Université Paris-Sud – Université Paris-Saclay
M1 Mathématiques Appliquées

Collection d'exercices
–
Calcul des variations, discrétisation, algorithmes de gradient et projections

Vous trouvez ici 25 exercices tirés des examens d'Optimisation numérique de 2011/2015. Ils sont présentés en vrac, sans ordre thématique ni de difficulté. Seuls les exercices relatifs aux sujets abordés à Orsay en novembre-décembre 2015 ont été retenus.

Exercice 1. Considérer les problèmes de calcul des variations suivants

$$\text{(P1)} \qquad \min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + e^t u(t)\right) dt \;:\; u \in C^1([0,1]),\, u(0) = 0, u(1) = 1\right\},$$

$$\text{(P2)} \qquad \min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + e^t u(t)\right) dt \;:\; u \in C^1([0,1]),\, u(0) = 0\right\},$$

$$\text{(P3)} \qquad \min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + e^t u(t)\right) dt \;:\; u \in C^1([0,1])\right\},$$

$$\text{(P4)} \qquad \min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + e^t |u(t)|^2\right) dt \;:\; u \in C^1([0,1]),\, u(0) = 0, u(1) = 1\right\},$$

$$\text{(P5)} \qquad \min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + e^t |u(t)|^2\right) dt \;:\; u \in C^1([0,1]),\, u(0) = 0\right\}.$$

1. Trouver la solution de (P1), sans oublier de justifier qu'il s'agit bien d'un minimiseur.
2. Trouver la solution de (P2), sans oublier de justifier qu'il s'agit bien d'un minimiseur.
3. Prouver que (P3) n'admet pas de solution.
4. Écrire l'Équation d'Euler-Lagrange de (P4). Sachant qu'elle n'est pas évidente à résoudre explicitement, proposer une discrétisation du problème et un algorithme pour approcher la solution.
5. Trouver la solution de (P5).

Exercice 2. Considérer les ensembles

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x+y| \le 1\} \quad \text{et} \quad B = \overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le 1\}.$$

1. Dessiner A, B et $A \cap B$. A et B sont-ils convexes ?
2. Démontrer que l'intersection de deux ensembles convexes est toujours convexe.
3. Écrire une formule pour la projection sur $A \cap B$, du type $P_{A\cap B}(x,y) = \dots$, en distinguant éventuellement des cas (il suffit de la justifier avec un dessin).
4. Lesquelles des relations suivantes sont-elles vraies ?

$$P_{A\cap B} = P_A \circ P_B, \quad P_A \circ P_B = P_B \circ P_A, \quad P_{A\cap B} = P_{A\cap B} \circ P_B.$$

Exercice 3. Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}f(t)^2\right] dt\,;\ f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \ :\ f(0) = 0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur (si besoin, considérer $y(t) = x(t) + t$ pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange).

Exercice 4. Considérer le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}tf(t)^2\right] dt\,;\ f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \ :\ f(0) = 0\},$$

qui est en fait un peu plus difficile à résoudre explicitement que le précédent. Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour le résoudre de manière approchée. Écrire précisément la fonction qu'on veut minimiser dans la discrétisation (avec les matrices et/ou les vecteurs qui apparaissent dans cette fonction) et expliquer la méthode que vous choisissez d'utiliser.

Exercice 5. Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ le polyhèdre convexe donné par

$$K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \ :\ x_1 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

Trouver les sommets de K et écrire une formule (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K sur K.

Exercice 6. Considérer le problème de minimisation

$$\min\left\{\int_0^1 \left(u'(t)^2 + 2e^t u(t)\right) dt + 4u(1)^2 \quad : \quad u \in C^1([0,1]),\ u(0) = 1\right\}.$$

Écrire l'équation d'Euler-Lagrange, trouver ses conditions au bord, et la résoudre. Ne pas oublier de justifier pourquoi la solution de l'équation est bien un minimiseur.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}*$ et $h = 1/n$, considérer le problème de minimisation

$$\min \quad \left\{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2h} + ih^2 x_{i+1} \ :\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\right\},$$

où l'on considère $x_0 = 0$.

1. Prouver que la solution de ce problème d'optimisation existe et est unique.
2. Suggérer un ou plusieurs algorithmes qui la trouvent ou l'approche, en justifiant la convergence.
3. Écrire le problème de calcul des variations continu (où l'on cherche une courbe $x(t)$, $t \in [0,1]$) qui correspond à ce problème pour $n \to \infty$ et $h \to 0$ et écrire l'équation d'Euler Lagrange qui caractérise la solution, avec ses conditions au bord.

Exercice 8. Trouver l'expression (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K sur le convexe $K \subset \mathbb{R}^2$ donné par $K = \overline{B(0,2)} \cap E$ où E est la bande $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x_2| \leq \sqrt{3}\}$.

