Calcul Différentiel et Analyse Complexe
–
5ème séance de cours

Graphes et courbes définies par une équation

Un graphe est un sous-ensemble du plan de la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\, y = \phi(x)\}$ pour une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ opportune. C'est en même temps une courbe parametrée, en prenant $\gamma(t) = (t, \phi(t))$ et l'ensemble où une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'annulle (la fonction $f(x,y) = y - \phi(x)$).

Si on le voit comme une courbe parametrée, c'est surement une courbe régulière, puisque $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + |\phi'(t)|^2} \geq 1 > 0$. Aussi, on peut calculer sa longueur, qui donne $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + |\phi'(t)|^2}dt$.

Une fonction C^1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ peut être utilisée pour définir l'ensemble de ses zéros $Z = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. Si en $(x_0, y_0) \in Z$ on a $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit que Z est, localement autour de (x_0, y_0), un graphe (soit avec $y = \phi(x)$, soit avec $x = \phi(y)$). En particulier, si $\nabla f \neq 0$ sur Z, alors Z est localement une courbe régulière. Il se peut que Z ne soit pas globalement une courbe, par exemple parce que Z est disconnexe (penser à $f(x,y) = ((x-2)^2 + y^2 - 1)((x+2)^2 + y^2 - 1)$, dont l'ensemble des zéros est la réunion de deux cercles disjoints). Aussi, il se peut qu'une courbe parametrée non-injective donne lieu à un ensemble qui n'est pas l'ensemble des zéros d'une fonction C^1 qui permet l'application du théorème des fonctions implicites (penser par exemple à $\gamma(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta)\cos(\theta)$, qui donne une paramétrisation de $Z = \{(x,y) : x^2 - x^4 - y^2 = 0\}$).

Nous avons vu la formule pour la courbure d'une courbe définie par une équations. Supposons que γ est une parametrisation, par longueur d'arc, de $\{f = 0\}$. Alors $f(\gamma(t)) = 0$ et, en dérivant, on obtient

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t) + D^2 f(\gamma(t))\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

Cela nous dit que ∇f est orthogonale à la tangente (c'est donc normal) et donc parallèle à γ'' (qui est aussi orthogonal à la tangente). Si on prend les modules de la dernière égalité on obtient

$$|\nabla f(\gamma(t))||\gamma''(t)| = |\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t)| = |D^2 f(\gamma(t))\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)|.$$

Or, si on exprime $D^2 f(\gamma(t))$ dans la base orthonormée $(\gamma'(t), \nabla f(\gamma(t))/|\gamma'(t)|)$, le dernie terme est un élément de la diagonale de cette matrice. On peut donc l'exprimer comme la trace, $Tr(D^2 f(x)) = \Delta f(x)$ (appelée le Laplacien de f) moins l'autre élément sur la diagonale (il faut se souvenir qu'on est en dimension deux) et on obtient

$$\kappa(t) := \frac{|\nabla f|^2 |\Delta f - D^2 f \nabla f \cdot \nabla f}{|\nabla f|^3}(\gamma(t)).$$

Autrement dit, la courbure de la ligne de nveau $\{f = 0\}$ en un point dépend du Laplacien de f, de la Hessienne calculée sur le gradient, et du module du gradient de f, en ce point.

Géodésiques sur la sphère

On rappelle que la longueur d'une courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est égale à $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ dès que cette courbe est C^1.

On considère des courbes $\gamma : [0,T] \to S \subset \mathbb{R}^3$ où $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| = 1\}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On considère deux vecteurs $v_0, v_1 \in S$ tels que $v_0 \cdot v_1 = 0$ et on prend la courbe

$$\gamma(t) = v_0 \cos(t) + v_1 \sin(t).$$

Cette courbe représente un arc de grand cercle sur la sphère. Elle est C^1, est parametrée par longueur d'arc, puisque $\gamma'(t) = -v_0 \sin(t) + v_1 \cos(t)$ et $|\gamma'(t)|^2 = |v_0|^2 \sin^2(t) + |v_1|^2 \cos^2(t) - 2v_0 \cdot v_1 \sin(t)\cos(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, et elle satisfait $\gamma''(t) = -\gamma(t)$.

On veut démonter que, pour tout T suffisamment petit, la courbe γ est celle qui réalise la longueur minimale parmi celles qui ont même point de départ et même point d'arrivée et sont à valeurs dans S. Ces courbes sont également appelées *géodésiques*. Pour ce faire on commence par ce simple lemme.

Lemma 1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble quelconque. Si $\gamma : [0,T] \to A$ est une courbe parametrée par longeuur d'arc qui satisfait $\int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \le \int_0^T |\tilde\gamma'(t)|^2 dt$ pour toute courbe régulière $\tilde\gamma : [0,T] \to A$ avec $\tilde\gamma(0) = \gamma(0)$ et $\tilde\gamma(T) = \gamma(T)$. Alors on a aussi $L(\gamma) \le L(\tilde\gamma)$ pour toutes les mêmes courbes.*

