $W^{1,q}$ discrète de \mathbf{u} par :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}} := \left(\int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (7.4)$$

Il est assez facile de vérifier que sur $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$, la semi-norme $\|\cdot\|_{1,q,\mathcal{M}}$ est en fait une norme, c'est notamment une conséquence de l'inégalité de Poincaré discrète (voir la Proposition 7.1.5).

7.1.1 Injections de Sobolev discrètes

Rappelons le fameux résultat d'injection continue pour les espaces de Sobolev dont une démonstration peut être trouvée dans [63].

Théorème 7.1.1 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). *Soit $1 \leq p < d$. Alors il existe une constante $C(p, d)$ telle que :*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad (7.5)$$

où $p^* = \frac{dp}{d-p}$. En particulier, on a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue.

Nous cherchons à démontrer un équivalent discret de l'inégalité (7.5) pour les fonctions de $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ avec $\|u\|_{1,p,\mathcal{M}}$ au lieu de $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Commençons par le cas $p = 1$. L'inégalité (7.5) s'écrit :

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d) \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d). \quad (7.6)$$

Telle quelle, l'inégalité (7.6) n'a pas de sens pour $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ car les gradients (au sens des distributions) des fonctions de $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ ne sont pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ puisque ces fonctions sont discontinues à travers les faces du maillage. En revanche, l'inégalité (7.6) s'étend à un espace plus large que $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ qui lui contient l'espace $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$. Il s'agit de l'espace des fonctions à variations bornées dans lequel les gradients sont contrôlés dans un sens plus faible que L^1 . Pour une fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note :

$$\|u\|_{\text{BV}} := \sup \left\{ \langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \text{ avec } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d \text{ t.q. } \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\}.$$

Rappelons que par définition, pour $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\int_\Omega u \operatorname{div} \phi$. On dit qu'une fonction u appartient à l'espace $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à variations bornées si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|u\|_{\text{BV}} < \infty$.

Remarque 7.1.1. *L'espace $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dont le gradient au sens des distributions est une mesure finie. Il contient naturellement l'espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ puisque pour tout $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$, on a $\|u\|_{\text{BV}} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, mais il contient aussi l'espace $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ comme nous allons le démontrer ci-dessous.*

Montrons que (7.6) est toujours vraie pour les fonctions de $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ avec $\|u\|_{\text{BV}}$ au lieu de $\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. Pour tout $u \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$, il existe (voir par exemple [57]) une suite $(u_n) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et presque partout, et telle que $\|\nabla u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|u_n\|_{\text{BV}} \rightarrow \|u\|_{\text{BV}}$. La suite $(\|u_n\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)})$ est bornée (grâce à l'injection de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^d) \subset L^{1^*}(\mathbb{R}^d)$) et comme $u_n \rightarrow u$ presque partout, le lemme de Fatou donne $\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)}$. En passant à la limite dans (7.6) pour u_n on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &= C(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\text{BV}} \\ &= C(d) \|u\|_{\text{BV}}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Pour démontrer un équivalent discret de (7.6), il suffit donc de démontrer que toute fonction u de $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ s'étend à \mathbb{R}^d en une fonction de $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$ avec $\|u\|_{\text{BV}} \lesssim \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}$. Ce résultat, qui est vrai sous contrainte de régularité sur le maillage, découle du Lemme suivant sur le contrôle des sauts des fonctions de $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$.

Lemme 7.1.2. *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_{\mathcal{D}}$ définie en (5.1). Pour toute fonction v définie sur Ω et tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, avec $\sigma = K|L$, on note $[v]_\sigma$ le saut de v à travers σ (i.e. $|[v]_\sigma(\mathbf{x})| = |v|_K(\mathbf{x}) - v|_L(\mathbf{x})|$, pour tout $\mathbf{x} \in \sigma$), et pour $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$, $\sigma \in K$, on note $[v]_\sigma(\mathbf{x}) = v|_K(\mathbf{x})$, pour tout $\mathbf{x} \in \sigma$. Enfin, on note h_σ le diamètre de σ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$. Alors :*

- Pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe une constante $C(p, d, \theta_0)$ telle que :

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v]_\sigma|^p d\gamma(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, d, \theta_0) \|v\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \tag{7.8}$$

- Pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante $C(p, d, \theta_0)$ telle que pour tout $\alpha > 1$:

$$\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_\sigma |[v]_\sigma|^\alpha d\gamma(\mathbf{x}) \right) \leq \alpha C(p, d, \theta_0) \|v\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\Omega)}^{\alpha-1} \|v\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \tag{7.9}$$

où $1 < p' < \infty$ est donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_0 > 0$ et soit $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$. On étend u par 0 en dehors de Ω et on a alors $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= - \int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div} \phi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi \, d\mathbf{x} = - \sum_K \int_K u \operatorname{div} \phi \, d\mathbf{x} \\
&= \sum_K \left(\int_K \nabla u \cdot \phi \, d\mathbf{x} - \int_{\partial K} u \phi \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(\mathbf{x}) \right) \\
&= \sum_K \left(\int_K \nabla u \cdot \phi \, d\mathbf{x} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} u \phi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\gamma(\mathbf{x}) \right) \\
&= \sum_K \int_K \nabla u \cdot \phi \, d\mathbf{x} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} [u]_{\sigma} \phi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\gamma(\mathbf{x}) \\
&\leq \left(\sum_K \int_K |\nabla u| \, d\mathbf{x} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} |[u]_{\sigma}| \, d\gamma(\mathbf{x}) \right) \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

par définition de la norme $\|u\|_{1,1,\mathcal{M}}$ et grâce à l'inégalité (7.8) (avec $p = 1$). En vertu de (7.10), une fonction $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ (étendu par 0 en dehors de Ω) est dans $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\|u\|_{\mathbf{BV}} \leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}. \tag{7.11}$$

En combinant (7.11) avec (7.7), nous avons démontré le résultat suivant :

Proposition 7.1.3 (Injection $W^{1,1} \subset L^{1^*}$ discrète). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_0 > 0$. Il existe une constante $C(d, \theta_0) > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \tag{7.12}$$

On peut maintenant démontrer un analogue discret de l'inégalité de Sobolev (7.5) pour $1 \leq p < d$ quelconque :

Proposition 7.1.4 (Injection $W^{1,p} \subset L^{p^*}$ discrète pour $1 \leq p < d$). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_0 > 0$. On suppose que $1 \leq p < d$. Alors il existe une constante $C(p, d, \theta_0) > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d, \theta_0) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \tag{7.13}$$

où $p^* = \frac{dp}{d-p}$, et on a $C(p, d, \theta_0) \rightarrow +\infty$ lorsque $p \rightarrow d$.

Démonstration. La démonstration consiste à appliquer l'inégalité obtenue pour $p = 1$ à la fonction régulière par morceaux égale à $|u|^\alpha$ pour α bien choisi. En pratique on prend α tel que $\alpha \cdot 1^* = p'(\alpha - 1)$ i.e. $\alpha = p'/(p' - 1^*)$ et on utilise (7.9). \square

Par interpolation d'espaces de Lebesgue, on a le corollaire suivant, dont une conséquence est une *inégalité de Poincaré discrète*.

Proposition 7.1.5. *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_0 > 0$. On suppose que $1 \leq p < d$. Alors, pour tout $q \in [p, p^*]$, il existe une constante $C(p, q, d, \theta_0) > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, d, \theta_0) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \tag{7.14}$$

Pour $q = p$, cette inégalité s'appelle l'inégalité de Poincaré discrète.

Enfin, pour $p \geq d$, on a le résultat suivant.

