C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 853–858

Calcul des variations/*Calculus of variation*
(Économie mathématique/*Mathematical Economics*)

Asymptotique d'un problème de positionnement optimal

Guy Bouchitté, Chloé Jimenez, Mahadevan Rajesh

Laboratoire d'analyse non linéaire appliquée, Université de Toulon et du Var, BP 132, 83957 La Garde cedex, France

Reçu le 13 septembre 2002 ; accepté le 28 septembre 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On considère le problème de positionnement optimal de n centres de production pour une répartition non uniforme de la population. Le critère d'optimisation est une moyenne pondérée de la fonction distance au centre de production le plus proche. Dans cette Note, on étudie le comportement asymptotique du problème quand n tend vers l'infini en le reliant à l'asymptotique d'un problème de transport de masse de type Monge–Kantorovich. ***Pour citer cet article : G. Bouchitté et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 853–858.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Asymptotic of an optimal location problem

Abstract We consider the problem of optimal location of production centres to serve a non-uniform distribution of customers. The location is required to be optimal with respect to the cost of transportation which is modeled by a weighted average of the distance function to the nearest production centre. In this Note we study the asymptotic behaviour of the problem as the number of production centres increases. This is done in connection with the theory of Monge–Kantorovich for mass transportation. ***To cite this article: G. Bouchitté et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 853–858.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^d$ and let $f : \Omega \mapsto]0, +\infty[$ be a non-negative lower semicontinuous function in $L^1(\Omega)$. The cost of transport of a mass, distributed according to f, onto a finite number n of points given in Ω can be studied using the Wasserstein distance W_1 defined in (3) below. The optimal cost of repartition of f among the n points is given as in (4). We further like the location of the n points to be such that it minimizes the above cost. It is clear that the minimal cost $\varphi_n(f, \Omega)$, given by (1), tends to zero as the number of points n tends to infinity. Our interest, in this article, is to give exact asymptotics of $\varphi_n(f, \Omega)$ as $n \to \infty$. We show that the limit as $n \to \infty$ of the sequence $n^{1/d}\varphi_n(f, \Omega)$ exists and is given by

$$\varphi_\infty(f, \Omega) = \inf\left\{ C_d \int_\Omega \frac{f(x)}{\mu_a^{1/d}(x)} \, dx : \mu \in \mathcal{M}_+(\overline{\Omega}),\ \int_{\overline{\Omega}} \mu \leqslant 1 \right\},$$

Adresses e-mail : bouchitte@univ-tln.fr (G. Bouchitté); jimenez@univ-tln.fr (C. Jimenez); rajesh@univ-tln.fr (M. Rajesh).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S1631-073X(02)02575-X/FLA

where $\mathcal{M}_+(\overline{\Omega})$ is the set of finite positive Borel measures on $\overline{\Omega}$, μ_a denotes the Lebesgue density of μ and C_d is a universal constant depending only on d. Previous infimum is reached at a unique μ which is the probability measure associated with the limit as $n \to \infty$ of optimal repartitions of points.

We see that the problem of our interest also arises when, during the approximation of f by discrete measures in the Wasserstein distance, we penalize the use of discrete measures whose support have a large cardinality (see (10)). The latter problem gives rise to the study of the variational convergence of functionals $\phi_\varepsilon(\nu, \mu)$, defined in (5) for the vague topology on $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$. Our main result is the following, of which the asymptotics for $\varphi_n(f, \Omega)$ can be seen as a consequence (see relation (7)):