Démonstration. Si on prend une courbe $\tilde\gamma : [0,T] \to A$ il en existe une autre, qu'on appelera $\hat\gamma$, qui lui est équivalente, et qui est parametrée à vitesse constante (il suffit de reprendre celle qui est parametrée par longueur et de faire un changement de variable pour la définir sur $[0,T]$). On a alors $L(\tilde\gamma) = L(\hat\gamma)$ et $\int |\hat\gamma'|^2 = T(L(\hat\gamma)/T)^2 = L(\hat\gamma)^2/T$. On a alors, en utilisant $|\gamma'(t)| = 1$,

$$T = \int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \le \int_0^T |\hat\gamma'(t)|^2 dt = L(\hat\gamma)^2/T.$$

Ceci donne $L(\tilde\gamma) = L(\hat\gamma) \ge T = \int_0^T |\gamma'(t)dt = L(\gamma)$. □

A noter que l'hypothèse que γ est parametrée par longueur d'arc est inutile : on pourrait déduire de la propriété "$\int_0^T |\gamma'(t)|^2 dt \le \int_0^T |\tilde\gamma'(t)|^2 dt$ pour toute courbe régulière $\tilde\gamma : [0,T] \to A$ avec $\tilde\gamma(0) = \gamma(0)$ et $\tilde\gamma(T) = \gamma(T)$" le fait qu'elle est forcement parametrée à vitesse constante.

Avec ce lemme en tête on peut prouver

Proposition 1. *Les arcs de grand cercle définis ci-dessus sont des géodésiques.*

Démonstration. Il suffit de prendre γ de la forme $\gamma(t) = v_0 \cos(t) + v_1 \sin(t)$ et $\tilde\gamma : [0,T] \to S$ de la forme $\tilde\gamma = \gamma + \eta$ avec $\eta(0) = \eta(T) = 0$, et prouver $\int_0^T |\gamma'|^2 \le \int_0^T |\gamma' + \eta'|^2$. Le fait que $\tilde\gamma$ est à valeur dans S impose $|\gamma + \eta|^2 = 1$, donc $|\eta|^2 + 2\gamma \cdot \eta = 0$.

On a

$$\int_0^T |\gamma' + \eta'|^2 = \int_0^T |\gamma''|^2 + \int_0^T |\eta'|^2 + \int_0^T 2\gamma' \cdot \eta'.$$

On intègre par partie le dernier terme et, en utilisant $\eta(0) = \eta(T) = 0$, on a $\int_0^T 2\gamma' \cdot \eta' = -\int_0^T 2\gamma'' \cdot \eta$. Ensuite on utilise $\gamma'' = -\gamma$ et on obtient donc $\int_0^T 2\gamma \cdot \eta = -\int_0^T |\eta|^2$ en utilisant aussi $|\eta|^2 + 2\gamma \cdot \eta = 0$.

On a donc

$$\int_0^T |\tilde\gamma'|^2 = \int_0^T |\gamma''|^2 + \int_0^T |\eta'|^2 - \int_0^T |\eta|^2.$$

et on conclut grâce au lemme suivant, qui établit $\int_0^T |\eta'|^2 \ge \int_0^T |\eta|^2$ pour T petit. □

Lemma 2. *Si $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction C^1 avec $\eta(0) = 0$ alors on a $\int_0^T |\eta|^2 \le T^2 \int_0^T |\eta|^2$.*

Démonstration. On a $\eta(t) = \int_0^t \eta'(s)ds$ et donc

$$|\eta(t)| \leq \int_0^t |\eta'(s)|ds \leq \int_0^T |\eta'(s)|ds \leq \sqrt{T}\sqrt{\int_0^T |\eta'(s)|^2 ds}.$$

Ceci implique

$$\int_0^T |\eta(t)|^2 \leq T \cdot T \cdot \int_0^T |\eta'(s)|^2 ds.$$

$\square$

On observe que la constante dans cette inégalité, connue comme *inégalité de Poincaré* peut être améliorée :

— si au lieu de majorer $\int_0^t |\eta'(s)|ds \leq \int_0^T |\eta'(s)|ds$ on garde la dépendance en t on obtient $|\eta(t)| \leq \sqrt{t}\sqrt{\int_0^t |\eta'(s)|^2 ds} \leq \sqrt{t}\sqrt{\int_0^T |\eta'(s)|^2 ds}$ et, en intégrant, on gagne un facteur 2.

— si on rajoute $\eta(T) = 0$ on peut estimer comme on a fait $\eta(t)$ pour $t \leq T/2$ mais intégrer à partir de T pour $t \geq T/2$. On obtient alors $|\eta(t)| \leq \sqrt{\min\{t, T/2 - t\}}\sqrt{\int_0^T |\eta'(s)|^2 ds}$ et en intégrant on gagne un autre facteur 2 (puisque $\int_0^T \min\{t, T/2 - t\} = T^2/4$.

— La constante optimale dans l'inégalité de Poincaré quand on suppose $\eta(0) = \eta(T) = 0$ est en fait $(T/\pi)^2$. Une manière simple de le voir est d'utiliser les séries de Fourier : si $\eta(t) = \sum_n a_n e^{in\pi t/T}$ alors $\int_0^T |\eta^2| = \sum |a_n|^2$ et $\int_0^T |(\eta')^2| = \sum n^2(\pi/T)^2|a_n|^2$.

Le résultat qu'on a montré prouve juste que les arcs de grand cercle sont des géodésiques optimales pour des petits intervalles de temps, et si on utilise la constante optimale dans Poincaré on trouve le résultat attendu, qu'elles minimisent tant qu'on a $T \leq \pi$, c'est-à-dire jusqu'au point opposé sur la sphère.