Proposition 7.1.6 (Injection $W^{1,p} \subset L^q$ discrète pour $p \geq d$). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_0 > 0$. On suppose que $p \geq d$. Alors pour tout $q \in]p, \infty[$, il existe une constante $C(p, q, d, \theta_0) > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, d, \theta_0) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega). \quad (7.15)$$

Remarque 7.1.2. *Ces résultats d'injections de Sobolev discrètes démontrés pour l'espace d'éléments finis $H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ peuvent être facilement étendus à l'espace des fonctions constantes sur les cellules du maillage dual $H_{\mathcal{E},0}(\Omega)$. On sait en effet que ces deux espaces sont isomorphes et qu'à toute fonction $u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_{\sigma} \mathbf{1}_{D_{\sigma}} \in H_{\mathcal{E}}(\Omega)$ est associée la fonction $\hat{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_{\sigma} \zeta_{\sigma} \in H_{\mathcal{M}}(\Omega)$. En se ramenant à un élément de référence (simplexe de référence ou cube unité), on peut montrer que si le paramètre de régularité du maillage est tel que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$ pour une certaine constant $\theta_0 > 0$, alors pour tout $q \in [1, +\infty]$, il existe des constantes ne dépendant que de la régularité du maillage $c(\theta_0, q)$ et $C(\theta_0, q)$ telles que :*

$$c(\theta_0, q) \|\hat{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(\theta_0, q) \|\hat{u}\|_{L^q(\Omega)}.$$

En prenant $q = p^*$, on en déduit que les inégalités de Sobolev (et de Poincaré) discrètes s'étendent à l'espace $H_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{1,p,\mathcal{M}} := \left(\int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{M}} \hat{u}|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

7.1.2 Résultats de compacité

Dans cette partie, nous démontrons un analogue discret du théorème de compacité de Rellich à savoir que des suites qui sont bornées pour les normes $W^{1,p}$ discrètes sont relativement compactes dans $L^p(\Omega)$. Ces résultats se fondent naturellement sur le théorème de Kolmogorov qui caractérise les parties relativement compactes de $L^p(\Omega)$. Une démonstration de ce théorème ainsi que du théorème de Rellich peut être trouvée dans [63].

Théorème 7.1.7 (Kolmogorov). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ et $A \subset L^p(\Omega)$. Alors A est relativement compact dans $L^p(\Omega)$ si, et seulement si, il existe un opérateur de prolongement :*

$$\begin{aligned} P : A &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ u &\longmapsto P(u) \end{aligned}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $P(u) = u$ presque partout sur Ω , pour tout $u \in A$,
2. L'ensemble $\{P(u), u \in A\}$ est borné dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,
3. $\|P(u)(\cdot + \mathbf{y}) - P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ lorsque $\mathbf{y} \rightarrow 0$, uniformément en $u \in A$.

On commence par établir une estimation sur les translations des fonctions discrètes $u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$.

Proposition 7.1.8 (Translations dans L^1). *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation de Ω telle que $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$, avec $\theta_0 > 0$. Alors, il existe une constante $C(d, \theta_0) > 0$ telle que :*

$$\|u(\cdot + \mathbf{y}) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq |\mathbf{y}| C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

où $u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ est prolongée à tout \mathbb{R}^d en posant $u = 0$ en dehors de Ω , et $|\mathbf{y}|$ est la norme euclidienne de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| = \left| \int_0^1 \nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \, ds \right| \leq |\mathbf{y}| \int_0^1 |\nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{y})| \, ds.$$

En intégrant par rapport à \mathbf{x} et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\|u(\cdot + \mathbf{y}) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq |\mathbf{y}| \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| \, d\mathbf{x} = |\mathbf{y}| \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (7.16)$$

Par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité (7.16) est aussi vraie pour les fonctions $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$. Puis en procédant comme dans la preuve de la Proposition 7.1.3, on montre que l'on peut encore étendre ce résultat aux fonctions $u \in BV(\mathbb{R}^d)$:

$$\|u(\cdot + \mathbf{y}) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq |\mathbf{y}| \|u\|_{BV}, \quad \forall u \in BV(\mathbb{R}^d).$$

Soit maintenant $u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ que l'on étend par 0 en dehors de Ω . D'après (7.11), on a $u \in BV(\mathbb{R}^d)$ avec $\|u\|_{BV} \leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}$ d'où le résultat. \square

On en déduit le résultat suivant, analogue discret de l'injection compacte $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ pour Ω borné.

Théorème 7.1.9. *Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $\mathcal{D}^{(m)} = (\mathcal{M}^{(m)}, \mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de discrétisations de Ω telle que $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $\theta_0 > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $u^{(m)} \in H_{\mathcal{M}^{(m)}}(\Omega)$ que l'on prolonge par 0 en dehors de Ω . On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite de $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et donc dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. On traite d'abord la cas $p = 1$. On applique le Théorème de Kolmogorov à l'ensemble $A = \cup_{m \in \mathbb{N}} \{u^{(m)}\}$. L'hypothèse 1. du théorème est bien vérifiée. De plus, la Proposition 7.1.3 montre que la suite $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{1^*}(\Omega)$ et donc dans $L^1(\Omega)$ et dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ puisque $1^* > 1$ et que Ω est borné. L'hypothèse 2. du théorème est donc aussi vérifiée. Enfin, grâce à la Proposition 7.1.8 et au fait que $\|u^{(m)}\|_{1,1,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C$, $\forall m \in \mathbb{N}$, on voit aussi que $\|u^{(m)}(\cdot + \mathbf{y}) - u^{(m)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ lorsque $\mathbf{y} \rightarrow 0$, uniformément en $m \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer le Théorème de Kolmogorov, ce qui donne l'existence d'une sous-suite de $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ convergente dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc dans $L^1(\Omega)$. On passe au cas général en montrant que si $(\|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $(\|u^{(m)}\|_{1,1,\mathcal{M}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée. On peut donc conclure par le premier cas (en interpolant L^p entre L^1 et L^{p^*} , $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans L^{p^*} grâce à l'inégalité de Sobolev discrète). \square

En continu, la limite forte dans $L^p(\Omega)$ d'une suite de fonctions bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenue par extraction grâce au théorème de Rellich est en fait dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous démontrons un analogue discret de ce résultat qui suppose que le pas de la suite de maillages considérés tende vers zéro.

Théorème 7.1.10. *Soit $\mathcal{D}^{(m)} = (\mathcal{M}^{(m)}, \mathcal{E}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de discrétisations de Ω telle que $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $\theta_0 > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $u^{(m)} \in H_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C$, $\forall m \in \mathbb{N}$. On suppose aussi que $h_{\mathcal{D}^{(m)}} \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow +\infty$. Alors :*

1. *Il existe une sous-suite de $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, toujours notée $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, qui converge dans $L^p(\Omega)$ vers un certain $u \in L^p(\Omega)$.*
2. *La limite u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C$.*
3. *La suite $(\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers ∇u dans $L^p(\Omega)^d$.*

Idée de la preuve. Le fait qu'il existe une sous-suite de $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, toujours notée $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, qui converge dans $L^p(\Omega)$ vers un certain $u \in L^p(\Omega)$, est une conséquence du Théorème 7.1.9. Il reste donc à montrer que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C$. En prolongeant $u^{(m)}$ et u par 0 en dehors de Ω , on a aussi $u^{(m)} \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Comme $u = 0$ en dehors de Ω , il suffit pour que u soit dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de montrer que ∇u au sens des distributions s'identifie à une fonction de $L^p(\mathbb{R}^d)^d$. Il reste alors à montrer que $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)}$ converge faiblement vers ∇u dans $L^p(\mathbb{R}^d)^d$. \square

Remarque 7.1.3. Là encore, ces résultats de compacité s'étendent à l'espace des fonctions constantes sur les cellules du maillage dual $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$. En notant $\hat{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_{\sigma} \zeta_{\sigma}$ la fonction de $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ associée à une fonction $u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_{\sigma} \mathbf{1}_{D_{\sigma}} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$, on montre que pour tout $q \in [1, +\infty)$, il existe $C(\theta_0, q)$ telle que :

$$\|u - \hat{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\theta_0, q) h_{\mathcal{D}} \|\hat{u}\|_{1,q,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega).$$

On en déduit que les théorèmes 7.1.9 et 7.1.10 s'étendent aux suites de fonctions $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ telles que $u^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}^{(m)}}(\Omega)$ et telles que $(\|\hat{u}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée.