THEOREM. – *The Γ-limit of the sequence of functionals ϕ_ε exists and it is the functional given by*:

$$\phi(\nu, \mu) = \begin{cases} C_d \displaystyle\int_\Omega \frac{f(x)}{\mu_a^{1/d}(x)}\,\mathrm{d}x & \textit{if } \nu = f, \\ +\infty & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to]0, +\infty[$ une fonction de $\mathrm{L}^1(\Omega)$ que nous supposerons s.c.i. Parfois f sera identifiée à un élément de l'espace $\mathcal{M}_+(\overline{\Omega})$ des mesures Boréliennes positives bornées sur le compact $\overline{\Omega}$. Le problème de positionnement optimal dans Ω s'écrit alors de la façon suivante :

$$\varphi_n(f, \Omega) = \inf\left\{ \int_\Omega d(x, \Sigma) f(x)\,\mathrm{d}x : \sharp(\Sigma) \leqslant n \right\}, \tag{1}$$

où le symbole $\sharp(\cdot)$ désigne le cardinal d'une partie de $\mathbb{R}^d$. On peut interpréter (1) comme le problème de transport d'une densité de population f sur un certain nombre de centres de productions placés sur Σ. L'étude du comportement asymptotique de $\varphi_n(f, \Omega)$ quand $n \to +\infty$ a été suggérée dans Morgan et Bolton [1] et Buttazzo [4]. Il n'est pas difficile de montrer que $\varphi_n(f, \Omega)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Plus précisément, il existe deux constantes $0 < c_1 \leqslant c_2$ telles que :

$$\frac{c_1}{n^{1/d}} \leqslant \varphi_n(f, \Omega) \leqslant \frac{c_2}{n^{1/d}}. \tag{2}$$

Dans le cas $d = 2$, $\Omega =]0, 1[^2$ et $f \equiv 1$, Morgan a donné plusieurs arguments permettant de démontrer que la limite de $n^{1/d}\varphi_n$ est égale à la distance moyenne au centre d'un hexagone régulier. Ici, nous considérons le cas général et démontrons (Corollaire 3) que la suite $n^{1/d}\varphi_n(f, \Omega)$ converge vers l'infimum d'un problème variationnel (9) obtenu comme limite d'une suite de problèmes de transports de masse. Ces résultats sont détaillés dans la Section 2 suivis dans la Section 3 de certains éléments de démonstration.

2. Approche via la distance de Wasserstein et résultats de convergence

Pour toutes mesures $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{M}_+(\overline{\Omega})$, la distance de Wasserstein $W_1(\lambda_1, \lambda_2)$ est définie par :

$$W_1(\lambda_1, \lambda_2) := \inf\left\{ \int_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} |x - y|\,\mathrm{d}\gamma(x, y) : (\pi_1)_\sharp\gamma = \lambda_1,\ (\pi_2)_\sharp\gamma = \lambda_2 \right\}, \tag{3}$$

où π_1 et π_2 sont les projections suivant les coordonnées dans $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ (avec la convention $W_1(\lambda_1, \lambda_2) = +\infty$ si $\int_{\overline{\Omega}} \lambda_1 \neq \int_{\overline{\Omega}} \lambda_2$). Le lien entre la distance de Wasserstein et le problème de positionnement optimal est obtenu en remarquant que, pour tout $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\int_\Omega d(x, \Sigma) f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{ W_1(f, \nu) : \nu \in \mathcal{M}_+(\overline{\Omega}),\ \mathrm{spt}(\nu) \subset \Sigma \right\}. \tag{4}$$

Pour toute valeur de paramètre $\varepsilon > 0$, on introduit la fonctionnelle ϕ_ε définie sur $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$ par :

$$\phi_\varepsilon(\nu,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} W_1(f,\nu) & \text{si } \mu(\cdot) = \varepsilon^d G(\nu,\cdot) \text{ et } \sharp(\operatorname{spt}\nu) < +\infty, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5}$$

où $G(\nu,\cdot)$ est la mesure Borélienne définie pour tout Borélien B par :

$$G(\nu,B) = \sharp\big(\operatorname{spt}(\nu)\cap B\big). \tag{6}$$

Alors, d'après (4), et posant $\varepsilon = n^{-1/d}$, on obtient les égalités :

$$n^{1/d}\varphi_n(f,\Omega) = \inf_\nu \left\{ \frac{1}{\varepsilon} W_1(f,\nu) : \sharp(\operatorname{spt}\nu) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^d} \right\} = \inf_{(\nu,\mu)} \big\{ \phi_\varepsilon(\nu,\mu) : \mu\big(\overline{\Omega}\big) \leqslant 1 \big\}. \tag{7}$$

