Calcul Différentiel et Analyse Complexe
–
4ème séance de cours

Longueur d'une courbe paramétrée

La longueur d'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est définie par

$$L(\gamma) := \sup\{\sum_{k=1}^{m-1} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| \ : \ t_0 < t_1 < \cdots < t_m \in I\}.$$

Cette définition correspond à l'approximation de la courbe par des polygonale. On peut vérifier facilment une règle de Chasles : si l'intervalle I est la réunion de deux ntervalles I_1 et I_2 ayant un seul point en commun alors $L(\gamma) = L(\gamma_{|_{I_1}}) + L(\gamma_{|_{I_2}})$.

Pour les fonctions C^1 sur un intervalle compact on a une formule plus simple :

Proposition 1. *Si $\gamma = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est C^1, alors $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.*

Démonstration. L'inégalité $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'(t)|dt$ prouve facilement $L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Pour l'inégalité opposée, on utilisera l'uniforme continuité de γ'. On fixe $\varepsilon > 0$ et on trouve $\delta > 0$ tel que $|s - t| < \delta$ implique $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| \leq \varepsilon$. On prend ensuite une partition $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ avec $|t_k - t_{k+1}| < \delta$ pour tout k.

Ensuite on fixe un vecteur unité $e \in \mathbb{R}^n$ (avec $|e| = 1$) et on calcule

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| \geq e \cdot (|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e \cdot \gamma'(t)dt \geq (t_{k+1} - t_k)e \cdot \gamma'(t_k) - \varepsilon(t_{k+1} - t_k).$$

On prend un vecteur e tel que $e \cdot \gamma'(t_k) = |\gamma'(t_k)|$ (si $\gamma'(t_k) \neq 0$ on prend $e = \gamma'(t_k)/|\gamma'(t_k)|$, sinon tout vecteur unité convient si $\gamma'(t_k) = 0$) et on obtient donc

$$|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| \geq (t_{k+1} - t_k)|\gamma'(t_k)| - \varepsilon(t_{k+1} - t_k).$$

Ensuite, on écrit aussi

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'(t)|dt \leq (t_{k+1} - t_k)|\gamma'(t_k)| + \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'(t) - \gamma'(t_k)|dt \leq (t_{k+1} - t_k)|\gamma'(t_k)| + \varepsilon(t_{k+1} - t_k).$$

Ceci donne

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\gamma'(t)|dt \leq |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| + 2\varepsilon(t_{k+1} - t_k).$$

En prenant la somme sur $k = 1, \ldots, m-1$ on trouve

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq \sum_{k=1}^{m-1} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| + 2\varepsilon(b - a) \leq L(\gamma) + 2\varepsilon(b - a),$$

et on conclut en prenant $\varepsilon \to 0$.

□

Une courbe est dite parametrée par longueur d'arc si elle est C^1 et $|\gamma'| = 1$. On a la propriété suivante

Proposition 2. *Toute courbe régulière est équivalente à une courbe parametrée par longueur d'arc.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ la courbe qu'on veut reparametrer. On définit $\ell(t) := L(\gamma_{|[0,t]})$. La fonction $\ell : [0,T] \to [0, L(\gamma)]$ est croissante, et même strictement croissante parce que le seul cas où la longueur n'augmente pas en passant de $[0,t]$ à $[0,t+h]$ est lorsque γ est constante sur $[t,t+h]$, mais cela est en contradiction avec le fait qu'on l'a supposée régulière. ℓ est donc un homéomorphisme, et même un difféomorphisme puisque la dérivée de ℓ est $|\gamma'(t)|$ (en utilisant le résultat précédent et le théorème fondamental du calcul), qui ne s'annule pas.

Soit ℓ^{-1} l'application reciproque de ℓ. La courbe $\gamma \circ \ell^{-1} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ est parametrée par longueur d'arc, ce qu'on peut vérifier facilement (plus facilement que ce qui a été fait en classe, il suffit de calculer la dérivée de la fonction composée). $\square$

Courbure et torsion

Si γ est une courbe parametrée par longueur d'arc on définit sa courbure à l'instant t comme $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$.

Si γ est une courbe régulière qui n'est pas parametrée par longueur d'arc on écrit $\gamma = \gamma_2 \circ \phi$, où γ_2 est parametrée par longueur d'arc et ϕ est une reparamétrisation. On définit alors la courbure de γ à l'instat $\phi(t)$ comme celle de γ_2 à l'instant t.

On a la formule suivante

Proposition 3. *La courbure d'une courbe régulière γ à l'instant t est donnée par*

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Démonstration. On écrit $\gamma \circ \phi = \gamma_2$, avec γ_2 parametrée par longueur d'arc. On dérive :

$$\gamma' \circ \phi phi' = \gamma_2'; \quad \gamma'' \circ \phi|\phi'|^2 + \gamma' \circ \phi\phi'' = \gamma_2''.$$

Puisque γ_2 est parametrée par longueur d'arc, γ_2'' est orthogonal à γ_2' et donc à $\gamma' \circ \phi$. On prend donc le produit vecteur de la dernière expression avec $\gamma' \circ \phi$, et on obtient

$$\gamma' \circ \phi \wedge \gamma'' \circ \phi|\phi'|^2 = \gamma' \circ \phi \wedge \gamma_2'';$$

on calcule la norme et on utilise que les vecteurs dans le dernier produit vecteur sont orthogonaux :

$$|\gamma' \circ \phi \wedge \gamma'' \circ \phi||\phi'|^2 = |\gamma' \circ \phi||\gamma_2''|.$$

En utilisant $\kappa(\phi(t)) = |\gamma_2''|$ et $|\phi'| = 1/|\gamma' \circ \phi|$ on obtient

$$\kappa(\phi(t)) = \frac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3} \circ \phi,$$

ce qui est l'énoncé en $\phi(t)$ au lieu de t (mais t est arbitraire). $\square$

Pour une courbe plane (i.e. $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$) on a l'énoncé suivant

