Calcul Différentiel et Analyse Complexe
–
9ème séance de cours

Laplacien et principe du maximum

On rappelle des définitions et faits suivants

— Le laplacien Δg d'une fonction g de n variables est défini comme $\Delta g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$.

— Une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si $\Delta g = 0$ sur Ω.

— Si $g \in C^2(\Omega)$ admet un maximum local en un point $x_0 \in \Omega$, alors $\Delta g(x_0) \leq 0$ (puisque toutes les dérivées secondes pures sont négatives, et donc leur somme aussi).

— Un calcul simple donne $\Delta(g^2) = 2|\nabla g|^2 + 2g\Delta g$. En particulier, si g est harmonique, on a $\Delta g^2 = 2|\nabla g|^2 \geq 0$.

— Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique alors pour tout $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \Omega$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_0 + r\gamma(\theta))d\theta = g(x_0)$$

où $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Si $\Delta g \geq 0$, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_0 + r\gamma(\theta))d\theta \geq g(x_0),$$

avec égalité si et seulement si $\Delta g = 0$ sur $B(x_0, r)$. Ces deux propriétés (*propriétés de la moyenne*) seront prouvées plus tard.

On veut maintenant prouver le fait suivant

Proposition 1. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $|f|$ admet un maximum local en $x_0 \in \Omega$, alors f est constante.*

Démonstration. On écrit $f = u + iv$ avec u, v réelles, et on rappelle que u et v comme conséquence des relations de Cauchy-Riemann, sont harmoniques. De plus, si $|f|$ admet un maximum local, $|f|^2 = u^2 + v^2$ aussi, et on a $\Delta(|f|^2) = 2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)$.

En prenant r tel que $|f|^2 \leq |f|^2(x_0)$ sur $B(x_0, r) \subset \Omega$ on a

$$|f|^2(x_0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2(x_0 + r\gamma(\theta))d\theta \geq |f|^2(x_0),$$

où la première inégalité est justifiée par la maximalité en x_0 et la deuxième par $\Delta(|f|^2) \geq 0$.

Comme on a en fait égalité, alors $\Delta(|f|^2) = 0$ dans $B(x_0, r)$. Ceci implique $\nabla u = \nabla v = 0$ sur la même boule, et f est constante sur cette boule. Par prolongement analytique elle est alors constante sur Ω. $\square$

Il nous reste à prouver la propriété de la moyenne. On a d'abord besoin de la formule de Stokes dans le cas d'un disque de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert bordé par un lacet injectif $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ et $v : \Omega_0 \to \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs régulier défini sur $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$, on a*

$$\int_\Omega \nabla \cdot v = \int_{\partial\Omega} v \cdot \mathbf{n},$$

où $\nabla \cdot v$ est la divergence de v, définie par $\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$, $\mathbf{n}$ est la normale sortante à Ω et l'intégrale de bord est définie par $\int_{\partial\Omega} v \cdot \mathbf{n} := \int_a^b v(\gamma) \cdot R\gamma' dt$, où R est la rotation de 90° qui transforme le vecteur tangent γ' en un vecteur normal sortant.

Démonstration. Le résultat est facile à démontrer si $\Omega =]a,b[\times]c,d[$ est un rectangle, parce que

$$\int_a^b dx_1 \int_c^d dx_2 \nabla\cdot v = \int_a^b dx_1 \int_c^d dx_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \int_c^d dx_2 \int_a^b dx_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$
$$= \int_a^b [v_2(x_1,d) - v_2(x_1,c)]dx_1 + \int_c^d [v_1(b,x_2) - v_1(a,x_2)]dx_2,$$

ce qui correspond à l'énoncé puisque le vecteur normal au bord du rectangle vaut, selon les côtés $(0,1),(0-1),(1,0),(-1,0.$

On peut aussi vérifier le résultat pour tout Ω dont le bord soit un lacet composé de segements horizontau et verticaux, puisqu'Ω serait alors une réunion finie de rectangles et les intégrales sur les parties de bord communes à deux rectangles s'effacent.

Pour le cas d'un lacet quelconque, on l'approche par une suite γ_n de lacets "horizontoverticaux", en approchant donc le domaine Ω par une suite de domaines Ω_n avec $\partial\Omega_n = \gamma_n$. On a donc

$$\int_\Omega \nabla\cdot v = \lim_n \int_\Omega \nabla\cdot v = \int_a^b v(\gamma_n)\cdot R\gamma_n' dt.,$$

Il suffit de vérifier $\int_a^b v(\gamma_n)\cdot R\gamma_n' dt - \int_a^b v(\gamma)\cdot R\gamma' dt \to 0$. Pour ce faire, on choisit des courbes γ_n qui touchent γ de manière à ce que la différence entre ces deux intégrales soit la somme de plusieurs intégrales sur des petits lacets. On peut imposer que δ_n, le diamètre maximal de ces petits lacets, tende vers 0, et la longueur totale de ces lacets peut être estimée par $C = L(\gamma) + 2\mathrm{diam}(\gamma)$.

Or, sur chaque petit lacet, qu'on appelera η_j (défini sur un intervalle $[a_j,b_j]$), si on soustrait une constante $v_{(j)}$ à v l'intégrale ne change pas, puisque $\int_{a_j}^{b_j} v_{(j)}\cdot R\eta_j' dt = 0$. Par conséquent, si on prend $v_{(j)}$ égal à la valeur moyenne de v sur le lacet η_j, la différence qu'on veut estimer est égale à $\sum_j \int_{a_j}^{b_j} (v(\eta_j) - v_{(j)})\cdot R\eta_j' dt \le \sum_j \omega(\delta_n) L(\eta_j) \le C\omega(\delta_n) \to 0$, où $\omega(\delta_n)$ représente l'oscillation maximale de v sur un ensemble de diamètre δ_n. □

Avec ce résultat en tête, il est possible de prouver la propriété de la moyenne.

Proposition 3. *La fonction $\phi(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x_0 + r\gamma(\theta))d\theta$ est telle que $\phi'(r) = 0$ si $\Delta g = 0$ sur $B(x_0,r)$ et $\phi'(r) = 0$ si $\Delta g \ge 0$ sur $B(x_0,r)$ (et dans ce dernier cas, on a $\phi'(r) = 0$ si et seulement si $\Delta g = 0$ sur $B(x_0,r)$).*

Démonstration. Par dérivation sous le signe d'intégrale on a

$$\phi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla g(x_0 + r\gamma(\theta))\cdot\gamma(\theta)d\theta.$$

Cette intégale est une intégrale de bord de la forme

$$\int_{\partial\Omega} v\cdot\mathbf{n},$$

pour $\Omega = B(x_0,r)$ et $v = \nabla g$. Grâce à la formule de Stokes cela donne (utilisant $\Delta g = \nabla\cdot(\nabla g)$)

$$\phi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{B(x_0,r)} \Delta g$$

et on conclut facilement. □