En vertu de (7), la convergence de la quantité $n^{1/d}\varphi(f,\Omega)$ va être liée à la Γ-convergence de la suite ϕ_ε relativement à la topologie $\star$ faible de $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$. C'est l'objet du résultat principal de cette Note (Théorème 2). On utilisera le résultat suivant :

LEMME 1. – *La suite $n \to n^{1/d}\varphi_n(1,Q)$ (où $Q =]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[^d$) admet une limite C_d (>0) quand $n \to +\infty$.*

Remarque 1. – Le calcul explicite de la constante C_d est un problème ouvert excepté dans le cas $d = 2$ où, d'après [1], on obtient que C_2 est égale à la distance moyenne au centre d'un hexagone régulier de surface unitaire ($C_2 \sim 0.3772$).

Soit ϕ la fonctionnelle définie sur $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$ par :

$$\phi(\nu,\mu) := \begin{cases} C_d \displaystyle\int_\Omega \frac{f(x)}{\mu_a^{1/d}(x)}\,\mathrm{d}x & \text{si } \nu = f, \\ +\infty & \text{sinon;} \end{cases} \tag{8}$$

où $\mu_a = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}x$ est la densité de Radon Nykodym de μ par rapport à $\mathcal{L}^d \llcorner_\Omega$ et C_d est la constante définie dans le lemme ci dessus.

THÉORÈME 2. – *Supposons f s.c.i. positive. Alors ϕ_ε Γ-converge vers la fonction ϕ définie sur $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$ par* (8).

Alors de (7) et du Théorème 2, on déduit :

COROLLAIRE 3. – *La suite $n^{1/d}\varphi_n(f,\Omega)$ converge quand $n \to +\infty$ vers une limite finie strictement positive donnée par :*

$$\varphi_\infty(f,\Omega) = \min\left\{ C_d \int_\Omega \frac{f(x)}{\mu_a^{1/d}(x)}\,\mathrm{d}x : \mu \in \mathcal{M}_+\big(\overline{\Omega}\big),\ \int_{\overline{\Omega}} \mu \leqslant 1 \right\} = C_d \left(\int_\Omega (f(x))^{d/(d+1)}\,\mathrm{d}x \right)^{(d+1)/d}. \tag{9}$$

Remarque 2. – Une généralisation du problème de positionnement optimal est obtenue en considérant la famille de problèmes

$$h(\varepsilon) = \inf_{\nu \in \mathcal{M}_+(\overline{\Omega})} \big\{ W_1(f,\nu) + \varepsilon G(\nu,\Omega) \big\}. \tag{10}$$

Ici le petit paramètre ε a pour rôle de régler la pénalisation des mesures atomiques dont le support a un grand cardinal. Pour G donné par (6), on déduit du Théorème 2 que $h(\varepsilon) \sim \lambda_d\, \varepsilon^{1/(d+1)}(\int_\Omega f^{d/(d+1)}\,\mathrm{d}x)$ pour une constante convenable λ_d. Il est naturel d'envisager l'étude asymptotique de (10) dans le cas d'autres fonctionnelles G que celle donnée par (6). En particulier, le cas $G(\nu,B) = \sum_{\operatorname{spt}\nu\cap B} (\nu(\{x\}))^p$ avec $p \in]0,1[$ semble être trés intéressant (on renvoie à [2] pour d'autres exemples de fonctionnelles G).

3. Eléments de démonstration

3.1. Preuve du Théorème 2

On doit démontrer les 2 inégalités suivantes (11) et (12) :

$$\forall(\nu,\mu)\in\left(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega})\right)^2,\ (\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\overset{*}{\rightharpoonup}(\nu,\mu)\Longrightarrow \liminf_{\varepsilon\to0}\phi_\varepsilon(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\geqslant\phi(\nu,\mu), \tag{11}$$

$$\forall(\nu,\mu)\in\left(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega})\right)^2,\ \exists(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\overset{*}{\rightharpoonup}(\nu,\mu)\text{ tel que }\limsup_{\varepsilon\to0}\phi_\varepsilon(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\leqslant\phi(\nu,\mu). \tag{12}$$

