Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

11 mai 2009
Contrôle continu

(seul la feuille des DL usuels est autorisée mais elle est probablement inutile)

Question de cours 1 (5 points)**.** Énoncer et démontrer correctement le théorème vu en cours sur le changement de variable d'intégration.

Exercice 2 (5 points)**.** Calculer l'intégrale

$$\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{1}{x(\cos(\ln x))^2} dx.$$

Exercice 3 (7 points)**.** Calculer l'intégrale

$$\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx$$

et dire si sa valeur est inférieure, égale ou supérieure à 1. On rappelle que $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est la fonction inverse de $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, c'est-à-dire

$$\arcsin(x) = y \iff x = \sin y.$$

Exercice 4 (6 points)**.** Soit $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_{-2}^{2} f(t) e^{nt} dt.$$

1. Justifier que l'intégrale est bien définie, c'est-à-dire que la fonction intégrande est intégrable.
2. Démontrer que, si $f(t) = 0$ pour tout $t \in [-1,2]$, alors $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. ‘
3. Démontrer que, si $f \geq 0$ et $f(1) > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.
4. Démontrer que, si $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,2]$, alors la suite des intégrales I_n est bornée.
5. Démontrer sous les mêmes hypothèses de la question précédente qu'en fait $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ (suggestion : considérer un $\varepsilon > 0$. . .)
6. Conclure que pour une fonction $f \geq 0$ continue sur $[-2,2]$ il n'y a que deux cas : ou bien elle est nulle sur $[0,2]$, et alors $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$, ou bien il existe un $t \in [0,2]$ tel que $f(t) > 0$, et alors $\lim_{n\to\infty} I_n = \infty$.