Exercice 9. Résoudre

$$\min\left\{\int_{-1}^1 e^{-t}\left(\frac{u'(t)^2}{2} + u(t)\right) dt \quad : \quad u \in C^1([-1,1]),\ u(1) = 1\right\}.$$

Dès qu'un candidat à la minimisation u^* sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur.

Exercice 10. Cet exercice se compose de deux parties

1. Soit A une matrice symétrique $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné. Proposer un algorithme pour résoudre le problème de minimisation
$$\min\left\{\frac{1}{2}AX \cdot x - b \cdot x \ : \ x \in K\right\}, \quad \text{où} \quad K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ -1 \leq x_i \leq 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots n\}.$$
Donner explicitement les formules pour calculer les cordonnées x_i^{k+1} du $(k+1)-$ème point connaissant le $k-$ème.
2. Considérer le problèmes de minimisation
$$\min\left\{\int_{-1}^{1} e^{-t}\left(\frac{u'(t)^2}{2} + u(t)\right) dt \quad : \quad u \in C^1([-1,1]),\ u(1) = 1, -1 \leq u(t) \leq 1\right\}.$$
Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour approcher la résolution de ces problèmes. Donner les détails des étapes de l'algorithme choisi étape par étape, en utilisant éventuellement les notations et les procédés introduits pour répondre à la première question.

Exercice 11. Considérer l'ensemble $A = \overline{B(a,2)} \cap \overline{B(b,2)} \cap \overline{B(c,2)} \subset \mathbb{R}^2$, où $a = (0,0)$, $b = (1, \sqrt{3})$ et $c = (-1, \sqrt{3})$.

1. Prouver que A est compact et convexe.
2. Donner une expression pour la projection sur le convexe A, et dessiner comment cette projection agit sur les différents points du plan.

Exercice 12. Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) + \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

1. Prouver que f est elliptique et que ∇f est Lipschitzien.
2. Trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ où $\nabla f(x) = 0$.
3. En déduire la valeur de $\min\{f(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$.
4. Suggérer un algorithme pour résoudre $\min\{f(x) \ : \ x \in K\}$ où $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \geq \pi\}$.
5. Donner les détails de l'algorithme choisi et de ses itérations.

Exercice 13. Résoudre
$$\min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}u'(t)^2 + u(t)\sqrt{t}\right) dt \quad : \quad u \in C^1([0,1]),\ u(0) = 0\right\}.$$
Dès qu'un candidat u^* à la minimisation sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur. Calculer également la valeur du minimum.

Exercice 14. Considérer les fonctions $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par
$$g(x,y,z) = (x-1)^2 + e^y + z^2 + e^z, \quad h(x,y,z) = e^{x+y} + \sin(x+y)$$
ainsi que la fonction $f = g + h$.

1. Dire si g est une fonction convexe, écrire sa matrice hessienne, dire si elle est elliptique sur $\mathbb{R}^3$ et si elle l'est sur $A = [-1,3]^3$.

2. Dire si h est une fonction convexe et/ou elliptique sur $\mathbb{R}^3$ et/ou sur A.
3. La fonction f est-elle elliptique sur A ? Son gradient est-il lipschitizien sur A ? Donner une estimation, même grossière, de la constante α d'ellipticité de f et de la constante M de Lipschitz de ∇f.
4. Démontrer que f admet un minimum sur $B = [0,2]^3$ et que le minimiseur est unique.
5. Suggérer une méthode numérique pour approcher le minimiseur de f sur B et justifier sa convergence.
6. Donner une expression récursive précise de la suite de points parcourus par la méthode suggérée à la question précédente (sous la forme $x_{k+1} = \dots, y_{k+1} = \dots, z_{k+1} = \dots$).

Exercice 15. Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour approcher la résolution de

$$\min\left\{\int_0^1 e^t\left(\frac{u'(t)^2}{2} + u(t)^2 + h(t)u(t)\right)dt \quad : \quad u \in C^1([0,1]),\ u(0) = 1\right\},$$

quelle que soit la fonction $h \in C^0([0,1])$. Justifier la convergence de la méthode choisie et discuter sa vitesse de convergence.