7.2 Convergence du schéma sur grilles décalées pour les équations de Navier-Stokes compressibles stationnaires

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et connexe de bord lipschitzien, avec $d \in \{2, 3\}$. On considère le système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes stationnaires, donné par :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{7.17a}$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} - (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \nabla \varphi(\rho) = \mathbf{f}. \tag{7.17b}$$

Les quantités $\rho \geq 0$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$ sont respectivement la masse volumique et la vitesse du fluide. Le terme \mathbf{f} est une force volumique extérieure. Les coefficients de viscosité vérifient $\mu > 0$ et $\mu + \lambda > 0$. La loi de pression est une loi de type gaz parfait $\varphi(\rho) = a\rho^{\gamma}$ avec $a > 0$ et $\gamma > 1$. On complète le système (7.17) par des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la vitesse :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.18}$$

et par une contrainte sur la valeur moyenne de la masse volumique :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} = \rho^* > 0. \tag{7.19}$$

L'existence de solutions faibles pour ce système a été initialement démontrée par P.-L. Lions dans [104] pour des exposants adiabatiques $\gamma > \frac{5}{3}$ en dimension $d = 3$. Ce résultat fut ensuite étendu aux coefficients $\gamma \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ par Novo et Novotný dans [109], grâce à la méthode des troncatures introduites par Feireisl dans le cas instationnaire. On rappelle ci-dessous la définition des solutions faibles dans le cadre du système (7.17)-(7.18)-(7.19) en trois dimension.

Définition 7.2.1. Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de \mathbb{R}^3 . Soit $\gamma > \frac{3}{2}$. Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\rho^* > 0$. Un couple $(\rho, \mathbf{u}) \in L^{3(\gamma-1)}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (7.17)-(7.18)-(7.19) s'il satisfait :

1. Positivité de la masse volumique et contrainte de masse moyenne :

$$\rho \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} = \rho^*. \tag{7.20}$$

2. Les équations (7.17a)-(7.17b) sont vérifiées au sens faible :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega), \\ - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - a \int_{\Omega} \rho^{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in C_c^{\infty}(\Omega)^3. \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\tag{7.22}$$

On dit que $(\rho, \mathbf{u}) \in L^{3(\gamma-1)}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est une solution faible d'énergie finie si de plus, elle satisfait l'inégalité d'énergie suivante :

$$\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \quad (7.23)$$

Enfin, $(\rho, \mathbf{u}) \in L^{3(\gamma-1)}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est une solution faible renormalisée si de plus, pour toute fonction $b \in C^0([0, +\infty)) \cap C^1((0, +\infty))$ telle que

$$|b'(t)| \leq \begin{cases} ct^{-\lambda_0}, & \lambda_0 < 1 & \text{si } t < 1, \\ ct^{\lambda_1}, & \lambda_1 + 1 \leq \frac{3(\gamma-1)}{2} & \text{si } t \geq 1, \end{cases} \quad (7.24)$$

la solution (ρ, \mathbf{u}) satisfait

$$\operatorname{div}(b(\rho)\mathbf{u}) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (7.25)$$

où ρ et \mathbf{u} sont étendus par 0 en dehors de Ω .

Remarque 7.2.1. La borne inférieure $\gamma > \frac{3}{2}$ correspond à l'intégrabilité minimale sur ρ qui permet d'assurer, à partir des estimations classiques, que la pression soit intégrable. En effet, comme $\rho \in L^{3(\gamma-1)}(\Omega)$ la pression $p = \wp(\rho) = a\rho^\gamma$ vérifie $p \in L^{1+\eta}(\Omega)$ avec $\eta = \frac{2\gamma-3}{\gamma} > 0$, puisque $\gamma > \frac{3}{2}$.

Concernant l'approximation numérique des solutions de (7.17)-(7.18)-(7.19), il existe dans la littérature plusieurs résultats récents de convergence pour des schémas d'éléments finis ou des schémas mixtes volumes finis - éléments finis. Gallouët *et al.* [82] prouvent la convergence du schéma MAC sous la condition $\gamma > 3$ et Karper a prouvé dans [100] (voir aussi le livre récent [78]) un résultat de convergence dans le cas instationnaire, encore une fois pour $\gamma > 3$. Notons que dans tous ces travaux, un terme de diffusion numérique (terme évanescant dans la limite vers zéro des pas de discrétisation) sur la masse volumique est ajouté dans l'équation de continuité. Il s'agit d'un terme technique fournissant des estimations supplémentaires qui permettent la mise en œuvre de l'analyse de convergence. Notons également que pour le cas instationnaire, des estimations d'erreur sont disponibles dans [84] pour $\gamma > \frac{3}{2}$. Pour des valeurs de $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$ (plus précisément $\gamma < 2$), des résultats de convergence peuvent être trouvés dans [79] et [80] dans le cadre de solutions dissipatives à valeurs mesurées, un cadre "plus faible" que le cadre des solutions faibles renormalisées considéré ici.

Nous présentons dans cette section un résultat de convergence des solutions du schéma sur grilles décalées vers une solution faible d'énergie finie du système (7.17)-(7.18)-(7.19) dans le cadre tridimensionnel et pour des coefficients $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$. Le maillage considéré est un maillage non structuré composé uniquement de tétraèdres (on utilise les degrés de liberté des éléments finis de Crouzeix-Raviart) mais le résultat peut être étendu au schéma MAC sur grilles cartésiennes et à des maillages quadrangulaires en utilisant les éléments finis de Rannacher-Turek. À notre connaissance, il s'agit là du premier résultat de convergence d'un schéma dans le cas tridimensionnel pour des valeurs $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$ dans le cadre de solutions faibles d'énergie finie (voir la Définition 7.2.1). Il fournit une démonstration alternative du résultat d'existence obtenu par Lions ou par Novo et Novotny.

7.2.1 Le schéma numérique

On se donne $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation spatiale sur grilles décalées au sens de la définition (5.1.1). On suppose que le maillage \mathcal{M} est composé uniquement de simplexes. La masse volumique est discrétisée aux centres des mailles primales tandis que les vitesses sont discrétisées aux faces. Le système (7.17)-(7.18)-(7.19) est discrétisé par le schéma numérique suivant, avec les opérateurs différentiels discrets introduits au chapitre 5 :

Chercher $(\rho, \mathbf{u}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ tels que :

$$\left| \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})_K + T_{\operatorname{stab},K}^1 + T_{\operatorname{stab},K}^2 = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad (7.26a) \right.$$

$$\left. \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_\sigma - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}))_\sigma + (\nabla \wp(\rho))_\sigma + T_{\operatorname{stab},\sigma}^3 = \mathbf{f}_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\operatorname{int}}, \quad (7.26b) \right.$$

où les opérateurs discrets sont ceux introduits au chapitre 5 et où $T_{\text{stab},K}^1$, $T_{\text{stab},K}^2$ et $T_{\text{stab},\sigma}^3$ sont des termes de stabilisation définis par :

$$T_{\text{stab},K}^1 := h_{\mathcal{D}}^{\xi_1} (\rho_K - \rho^*), \quad (7.27)$$

$$T_{\text{stab},K}^2 = -h_{\mathcal{D}}^{\xi_2} (\Delta_{\frac{1+\eta}{\eta}} \rho)_K := h_{\mathcal{D}}^{\xi_2} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = K|L}} |\sigma| \left(\frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} \right)^{\frac{1}{\eta}} |\rho_K - \rho_L|^{\frac{1}{\eta}-1} (\rho_K - \rho_L), \quad (7.28)$$

$$T_{\text{stab},\sigma}^3 := h_{\mathcal{D}}^{\xi_3} (\nabla \rho^\Gamma)_\sigma = h_{\mathcal{D}}^{\xi_3} \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\rho_L^\Gamma - \rho_K^\Gamma) \mathbf{n}_{K,\sigma}. \quad (7.29)$$

L'équation de masse discrète contient deux termes de stabilisation numériques. Le premier terme de stabilisation, $T_{\text{stab},K}^1$, permet d'assurer la contrainte de masse moyenne (7.19) au niveau discret. Le deuxième terme de stabilisation, $T_{\text{stab},K}^2$, est un équivalent discret d'un p -Laplacien avec $p = \frac{1+\eta}{\eta}$ (pondéré par $h_{\mathcal{D}}^{\xi_2}$). Ce terme permet un contrôle de la masse volumique dans une semi-norme $W^{1, \frac{1+\eta}{\eta}}(\Omega)$ discrète par une puissance (négative) du pas du maillage $h_{\mathcal{D}}$. Il s'agit là d'un terme technique permettant le passage à la limite dans l'équation d'état lors de l'analyse de convergence du schéma. L'équation de quantité de mouvement discrète contient elle aussi un terme de stabilisation, $T_{\text{stab},\sigma}^3$, qui est un terme de pression artificielle où $\Gamma > \gamma$ est choisi suffisamment grand pour permettre un contrôle de l'équivalent du terme $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ apparaissant dans la formulation faible de l'équation de quantité de mouvement lorsque $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$. Lorsque $d = 3$ et $\gamma > 3$ ou lorsque $d = 2$ et $\gamma > 2$, ce terme n'est pas nécessaire.