Preuve de (11). – Soient $(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)$ une suite de $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$ telle que $(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\overset{*}{\rightharpoonup}(\nu,\mu)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $\phi_\varepsilon(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)$ est bornée, d'où

$$W_1(f,\nu_\varepsilon)\leqslant C\varepsilon,\qquad \mu_\varepsilon=\varepsilon^d G(\nu_\varepsilon,\cdot). \tag{13}$$

Il résulte immédiatement de (13) que $\nu=f$. En effet W_1 est s.c.i. sur $(\mathcal{M}_+(\overline{\Omega}))^2$ et on a donc :

$$0\leqslant W_1(f,\nu)\leqslant\liminf_{\varepsilon\to0}W_1(f,\nu_\varepsilon)=0.$$

Notant $\Sigma_\varepsilon=\operatorname{spt}\nu_\varepsilon$, on a d'après (13) l'inégalité :

$$\phi_\varepsilon(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\geqslant\int_\Omega w_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x,\quad \text{avec } w_\varepsilon(x):=\frac{1}{\varepsilon}d(x,\Sigma_\varepsilon)f(x). \tag{14}$$

Toujours d'après (13), la suite $\{w_\varepsilon\}$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ et après extraction éventuelle d'une sous-suite, il existe un élément $m\in\mathcal{M}_+(\overline{\Omega})$ tel que :

$$w_\varepsilon\mathcal{L}^d\llcorner_\Omega\overset{*}{\rightharpoonup}m. \tag{15}$$

De plus, en raisonnant par l'absurde et en utilisant la stricte positivité de f, on établit que

$$d(x,\Sigma_\varepsilon)\to0\quad\text{uniformément sur }\Omega. \tag{16}$$

Il résulte de (14), (15) que :

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\phi_\varepsilon(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon)\geqslant m(\overline{\Omega})\geqslant\int_\Omega\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Pour l'établir (11), il suffit donc d'établir que la densité $m_a(x)=\mathrm{d}m/\mathrm{d}x$ vérifie l'inégalité :

$$m_a(x)\geqslant C_d\frac{f(x)}{(\mu_a(x))^{1/d}}\quad\text{p.p. }x\in\Omega\quad\left(\mu_a=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right). \tag{17}$$

Fixons $x_0\in\Omega$, $\delta>0$ et posons $n_\varepsilon=\sharp(\Sigma_\varepsilon\cap Q(x_0,\delta))$ (où $Q(x_0,\delta)=x_0+\delta Q$). Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^d n_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to0}\mu_\varepsilon\big(Q(x_0,\delta)\big)=\mu\big(Q(x_0,\delta)\big),\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{Q(x_0,\delta)}w_\varepsilon\,\mathrm{d}x=m\big(Q(x_0,\delta)\big). \tag{18}$$

Pour $\delta'<\delta$, il existe d'après (16) un réel $\varepsilon_0>0$ tel que $d(x,\Sigma_\varepsilon)\geqslant d(x,\Sigma_\varepsilon\cap Q(x_0,\delta))$ pour tout $x\in Q(x_0,\delta')$ et $\varepsilon<\varepsilon_0$, d'où, rappelant la définition (1) et par changement de variables :

$$\int_{Q(x_0,\delta)}d(x,\Sigma_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{Q(x_0,\delta')}d\big(x,\Sigma_\varepsilon\cap Q(x_0,\delta)\big)\,\mathrm{d}x\geqslant\varphi_{n_\varepsilon}\big(1,Q(x_0,\delta')\big)=(\delta')^{d+1}\varphi_{n_\varepsilon}(1,Q).$$

Alors en utilisant (18) et le Lemme 1, on obtient (après avoir fait $\delta'\nearrow\delta$) :

$$\frac{m(Q(x_0,\delta))}{\delta^d}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\delta^d}\int_{Q(x_0,\delta)}\frac{f(x)d(x,\Sigma_\varepsilon)}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{C_d\delta}{(\mu(Q(x_0,\delta)))^{1/d}}\Big(\inf_{Q(x_0,\delta)}f\Big). \tag{19}$$

L'inégalité (11) est obtenue en passant à la limite dans (19) quand $\delta \to 0$ tenant compte du fait que f est semi-continue inférieurement au point x_0.