Proposition 4. *Si la courbure d'une courbe C^3 est une constante $\kappa > 0$ alors cette courbe est un bout de cercle.*

Démonstration. Puisque les propriétés de l'énoncé ne dépendent pas de la paramétrisation, on supposera que γ est parametrée par longueur. On utilise la formule pour le centre du cercle osculateur. Le centre du cercle osculateur à γ à l'instant t est donné par

$$x(t) = \gamma(t) + \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|^2}.$$

On voudrait d'abord démontrer que x est constant en temps. On le dérive, en utilisant le fait que $|\gamma''|$ est constant égal à κ :

$$x'(t) = \gamma'(t) + \kappa^{-2}\gamma'''(t).$$

On voudrait démontrer $x'(t) = 0$. Puisqu'on est dans $\mathbb{R}^2$ et $\gamma'(t), \gamma''(t)$ sont deux vecteurs orthogonaux non nuls il suffit pour cela de prouver $x'(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ et $x'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$. On utilise que $|\gamma'|^2$ est constant, ainsi que $|\gamma''|^2$, ce qui donne

$$\gamma' \cdot \gamma'' = 0, \quad \gamma'' \cdot \gamma''' = 0$$

mais également, en dérivant une fois de plus la première égalité

$$|\gamma''|^2 + \gamma' \cdot \gamma''' = 0.$$

Quand on calcule $x'(t) \cdot \gamma''(t)$ les deux termes qu'on obtient s'annulent, et quand on calcule $x'(t) \cdot \gamma'(t)$ on obtient

$$x'(t) \cdot \gamma'(t) = |\gamma'(t)|^2 + \kappa^{-2}\gamma'(t) \cdot \gamma'''(t) = 1 + \kappa^{-2}(-|\gamma''(t)|^2) = 0.$$

Ceci démontre que $x(t)$ est constant et égal à un point fixe x. Or, la distance entre $\gamma(t)$ et $x = x(t)$ est κ^{-1} et constante, donc γ vit dans le cercle de rayon κ^{-1} et centre x. □

Pour les courbes à valeurs dans un espace de dimansion supérieure cela est faux, et le contre-example est le suivant :

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), t),$$

une courbe régulière dans $\mathbb{R}^3$ appelée *hélice*.

Pour les courbes dans $\mathbb{R}^3$ une notion importante est celle de torsion, qui détermine combien elle sont planes. On la définitit pour une courbe C^3 birégulière comme étant

$$\Theta(t) := \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|^2}.$$

On a le théorème suivant

Théorème 1. *Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe C^3 birégulière paraerée par longeur, alors Θ est identiquement nulle si et seulement si γ est une courbe plane.*

Démonstration. Tout d'abord on remarque que, si γ est plane, alors $\gamma'(t), \gamma''(t)$ et $\gamma'''(t))$ appartiennent forcement à un même sous-espace vectoriel de dimension deux, et le déterminant au numérateur de $\Theta(t)$ s'annule. Ensuite, on suppose $\Theta(t) = 0$ pour tout t, et on écrit $\gamma'''(t) = a(t)\gamma'(t) + b(t)\gamma''(t)$ où $a(t) = \gamma'''(t) \cdot \gamma'(t)$ et $b(t) = \gamma'''(t) \cdot \gamma''(t)$, en utilisant le fait que $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est une base orthogonale du sous-espace vectoriel que ces deux vecteurs engendrent.

Soit $v(t) = \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$. Un calcul simple donne

$$v'(t) = \gamma''(t) \wedge \gamma''(t) + \gamma'(t) \wedge \gamma'''(t) = \gamma'(t) \wedge (a(t)\gamma'(t) + b(t)\gamma''(t)) = b(t)v(t).$$

Donc v résout $v' = bv$ et, si on pose $B(t) = \int_0^t b(s)ds$, on a $v(t) = v(0)e^{B(t)}$.

Ensuite, en supposant par simplicité $0 \in I$, on définit $c(t) = (\gamma(t) - \gamma(0)) \cdot v(t)$. On dérive et on obtient

$$c'(t) = b(t)c(t) + \gamma'(t) \cdot v(t) = b(t)c(t),$$

où on a utilisé l'orthogonalité de $v(t)$ et $\gamma'(t)$. Donc on a $c(t) = c(0)e^{B(t)}$. Puisqu'on a $c(0) = 0$, ceci donne $c(t) = 0$ pour tout t, et γ vit dans le plan orthogonal à $v(0)$, qui est non nul parce que $\gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$ sont non nuls et orthogonaux. □

Dans le théorème ci-dessus l'hypothèse que γ soit birégulière et parametrée pas longueur d'arc nous a servi pour dire que γ' et γ'' formaient une base d'un espace de dimension deux. Pour cela, la vraie hypothèse serait plutôt $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0$, ce qui est d'ailleurs nécessaire pour définir le dénominateur dans la torsion. Par contre, on voit qu'une hypothèse de ce type est nécessaire. En effet, si η est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ qui s'annule sur une demi-droite $[-\varepsilon, \infty[$ pour $\varepsilon > 0$, on pourrait prendre

$$\gamma(t) = (t, \eta(t), \eta(-t)).$$

Cette courbe est contenue dans le plan xy pour $t < -\varepsilon$ et dans l'espace xz pour $t > \varepsilon$. Pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ elle est contenue dans l'axe x, et $\gamma'' = 0$. Partout la torsion est nulle. Pourtant, elle n'est pas plane, et c'est cette partie où $\gamma' \wedge \gamma'' = 0$ qui lui donne le temps de changer de plan.