Remarque 7.2.2. *Le terme de convection dans l'équation de quantité de mouvement discrète est de la forme*

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u}) \mathbf{u}_\epsilon, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Les flux numériques aux faces du maillage dual $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u})$ sont habituellement calculés à partir des flux de masses à travers les faces de la maille primale K telle que $\epsilon \subset K$: $F_{K,\sigma'} = |\sigma'| \rho_{\sigma'} \mathbf{u}_{\sigma'} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma'}$ (avec $\rho_{\sigma'}$ la valeur upwind) pour $\sigma' \in \mathcal{E}(K)$ (voir Définition 5.2.1). Dans le cas du schéma (7.26), on calcule les flux duaux $F_{\sigma,\epsilon}(\rho, \mathbf{u})$ non pas à partir des flux de masse primaux mais à partir de flux de masses primaux qui incorporent le terme de correction avec le p -Laplacien discret :

$$\bar{F}_{K,\sigma'}(\rho, \mathbf{u}) = F_{K,\sigma'}(\rho, \mathbf{u}) + h_{\mathcal{D}}^{\xi_2} |\sigma'| \left(\frac{|\sigma'|}{|D_{\sigma'}|} \right)^{\frac{1}{\eta}} |\rho_K - \rho_L|^{\frac{1}{\eta}-1} (\rho_K - \rho_L), \quad \forall \sigma' \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma' = K|L.$$

7.2.2 Le résultat de convergence

On donne le résultat de convergence dans le cas $d = 3$ et pour des coefficients $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$. La convergence du schéma dans le cas de la dimension $d = 2$ ou pour des coefficients $\gamma > 3$ est un résultat plus simple qui peut être obtenu sans le terme de pression artificielle $T_{\text{stab},\sigma}^3$ dans l'équation de quantité de mouvement, et dans certains cas, sans le terme de diffusion numérique $T_{\text{stab},K}^2$ dans l'équation de conservation de la masse.

Théorème 7.2.1 (Convergence du schéma). *Soit Ω un polyèdre de \mathbb{R}^3 . Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\rho^* > 0$. On suppose que $\gamma \in (\frac{3}{2}, 3]$. En notant $\eta = \frac{2\gamma-3}{\gamma} \in (0, 1]$, on suppose que les coefficients Γ et (ξ_1, ξ_2, ξ_3) qui définissent les termes de stabilisations satisfont les inégalités suivantes :*

$$(i) \quad \xi_1 > 1, \quad (7.30)$$

$$(ii) \quad \frac{5}{4\Gamma} \left(\frac{3}{1+\eta} + \xi_3 \right) < \frac{\eta}{1+\eta}, \quad (7.31)$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\eta} + \frac{5}{4\eta\Gamma} \left(\frac{3}{1+\eta} + \xi_3 \right) < \xi_2 < \frac{1+\eta}{\eta} - \frac{5}{4\Gamma} \left(\frac{3}{1+\eta} + \xi_3 \right). \quad (7.32)$$

Soit $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite régulière de discrétisations sur grilles décalées de Ω composées uniquement de simplexes et telles que $\theta_{\mathcal{D}_n} \leq \theta_0$ pour $\theta_0 > 0$ et $h_{\mathcal{D}_n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe une solution $(\rho_n, \mathbf{u}_n) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}_n}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{D}_n,0}(\Omega)$ au schéma numérique (7.26) pour la discrétisation \mathcal{D}_n . De plus il existe $(\rho, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}^{3(\gamma-1)}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et une sous suite de $(\rho_n, \mathbf{u}_n)_{n \geq N}$, que l'on note encore $(\rho_n, \mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

- La suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathbf{u} dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 6)$ et faiblement dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$,
- La suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ρ dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 3(\gamma - 1))$ et faiblement dans $\mathbf{L}^{3(\gamma-1)}(\Omega)$,
- La suite $(\rho_n^\gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ρ^γ dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \frac{3(\gamma-1)}{\gamma})$ et faiblement dans $\mathbf{L}^{\frac{3(\gamma-1)}{\gamma}}(\Omega)$,
- Le couple (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible d'énergie finie du problème (7.17)-(7.18)-(7.19).

Donnons les grandes étapes de la démonstration de ce résultat.

Étape 1 : estimations uniformes – L'existence de solutions au schéma à n fixé découle d'une estimation d'énergie et d'un argument de degré topologique (ou un point fixe de Brouwer) dans l'espace de dimension finie $\mathbf{L}_{\mathcal{M}_n}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}_n,0}(\Omega)$. On montre en effet l'estimation d'énergie suivante sur la suite $(\rho_n, \mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il existe $C_0 > 0$, $p \in (1, 1 + \eta)$ et $r \in (0, 1)$ tels que :

$$\|\mathbf{u}_n\|_{1,2,\mathcal{M}_n} + \|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{L}^6(\Omega)} + \|\rho_n\|_{\mathbf{L}^{3(\gamma-1)}(\Omega)} + \mathcal{R}^n \leq C_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^n = & h_n^{\frac{5}{4\Gamma}(\frac{3}{1+\eta} + \xi_3)} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{n,\text{int}} \\ \sigma = K|L}} |\sigma| (\rho_L - \rho_K)^2 |\mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}| \\ & + \|h_n^{\xi_3} \rho_n^\Gamma\|_{\mathbf{L}^{1+\eta}(\Omega)} + h_n^{-\xi_3(1-r)} \|h_n^{\xi_3} \rho_n^\Gamma\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + h_n^{\xi_2 + \frac{5}{4\Gamma}(\frac{3}{1+\eta} + \xi_3)} |\rho_n|_{\frac{1+\eta}{\eta}, \mathcal{M}_n}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Les trois premiers termes de l'estimation (7.33) correspondent à l'estimation classique vérifiée par les solutions faibles renormalisées. On démontre d'abord les estimations sur la vitesse grâce à une inégalité d'énergie discrète (on utilise l'inégalité de Poincaré discrète pour les fonctions de $\mathbf{H}_{\mathcal{D},0}(\Omega)$) et l'injection de Sobolev discrète $\mathbf{H}_{\mathcal{D},0}(\Omega) \subset \mathbf{L}^6(\Omega)$ (voir (7.13) pour $p = 2$ et $d = 3$ et la remarque 7.1.2). Le coefficient ξ_1 doit être suffisamment grand pour que le terme de stabilisation $T_{\text{stab},K}^1$ ne perturbe pas cette estimation. Le terme $T_{\text{stab},K}^2$ quant à lui ne perturbe pas l'estimation car il est incorporé aux flux de masse lors de la définition des flux de masse duaux (voir Remarque 7.2.2). L'estimation sur la masse volumique est plus complexe. Elle est obtenue en choisissant $\mathbf{v} = \mathcal{B}_{\mathcal{M}}(P - \bar{P})$, où $P = (a\rho^\gamma + h_{\mathcal{M}}^{\xi_3} \rho^\Gamma)^\eta$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ est l'opérateur de Bogovskii discret, comme fonction test dans la formulation variationnelle de l'équation de quantité de mouvement discrète. Cette formulation variationnelle a une forme peu sympathique. Elle s'écrit (avec $P_\mathcal{E}\rho$ la fonction constante sur chaque maille duale D_σ égale à ρ_σ la valeur *upwind* de la masse volumique et $\nabla_\mathcal{E}\mathbf{v}$ un certain gradient discret de \mathbf{v}) :