Preuve de (12). – Posons $\phi^+(\nu,\mu) := \inf\{\limsup_\varepsilon \phi_\varepsilon(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon) : (\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon) \to (\nu,\mu)\}$ (Γ-limite supérieure de ϕ_ε). Pour établir (12), on peut supposer que $\nu = f$ et par un argument de diagonalisation [5], il suffit de montrer que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_+(\overline{\Omega})$ on a l'inégalité :

$$\phi^+(f,\mu) \leqslant C_d \int_\Omega \frac{f(x)}{\mu_a(x)^{1/d}}\,\mathrm{d}x \quad \left(\mu_a = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right). \tag{20}$$

Etape 1 : *On établit* (20) *lorsque* $\mu = u(x)\,\mathrm{d}x$ *avec* $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. – On peut supposer que $\int_\Omega \frac{f(x)}{u(x)^{1/d}}\,\mathrm{d}x < +\infty$. Fixons un paramétre $\lambda > 0$ auquel on associe une partition de Ω par des cubes de taille $\varepsilon' = \lambda\varepsilon$:

$$Q_{i,\varepsilon} := \varepsilon'(i + Q), \quad i \in I_\varepsilon = \{i \in \mathbb{N}^d : Q_{i,\varepsilon} \subset \overline{\Omega}\},$$

ainsi que les discrétisations suivantes des densités f et u :

$$f_{i,\varepsilon} = \fint_{Q_{i,\varepsilon}} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad u_{i,\varepsilon} = \fint_{Q_{i,\varepsilon}} u(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\tilde{f}_\varepsilon = \sum_i f_{i,\varepsilon} \mathbb{1}_{Q_{i,\varepsilon}}, \qquad \tilde{u}_\varepsilon = \sum_i u_{i,\varepsilon} \mathbb{1}_{Q_{i,\varepsilon}}.$$

On note que $\tilde{f}_\varepsilon \to f$ et $\tilde{u}_\varepsilon \to u$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Soit $k_{i,\varepsilon} = [\lambda^d u_{i,\varepsilon}] + 1$, où le symbole $[\cdot]$ désigne la partie entière. Enfin, on note $\Sigma_{k_{i,\varepsilon}}$, une famille de points de $\mathbb{R}^d$ tels que $\varphi_{k_{i,\varepsilon}}(1,Q) = \int_Q d(x, \Sigma_{k_{i,\varepsilon}})\,\mathrm{d}x$. Soit $(x_{i,\varepsilon}^j)_{j=1,\ldots,k_{i,\varepsilon}}$ l'image de $\Sigma_{k_{i,\varepsilon}}$ par l'application $x \to \varepsilon'(i+x)$. On considère la suite $(\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon)$ définie par :

$$\nu_\varepsilon = \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{k_{i,\varepsilon}} \frac{f_{i,\varepsilon}(\varepsilon')^d}{k_{i,\varepsilon}} \delta_{x_{i,\varepsilon}^j}, \qquad \mu_\varepsilon = \varepsilon^d G(\nu_\varepsilon, \cdot).$$

On vérifie aisément que $\mu_\varepsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu$ et $\nu_\varepsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$. On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\phi(\nu_\varepsilon,\mu_\varepsilon) &\leqslant \sum_i \frac{1}{\varepsilon} W_1(f \llcorner Q_{i,\varepsilon}, \nu_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}) \\ &\leqslant \sum_i \frac{1}{\varepsilon} W_1(f \llcorner Q_{i,\varepsilon}, \tilde{f}_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}) + \sum_i \frac{1}{\varepsilon} W_1(\tilde{f}_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}, \nu_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}).\end{aligned}$$