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega (\mathcal{P}_\mathcal{E}\rho) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_\mathcal{E}\mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \mu \int_\Omega \nabla_\mathcal{M}\hat{\mathbf{u}} : \nabla_\mathcal{M}\hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + (\mu + \lambda) \int_\Omega \text{div}_\mathcal{M} \hat{\mathbf{u}} \, \text{div}_\mathcal{M} \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} \\ & - a \int_\Omega \rho^\gamma \, \text{div}_\mathcal{M} \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} - h_\mathcal{M}^{\xi_3} \int_\Omega \rho^\Gamma \, \text{div}_\mathcal{M} \hat{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + R_{\text{conv}}(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

avec $\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{u}_\sigma \zeta_\sigma$ la fonction de $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ qui a les mêmes degrés de liberté que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ (de même pour $\hat{\mathbf{v}}$ et \mathbf{v}) et avec le terme de reste numérique suivant

$$R_{\text{conv}}(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \text{div}_{\mathcal{E}}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathcal{P}_{\mathcal{E}} \rho) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{E}} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

qui n'est pas nul ! C'est le contrôle de ce terme qui justifie l'introduction du terme de stabilisation par pression artificielle $T_{\text{stab},\sigma}^3$. On a alors suffisamment d'intégrabilité sur ρ pour que ce terme ne perturbe pas l'estimation.

Le quatrième terme dans l'estimation d'énergie, \mathcal{R}^n , qui est positif, est un terme de dissipation numérique qui fournit des estimations supplémentaires qui sont cruciales pour le passage à la limite dans le schéma. Ce terme additionnel est la conséquence des divers choix de discrétisation : le choix *upwind* pour la masse volumique aux faces dans le flux de masse de l'équation de conservation de la masse fournit le premier terme de dissipation. Les deux termes suivants sont issus du terme de stabilisation $T_{\text{stab},\sigma}^3$. Ils permettent une estimation améliorée de l'intégrabilité de la masse volumique (estimation qui est perdue dans la limite $n \rightarrow +\infty$ à cause du poids qui s'annule lorsque le pas de la discrétisation tend vers zéro). Le dernier terme de dissipation est issu du terme de stabilisation $T_{\text{stab},K}^2$. Il permet un contrôle de la masse volumique dans un équivalent discret de la semi-norme $W^{1, \frac{1+\eta}{\eta}}$, que nous ne définissons pas ici.

Étape 2 : compacité et passage à la limite dans les équations – Grâce à l'estimation (7.33), on montre qu'il existe

$$\rho \in L^{3(\gamma-1)}(\Omega), \quad \overline{\rho^\gamma} \in L^{\frac{3(\gamma-1)}{\gamma}}(\Omega), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

telles qu'à extraction d'une sous-suite près :

- La masse volumique $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^{3(\gamma-1)}(\Omega)$ vers ρ .
- La pression $(\rho_n^\gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^{\frac{3(\gamma-1)}{\gamma}}(\Omega)$ vers $\overline{\rho^\gamma}$.
- La vitesse $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 6)$ et faiblement dans $\mathbf{L}^6(\Omega)$ vers \mathbf{u} .

La compacité de la vitesse discrète est une conséquence du théorème de Rellich discret 7.1.10 (voir aussi la remarque 7.1.3) qui donne la convergence dans \mathbf{L}^2 vers une fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, et de l'injection de Sobolev discrète $\mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}^6$.

On peut alors passer à la limite dans la formulation variationnelle du schéma numérique. On obtient, à la limite, que :

$$- \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u} \, \text{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & - a \int_{\Omega} \overline{\rho^\gamma} \, \text{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^3. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Mentionnons que ce passage à la limite ne se fait pas sans difficultés, en raison de la discrétisation. Pour l'équation de continuité par exemple, on se donne une fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $\phi_n \in L_{\mathcal{M}_n}(\Omega)$ par $\phi_n|_K = \phi_K$ la valeur moyenne de ϕ sur K , pour $K \in \mathcal{M}_n$. En multipliant (7.26a) par $|K| \phi_K$, et en sommant sur $K \in \mathcal{M}_n$ on obtient, après une intégration par parties discrète :

$$- \int_{\Omega} (\mathcal{P}_{\mathcal{E}_n} \rho_n) \mathbf{u}_n \cdot \nabla_{\mathcal{E}_n} \phi_n \, d\mathbf{x} + R_1^n + R_2^n = 0, \quad (7.38)$$

où $\nabla_{\mathcal{E}_n} \phi_n$ est la fonction constante sur chaque maille duale D_σ , $\sigma \in \mathcal{E}_{n,\text{int}}$, égale au gradient discret centré :

$$\nabla_{\mathcal{E}_n} \phi_n = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{n,\text{int}} \\ \sigma = K|L}} \left(\frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\phi_L - \phi_K) \mathbf{n}_{K,\sigma} \right) \mathbb{1}_{D_\sigma}$$

et où les termes de reste sont donnés par :

$$\begin{aligned} R_1^n &= h_{\mathcal{D}_n}^{\xi_1} \sum_{K \in \mathcal{M}_n} |K| (\rho_K - \rho^*) \phi_K, \\ R_2^n &= h_{\mathcal{D}_n}^{\xi_2} \sum_{K \in \mathcal{M}_n} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \left(\frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} \right)^{\frac{1}{\eta}} |\rho_K - \rho_L|^{\frac{1}{\eta}-1} (\rho_K - \rho_L) \right) \phi_K. \end{aligned}$$

Il est relativement simple de démontrer que les termes de reste convergent vers zéro à partir de l'estimation uniforme (7.33). En revanche, le gradient discret $\nabla_{\mathcal{E}_n} \phi_n$, constant sur les mailles duales D_σ , n'étant porté que par la direction orthogonale à la face σ , il ne converge que faiblement vers $\nabla \phi$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme la masse volumique discrète $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge que faiblement à ce stade, il n'est pas possible de passer à la limite dans l'expression (7.38). Il faut donc retravailler cette expression afin de pouvoir passer à la limite et obtenir (7.36). Voir [111] pour les détails.

Étape 3 : passage à la limite dans l'équation d'état – C'est l'étape la plus délicate de la preuve. Elle permet de démontrer (à extraction d'une sous-suite près) que la convergence de la masse volumique est en fait une convergence forte dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, 3(\gamma - 1))$ et ainsi de passer à la limite dans l'équation d'état pour montrer que

$$\wp(\rho) = a\rho^\gamma = a\overline{\rho}^\gamma.$$

La preuve est trop technique pour être reproduite ici. Nous renvoyons à [111] pour les détails. Mentionnons simplement que, comme dans la preuve de Lions et celle de Novo et Novotný, la démonstration repose sur la compacité du flux visqueux effectif qui dans le cadre discret est définie par

$$F_n = (2\mu + \lambda) \operatorname{div}_{\mathcal{M}_n} \hat{\mathbf{u}}_n - a\rho_n^\gamma$$

ainsi que sur la technique des troncatures introduite par Feireisl. C'est à ce stade de la démonstration que la présence du terme de stabilisation $T_{\text{stab},K}^2$ est primordiale.