La première somme dans le membre de droite tend vers zéro du fait que :

$$\sum_i \frac{1}{\varepsilon} W_1(f \llcorner Q_{i,\varepsilon}, \tilde{f}_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_i \lambda\varepsilon \int_{Q_{i,\varepsilon}} |f - \tilde{f}_\varepsilon| = \lambda \int_\Omega |f - \tilde{f}_\varepsilon|.$$

D'autre part, notant $\varphi(\cdot)$ l'interpolée de $n \mapsto \varphi_n(1,Q)$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{1}{\varepsilon} W_1(\tilde{f}_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}, \nu_\varepsilon \llcorner Q_{i,\varepsilon}) &\leqslant \sum_i \int_{Q_{i,\varepsilon}} d\big(x, \varepsilon'(i + \Sigma_{k_{i,\varepsilon}})\big) f_{i,\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_i \frac{(\varepsilon')^{d+1}}{\varepsilon} f_{i,\varepsilon}\varphi_{k_{i,\varepsilon}}(1,Q) \leqslant \lambda \int_\Omega \varphi\big(\lambda^d \tilde{u}_\varepsilon(x)\big) f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Passant à la limite en ε, on obtient pour tout $\lambda > 0$:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} W_1(\tilde{f}, \nu_\varepsilon) \leqslant \lambda \int_\Omega \varphi\big(\lambda^d u(x)\big) f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{21}$$

D'aprés (2), on a $\lambda\varphi(\lambda^d u(x)) \leqslant c_2(1/u(x)^{1/d})$ d'où (20) en passant à la limite dans (21) par convergence dominée quand $\delta \to 0$.

Cas général. – Soit $\mu \in \mathcal{M}_+(\overline{\Omega})$. En utilisant [3, Théorème 4] et la semi continuité inférieure de f, on établit l'existence d'une suite $\{u_h\}$ dans $L^1(\Omega)$ telle que :

$$u_h\,dx \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu, \qquad \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \frac{f(x)}{u_h(x)^{1/d}}\,dx = \int_\Omega \frac{f(x)}{\mu_a(x)^{1/d}}\,dx.$$

L'inégalité (20) peut ainsi être étendue en remarquant que $\liminf_{h\to\infty} \Phi^+(f, u_h\mathcal{L}^d \llcorner \Omega) \geqslant \Phi^+(f,\mu)$. □

Démonstration du Lemme 1. – Comme φ est décroissante, il suffit de démontrer que la limite de la soussuite $n\,\varphi_{n^d}(1, Q)$ existe. Par un changement de variable, on peut écrire :

$$n\varphi_{n^d}(1, Q) = \frac{1}{n^d} \inf\left\{ \int_{[0,n[^d} d(x,\Sigma)\,dx : \sharp(\Sigma) = n^d \right\} = \frac{S([0,n[^d)}{n^d},$$

où $S(\cdot)$ est la fonction d'ensemble définie par $S(A) = \inf\{\int_A d(x,\Sigma)\,dx : \sharp(\Sigma) \leqslant |A|\}$. Celle ci est invariante par translations et vérifie $S(A \cup B) \leqslant S(A) + S(B)$ si $A \cap B = \emptyset$. L'existence de la limite quand $n \to \infty$ en résulte classiquement. □

Remerciements. Nous remercions Giuseppe Buttazzo pour avoir attiré notre attention sur ce problème de positionnement optimal et ses différentes variantes liées à la distance de Monge–Kantorovich [4].

Références bibliographiques

[1] R. Bolton, F. Morgan, Hexagonal economic regions solve the location problem, Amer. Math. Monthly 109 (2) (2002) 165–172.
[2] G. Bouchitté, G. Buttazzo, New lower semicontinuity results for nonconvex functionals defined on measures, Nonlinear Anal. 15 (7) (1990) 679–692.
[3] G. Bouchitté, M. Valadier, Integral representation of convex functionals on a space of measures, J. Funct. Anal. 80 (1988) 398–420.
[4] G. Buttazzo, E. Oudet, E. Stepanov, Optimal transportation problems with free Dirichlet regions, Preprint, 2002.
[5] G. Dal Maso, An Introduction to Γ-convergence, Birkhäuser, Boston, 1993.