7.3 Convergence du schéma implicite sur grilles décalées pour les équations de Navier-Stokes incompressibles à masse volumique variable

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ et Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , avec $d \in \{2, 3\}$. On considère le système des équations de Navier-Stokes incompressibles à masse volumique variable, donné pour $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$ par :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{7.39a}$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0, \tag{7.39b}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{7.39c}$$

Les variables ρ , $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$ et p sont respectivement la masse volumique, la vitesse et la pression de l'écoulement. Notons que la pression ici n'est pas liée à la masse volumique par une loi d'état. Il s'agit d'un modèle incompressible où la pression est une variable indépendante qui peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. Ce système est complété par des conditions initiales et aux limites :

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7.40}$$

Supposons que les données initiales satisfont les propriétés suivantes :

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega), \text{ avec } 0 < \rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}, \quad (7.41a)$$

$$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (7.41b)$$

Par (7.39a) et (7.39c), la masse volumique est advectée par la vitesse \mathbf{u} :

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

On s'attend donc à ce que la solution vérifie le principe du maximum suivant :

$$\rho_{\min} \leq \rho(t, \mathbf{x}) \leq \rho_{\max}, \quad \text{p.p.t } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega,$$

et la régularité naturelle pour ρ est $\rho \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$. On démontre également que si (ρ, p, \mathbf{u}) est une solution régulière alors pour toute fonction $b \in C^1(0, +\infty)$, on a l'identité de renormalisation suivante :

$$\partial_t b(\rho) + \text{div}(b(\rho)\mathbf{u}) = 0.$$

En ce qui concerne la vitesse, un calcul d'énergie permet de voir que la régularité naturelle est $\mathbf{u} \in L^\infty((0, T); \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega))$. Cela conduit à définir les solutions faibles du problème (7.39)-(7.40) comme suit.

Définition 7.3.1. Soit $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\rho_0(\mathbf{x}) > 0$ pour p.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$, et soit $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Un couple (ρ, \mathbf{u}) est une solution faible du problème (7.39)-(7.40) s'il satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\rho \in \{\rho \in L^\infty((0, T) \times \Omega), \rho > 0 \text{ presque partout dans } (0, T) \times \Omega\}$.

(ii) $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u} \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega)^d) \cap L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d), \text{div } \mathbf{u} = 0\}$.

(iii) Pour tout ϕ dans $C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$,

$$\int_0^T - \int_\Omega \rho(t, \mathbf{x})(\partial_t \phi(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \, dt = \int_\Omega \rho_0(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}.$$

(iv) Pour tout \mathbf{v} dans $\{\mathbf{v} \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega)^d, \text{div } \mathbf{v} = 0\}$,

$$\int_0^T \int_\Omega \left(-\rho(t, \mathbf{x})\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - (\rho(t, \mathbf{x})\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) : \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) : \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x} \, dt = \int_\Omega \rho_0(\mathbf{x})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}.$$

Remarque 7.3.1. Comme les fonctions tests \mathbf{v} considérées dans la formulation faible de l'équation de quantité de mouvement sont à divergence nulle, la pression n'apparaît pas dans la définition des solutions faibles. Cependant, pour (ρ, \mathbf{u}) une solution faible, on peut montrer, à partir du théorème de de Rahm qu'il existe une unique pression $p \in W^{-1, \infty}((0, T); L_0^2(\Omega))$ tel que (ρ, p, \mathbf{u}) soit solution de (7.39) au sens faible (voir par exemple [61]).

7.3.1 Le schéma numérique

On se donne $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ une discrétisation spatiale sur grilles décalées au sens de la définition (5.1.1). On suppose ici que le maillage \mathcal{M} est composé uniquement de quadrangles (mais on peut généraliser à un maillage contenant des simplexes). La masse volumique et la pression sont discrétisées aux centres des mailles primales tandis que les vitesses sont discrétisées aux faces. On se donne également $\delta t > 0$ un pas de temps que l'on supposera constant pour simplifier. On suppose aussi que T est un multiple entier de δt , i.e. que $T = N\delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$. On note $(\rho^n, p^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E}, 0}(\Omega)$ l'approximation de la solution (ρ, p, \mathbf{u}) de (7.39)-(7.40) au temps $t_n = n\delta t$ pour $1 \leq n \leq N$.

On considère le schéma implicite suivant, où les opérateurs différentiels discrets sont introduits au chapitre 5 :

Initialisation :

Les champs discrets initiaux (ρ^0, \mathbf{u}^0) sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}\rho_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_\sigma^0 &= \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.\end{aligned}\tag{7.42}$$

Marche en temps :

Connaissant $(\rho^n, p^n, \mathbf{u}^n) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$, chercher $(\rho^{n+1}, p^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ tel que

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| p_K^{n+1} = 0$$

et

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \text{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K \in \mathcal{M}, & \quad (7.43a) \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma \\ - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1}))_\sigma + (\nabla p^{n+1})_\sigma &= 0, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, & \quad (7.43b) \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \text{div}(\mathbf{u}^{n+1})_K &= 0, & \forall K \in \mathcal{M}. & \quad (7.43c) \end{aligned} \right.$$

7.3.2 Convergence du schéma

À toute solution discrète $(\rho^n, p^n, \mathbf{u}^n)_{0 \leq n \leq N}$ du schéma numérique (7.42)-(7.43), on associe les fonctions constantes par morceaux suivantes :

$$\begin{aligned}\rho(t, \mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{M}} \rho_K^n \mathbb{1}_K(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{(n-1, n]}(t), \\ p(t, \mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{M}} p_K^n \mathbb{1}_K(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{(n-1, n]}(t), \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_\sigma^n \mathbb{1}_{D_\sigma}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{(n-1, n]}(t).\end{aligned}\tag{7.44}$$

On a le résultat de convergence suivant :

Théorème 7.3.1. *Soit $(\rho_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ tels que*

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_0 \leq \rho_{\max}.$$

Soit $(\mathcal{D}^{(m)}, \delta t^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de discrétisations telle qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que $\theta_{\mathcal{D}^{(m)}} \leq \theta_0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On suppose que les suites $(h_{\mathcal{D}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\delta t^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ convergent vers zéro lorsque m tend vers $+\infty$ et que la suite des paramètres $(\alpha^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ (voir la Définition 5.1.3) tend vers zéro lorsque m tend vers $+\infty$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une solution $(\rho^{(m)}, p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})$ au schéma (7.42)-(7.43). De plus, il existe $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}}) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et une sous-suite de $(\rho^{(m)}, p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, toujours notée $(\rho^{(m)}, p^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ tels que

1. La suite $(\rho^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers $\bar{\rho}$ dans $L^q((0, T) \times \Omega)$ pour tout q dans $[1, \infty)$ et faiblement- \star dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$.
2. La suite $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{\mathbf{u}}$ fortement dans $L^q((0, T); \mathbf{L}^2(\Omega))$ pour tout q in $[1, \infty)$, dans $L^2((0, T); \mathbf{L}^q(\Omega))$ pour tout q in $[1, 6)$, et faiblement dans $L^2((0, T); \mathbf{L}^6(\Omega))$ ainsi que dans $L^2((0, T); \mathbf{H}^1(\Omega))$.
3. Le couple $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$ est une solution faible du problème (7.40)-(7.43) au sens de la Définition 7.3.1.

Remarque 7.3.2. Pour assurer l'analyse de convergence, le paramètre de régularité de la discrétisation $\theta_{\mathcal{D}}$ est en fait plus restrictif que le paramètre introduit dans la Définition 5.1.3. On renvoie à [102] pour les détails.

La preuve de ce résultat se fait en cinq étapes :

1. On commence par démontrer des versions discrètes de l'identité de renormalisation et de l'équation d'énergie cinétique. On en déduit des estimations uniformes sur la suite de solutions discrètes (estimation L^∞ sur la masse volumique grâce au schéma *upwind* et estimations $L^\infty(\mathbf{L}^2)$ ainsi que dans une norme $L^2(\mathbf{H}^1)$ discrète pour la vitesse grâce à une inégalité d'énergie cinétique discrète).
2. La compacité de la suite $(\rho^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est l'étape la plus difficile. Grâce aux estimations on obtient la convergence L^∞ faible- \star de la suite $(\rho^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ vers une fonction $\bar{\rho} \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$. La compacité de la suite des vitesses discrètes $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ découle d'une estimation sur les translations en temps des vitesses en norme $L^2(L^2)$. On montre en effet qu'il existe C telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\tau}^T \|\mathbf{u}^{(m)}(\cdot, t) - \mathbf{u}^{(m)}(\cdot, t - \tau)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 dt \leq C \left(\tau^{\frac{1}{4}} + (\delta t^{(m)})^{\frac{1}{4}} + (h_{\mathcal{D}}^{(m)})^{\frac{1}{2}} \right), \quad \forall \tau \in (0, \min(T, 1)). \quad (7.45)$$

Cette estimation permet de montrer, grâce au théorème de Kolmogorov (voir par exemple [85]), la convergence dans $L^2((0, T); \mathbf{L}^2(\Omega))$ d'une sous-suite de $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ vers une fonction $\bar{\mathbf{u}}$ dont on peut montrer (grâce aux estimations et à (7.43c)) qu'elle vérifie :

$$\bar{\mathbf{u}} \in L^\infty((0, T); \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0.$$

3. On passe ensuite à la limite dans la forme variationnelle de l'équation de conservation de la masse ce qui permet de démontrer que le couple $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$ vérifie l'équation de conservation de la masse $\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) = 0$ au sens faible.
4. Grâce au fait que $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$ est une solution faible de l'équation de conservation de la masse et aux identités de renormalisation (discrète et pour la limite $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{u}})$), on montre que $(\rho^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers $\bar{\rho}$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.
5. Enfin, grâce à la convergence forte de $(\rho^{(m)}, \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, on passe facilement à la limite dans la formulation variationnelle de l'équation de quantité de mouvement discrète.

Bibliographie de la Partie II

- [57] L. AMBROSIO, N. FUSCO et D. PALLARA. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, p. xviii+434.
- [58] G. ANSANAY-ALEX, F. BABIK, J.-C. LATCHÉ et D. VOLA. « An L^2 -stable approximation of the Navier-Stokes convection operator for low-order non-conforming finite elements ». In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 66 (2011), p. 555-580.
- [59] A. ARAKAWA et V. LAMB. « A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations ». In : *Monthly Weather Review* 109 (1981), p. 18-36.
- [60] F. BOUCHUT, Y. BRENIER, J. CORTES et J.-F. RIPOLL. « A hierarchy of models for two-phase flows ». In : *Journal of NonLinear Science* 10.6 (2000), p. 639-660.
- [61] F. BOYER et P. FABRIE. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*. T. 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [62] D. BRESCH, C. PERRIN et E. ZATORSKA. « Singular limit of a Navier-Stokes system leading to a free/congested zones two-phase model ». In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.9 (2014), p. 685-690.
- [63] H. BREZIS. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, p. xiv+599.
- [64] CALIF³S. *A software components library for the computation of reactive turbulent flows*. <https://gforge.irsn.fr/gf/project/isis>.
- [65] C. CHALONS, M. GIRARDIN et S. KOKH. « An all-Regime Lagrange-projection like scheme for the gas dynamics equations on unstructured meshes ». In : *Communications in Computational Physics* 20 (2016), p. 188-233.
- [66] F. CORDIER, P. DEGOND et A. KUMBARO. « An asymptotic-preserving all-speed scheme for the Euler and Navier-Stokes equations ». In : *Journal of Computational Physics* 231 (2012), p. 5685-5704.
- [67] M. CROUZEIX et P.A. RAVIART. « Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations ». In : *RAIRO Série Rouge* 7 (1973), p. 33-75.
- [68] P. DEGOND, J. HUA et L. NAVORET. « Numerical simulations of the Euler system with congestion constraint ». In : *Journal of Computational Physics* 230.22 (2011), p. 8057-8088.
- [69] P. DEGOND, P. MINAKOWSKI et E. ZATORSKA. « Transport of congestion in two-phase compressible/incompressible flows ». In : *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 42 (2018), p. 485-510.
- [70] P. DEGOND et M. TANG. « All speed scheme for the low Mach number limit of the isentropic Euler equations ». In : *Communications in Computational Physics* 10 (2011), p. 1-31.
- [71] S. DELLACHERIE. « Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number ». In : *Journal of Computational Physics* 229 (2010), p. 978-1016.
- [72] B. DESJARDINS et E. GRENIER. « Low Mach number limit of viscous compressible flows in the whole space ». In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455 (1999), p. 2271-2279.

- [73] B. DESJARDINS, E. GRENIER, P.-L. LIONS et N. MASMOUDI. « Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions ». In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 78 (1999), p. 461-471.
- [74] J. DRONIOU, R. EYMARD, T. GALLOUËT, C. GUICHARD et R. HERBIN. *The gradient discretisation method*. T. 82. Mathématiques et Applications. Cf file "changelog_hal.pdf". Springer International Publishing AG, 2018.
- [75] R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN. « Discretisation of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general non-conforming meshes. SUSHI : a scheme using stabilisation and hybrid interfaces ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 30 (2010), p. 1009-1043.
- [76] R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN. *The finite volume method*. Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet et J.L. Lions Editors, North Holland, 2000, p. 715-1022.
- [77] E. FEIREISL. « On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the density is not square integrable ». In : *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 42.1 (2001), p. 83-98.
- [78] E. FEIREISL, T.G. KARPER et M. POKORNÝ. *Mathematical theory of compressible viscous fluids*. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Analysis and numerics, Lecture Notes in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2016, p. xii+186.
- [79] E. FEIREISL et M. LUKÁČOVÁ-MEDVIDOVÁ. « Convergence of a Mixed Finite Element–Finite Volume Scheme for the Isentropic Navier-Stokes System via Dissipative Measure-Valued Solutions ». In : *Foundations of Computational Mathematics* 18.3 (2018), p. 703-730.
- [80] E. FEIREISL, M. LUKÁČOVÁ-MEDVIDOVÁ, H. MIZEROVÁ et B. SHE. « Convergence of a finite volume scheme for the compressible Navier–Stokes system ». In : *ESAIM : M2AN* 53.6 (2019), p. 1957-1979.
- [81] T. GALLOUËT, R. HERBIN et J.-C. LATCHÉ. « Lax–Wendroff consistency of finite volume schemes for systems of non linear conservation laws :extension to staggered schemes ». In : *SeMa Journal* (2022).
- [82] T. GALLOUËT, R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et D. MALTESE. « Convergence of the MAC scheme for the compressible stationary Navier-Stokes equations ». In : *Mathematics of Computation* 87 (2018), p. 1127-1163.
- [83] T. GALLOUËT, R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et N. THERME. « Consistent Internal Energy Based Schemes for the Compressible Euler Equations ». In : *Numerical Simulation in Physics and Engineering : Trends and Applications, 1st ed. 2021 Lecture Notes of the XVIII ‘Jacques-Louis Lions’ Spanish-French School*. Sous la dir. de David GREINER, Maria Isabel ASENSIO et Rafael MONTENEGRO. T. 24. SEMA SIMAI Springer Series. Springer, 2021.
- [84] T. GALLOUËT, R. HERBIN, D. MALTESE et A. NOVOTNÝ. « Error estimates for a numerical approximation to the compressible barotropic Navier–Stokes equations ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 36.2 (2015), p. 543-592.
- [85] T. GALLOUËT et J.-C. LATCHÉ. « Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs- Application to a turbulence model ». In : *Communications in Pure and Applied Analysis* 11 (2012), p. 2371-2391.
- [86] L. GASTALDO, R. HERBIN et J.-C. LATCHÉ. « A discretization of phase mass balance in fractional step algorithms for the drift-flux model ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 31 (2011), p. 116-146.
- [87] L. GASTALDO, R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et N. THERME. « A MUSCL-type segregated–explicit staggered scheme for the Euler equations ». In : *Computers & Fluids* 175 (2018), p. 91-110.
- [88] D. GRAPSAS, R. HERBIN, W. KHERIJI et J.-C. LATCHÉ. « An unconditionally stable staggered pressure correction scheme for the compressible Navier-Stokes equations ». In : *SMAI Journal of Computational Mathematics* 2 (2016), p. 51-97.

- [89] H. GUILLARD. « Recent developments in the computation of compressible low Mach flows ». In : *Flow, Turbulence and Combustion* 76 (2006), p. 363-369.
- [90] H. GUILLARD et A. MURRONE. « On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit : II. Godunov type schemes ». In : *Computers & Fluids* 33 (2004), p. 655-675.
- [91] H. GUILLARD et C. VIOZAT. « On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit ». In : *Computers & Fluids* 28 (1999), p. 63-86.
- [92] J. HAACK, S. JIN et J.-G. LIU. « An all-speed asymptotic-preserving method for the isentropic Euler and Navier-Stokes equations ». In : *Communications in Computational Physics* 12 (2012), p. 955-980.
- [93] F. H. HARLOW et J. E. WELCH. « Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface ». In : *The physics of fluids* 8.12 (1965), p. 2182-2189.
- [94] F.H. HARLOW et A.A. AMSDEN. « A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds ». In : *Journal of Computational Physics* 8 (1971), p. 197-213.
- [95] R. HERBIN, W. KHERIJI et J.-C. LATCHÉ. « On some implicit and semi-implicit staggered schemes for the shallow water and Euler equations ». In : *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 48 (2014), p. 1807-1857.
- [96] R. HERBIN, W. KHERIJI et J.-C. LATCHÉ. « Pressure correction staggered schemes for barotropic one-phase and two-phase flows ». In : *Computers & Fluids* 88 (2013), p. 524-542.
- [97] R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et T.T. NGUYEN. « Consistent segregated staggered schemes with explicit steps for the isentropic and full Euler equations ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 52.3 (2018). This article is a merge of preprints 00821069 and 00821070, p. 893-944.
- [98] R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et T.T. NGUYEN. « Explicit staggered schemes for the compressible Euler equations ». In : *ESAIM : Proc.* 40 (2013), p. 83-102.
- [99] R. HERBIN, J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « Low Mach number limit of some staggered schemes for compressible barotropic flows ». In : *Mathematics of Computation* 90.329 (2021), p. 1039-1087.
- [100] T.K. KARPER. « A convergent FEM-DG method for the compressible Navier-Stokes equations ». In : *Numerische Mathematik* 125.3 (2013), p. 441-510.
- [101] S. KLAINERMAN et A. MAJDA. « Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 34 (1981), p. 481-524.
- [102] J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « A Convergent Staggered Scheme for the Variable Density Incompressible Navier-Stokes Equations ». In : *Mathematics of Computation* 87.310 (2017), p. 581-632.
- [103] J.-C. LATCHÉ et K. SALEH. « A convergent staggered scheme for the variable density incompressible Navier-Stokes equations ». In : *Mathematics of Computation* (2017).
- [104] P.-L. LIONS. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Volume 2 : Compressible Models*. T. 2. Oxford University Press, 1998.
- [105] P.-L. LIONS et N. MASMOUDI. « Incompressible limit for a viscous compressible fluid ». In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 77 (1998), p. 585-627.
- [106] B. MAURY et A. PREUX. « Pressureless Euler equations with maximal density constraint : a time-splitting scheme ». In : *Topological Optimization and Optimal Transport : In the Applied Sciences* 17 (2017), p. 333.
- [107] Y. MOGUEN, T. KOUKSOU, P. BRUEL, J. VIERENDEELS et E. DICK. « Pressure-velocity coupling allowing acoustic calculation in low Mach number flow ». In : *Journal of Computational Physics* 231 (2012), p. 5522-5541.

- [108] S. NOELLE, G. BISPEN, K.R. ARUN, M. LUKÁČOVÁ-MEDVIDÓVÁ et C.-D. MUNZ. « A weakly asymptotic preserving low Mach number scheme for the Euler equations of gas dynamics ». In : *SIAM Journal of Scientific Computing* 36 (2014), p. 989-1024.
- [109] S. NOVO et A. NOVOTNÝ. « On the existence of weak solutions to the steady compressible Navier-Stokes equations when the density is not square integrable ». In : *Journal of Mathematics of Kyoto University* 42.3 (2002), p. 531-550.
- [110] A. NOVOTNÝ et I. STRASKRABĚ. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*. T. 27. Oxford University Press on Demand, 2004.
- [111] C. PERRIN et K. SALEH. « A convergent FV-FE scheme for the stationary compressible Navier-Stokes equations ». In : *IMA Journal of Numerical Analysis* 41.2 (2021), p. 826-899.
- [112] C. PERRIN et K. SALEH. « Numerical staggered schemes for the free-congested Navier-Stokes equations ». In : *SIAM J. Numer. Anal.* 60.4 (2022), p. 1824-1852.
- [113] C. PERRIN et M. WESTDICKENBERG. « One-dimensional granular system with memory effects ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 50.6 (2018), p. 5921-5946.
- [114] C. PERRIN et E. ZATORSKA. « Free/congested two-phase model from weak solutions to multi-dimensional compressible Navier-Stokes equations ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 40.8 (2015), p. 1558-1589.
- [115] R. RANNACHER et S. TUREK. « Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element ». In : *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 8 (1992), p. 97-111.
- [116] S. SCHOCHET. « Hyperbolic-hyperbolic singular limits ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 12 (1987), p. 589-632.
- [117] H. ZAKERZADEH. « On the Mach-uniformity of the Lagrange-projection scheme ». In : *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 51 (2017), p. 1343-1366.

Contributions à l'analyse mathématique et numérique pour les écoulements mono et multiphasiques compressibles et incompressibles

Résumé : Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches est consacré à l'étude mathématique et au développement et à l'analyse de schémas numériques pour des modèles d'écoulements mono et multiphasiques, compressibles et incompressibles. Le manuscrit est composé de deux parties. La première partie est consacrée à l'étude des propriétés mathématiques ainsi qu'au développement et à l'analyse de schémas numériques pour des modèles multiphasiques compressibles. Ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type Euler compressibles permettant de modéliser des écoulements mettant en jeu un nombre arbitraire d'espèces qui se trouvent dans différents états de la matière (gazeux, liquide, solide) ou des espèces qui sont dans le même état mais qui ont des propriétés chimiques différentes (mélanges liquide-liquide non miscibles par exemple). Après avoir introduit les enjeux liés à la modélisation de ces écoulements et les principes de développement des modèles considérés, qui sont des modèles moyennés de type Baer-Nunziato, nous présentons les principales propriétés des modèles (hyperbolicité, existence d'entropies mathématiques, symétrisabilité), puis nous développons un schéma de relaxation à la Suliciu pour la partie convective des modèles, schéma qui s'avère bien plus précis et robuste que les schémas numériques pré-existants. La deuxième partie est consacrée au développement de schémas numériques permettant de traiter aussi bien des écoulements monophasiques compressibles qu'incompressibles. Dans un premier temps, nous présentons les principales difficultés liées à l'approximation numérique des écoulements faiblement compressibles, puis nous présentons une classe de schémas numériques pour les modèles compressibles (Navier-Stokes et Euler compressibles) qui restent stables et précis dans la limite incompressible. Les schémas considérés s'appuient sur une discrétisation spatiale sur grilles décalées (les inconnues scalaires sont discrétisées aux centres des mailles et les vitesses sont discrétisées aux faces) et sur une discrétisation temporelle semi-implicite de type prédiction-correction de pression. Nous présentons des résultats assurant le caractère *asymptotic preserving* dans la limite incompressible ainsi que des résultats de convergence de la solution numérique vers la solution exacte pour les modèles de Navier-Stokes compressibles et incompressibles dans la limite de pas de discrétisation qui tendent vers zéro.

Mots clés : Modélisation en mécanique des fluides ; Analyse numérique, Écoulements multiphasiques ; Écoulements compressibles et incompressibles ; Schémas numériques Volumes Finis.

Image en couverture : Carte du Nil tirée de *كِتَابُ صُورَةِ الْأَرْضِ مِنَ الْمَدُنِ وَالْجِبَالِ وَالْبَحْرِ وَالْحَزَائِرِ وَالْأَنْهَارِ* – *Image de la Terre, des villes, des montagnes, de la mer, des îles et des fleuves*, traduction arabe du traité de géographie de Claude Ptolémée, par Abou Dja'far Mohammad ibn Mousa al-Khwarizmi, parue en 1036. Bibliothèque nationale et universitaire de Strasbourg, Ms.4.247.