Exercice 16. Étant donné un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ avec $||a|| = 1$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, considérer les ensembles

$$A_0(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x \cdot a = \alpha\} \quad \text{et} \quad A_+(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x \cdot a \geq \alpha\}.$$

1. Les ensembles $A_0(a,\alpha)$ et $A_+(a,\alpha)$ sont-ils convexes ? fermés ?
2. Donner des formules pour la projection $P_{A_0(a,\alpha)}$ sur A_0 et pour la projection $P_{A_+(a,\alpha)}$ sur A_+.
3. Si a et b sont deux vecteurs unités avec $a \neq b$ et $a \neq -b$ démontrer que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $A_0(a,\alpha) \cap A_0(b,\beta) \neq \emptyset$.
4. *(plus difficile)* en partant d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné, définir deux suites

$$y_k = P_{A_0(a,\alpha)}(x_k) \quad \text{et} \quad x_{k+1} = P_{A_0(b,\beta)}(y_k).$$

   Sous l'hypothèse $n = 2$ et $a \neq \pm b$, démontrer que les deux suites convergent vers le seul point appartenant à $A_0(a,\alpha) \cap A_0(b,\beta)$.

Exercice 17. Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 (1+t)f'(t)^2 dt\,;\ f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \,:\, f(0) = 1,\ f(1) = 2\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien de minimiseurs.

Exercice 18. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ l'ellipsoïde $E = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \leq 1 \right\}$, où les nombres $a_i > 0$ sont fixés. Soit $x \notin E$.

Démontrer qu'il existe une unique valeur de $\mu > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + \mu)^2} = 1.$$

Cette valeur sera notée $\bar{\mu}$.

Soit maintenant $\bar{x} = P_E(x)$ la projection sur E de x. Justifier que cette projection existe et est unique, et prouver qu'elle est donnée par

$$\bar{x}_i = \frac{a_i x_i}{a_i^2 + \bar{\mu}}.$$

Exercice 19. Considérer le problème

$$\min \left\{ J(f) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f'(t)^2 + f(t)^2 \right] dt \, ; \ f \in C^1([0,1]) \ : \ f(0) = f(1) = 0, \ f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 \right\}.$$

1. Expliquer pourquoi la solution de ce problème ne satisfait pas l'équation $f'' = f$.
2. Donner une idée de la forme de la solution en dessinant qualitativement son graphe (montrer si elle est convexe ou concave, si elle est C^1, quelles sont ses valeurs en $0, \frac{1}{2}$ et $1 \ldots$).
3. Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour le résoudre de manière approchée. Écrire précisément la fonction qu'on veut minimiser dans la discrétisation (avec les matrices et/ou les vecteurs qui apparaissent dans cette fonction) et expliquer la méthode choisie.

Exercice 20. Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} f'(t)^2 - \sin(t) f(t) \right] dt \, ; \ f \in \mathcal{A}\},$$

où

$$\mathcal{A} := \{f \in C^1([0,\pi]) \ : \ f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur.

Exercice 21. Soient B_+ et B_- les boules fermées dans $\mathbb{R}^2$ de rayon 1 centrées en $(1,0)$ et $(-1,0)$, respectivement, et Q le carré $[-1,1] \times [-1,1]$. Soit $K = B_+ \cup B_- \cup Q$. Dessiner cet ensemble K, qui est un convexe ; écrire une formule pour la projection sur K, qu'on appellera P_K. La formule doit être de la forme $P_K(x,y) = \ldots$ avec des calculs explicites et, éventuellement, des cas à distinguer.

Exercice 22. Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'(t)^2 + 8|u(t)|^{3/2} \right) dt$$

et le problème de minimisation

$$\min \left\{ F(u) \ : \ u \in C^1([0,1]), \ u(1) = 1 \right\}.$$

1. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à ce problème de minimisation, avec les conditions au bord opportunes.

2. Trouver une solution $\bar{u}$ de cette équation, en la cherchant de la forme $\bar{u}(t) = At^\alpha$.
3. Justifier que $\bar{u}$ est solution du problème de minimisation, qu'elle est la seule solution du problème de minimisation et aussi la seule solution de l'équation avec ses conditions au bord.

Exercice 23. Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \sqrt{1 + |x|^2} + \frac{1}{2}|x - \bar{x}|^2,$$

où $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point donné.

1. Dire si f est convexe et elliptique.
2. Vérifier les hypothèses pour garantir la convergence de l'algorithme du gradient à pas constant appliqué à la fonction f.
3. Indiquer les valeurs du pas τ qui garantissent la convergence et quelle est la valeur optimale pour accélérer cette convergence.
4. Écrire explicitement la relation qui permet de passer du point x_k au point x_{k+1} dans l'algorithme du gradient à pas constant appliqué à la fonction f.

Exercice 24. Suggérer et décrire une méthode numérique itérative efficace pour résoudre le problème de projection

$$\min \quad ||x - a|| \ : \ x \in E$$

où $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est fixé et

$$E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \leq x_{i+1} \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Pour que la réponse soit satisfaisante, il faut expliquer à chaque étape les calculs qu'on doit faire et comment les faire. Il pourrait éventuellement être utile de reformuler le problème de manière équivalente (changer variables, minimiser une fonction différente mais avec les mêmes minimiseurs...).

Exercice 25. Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'(t)^2 + 64|u(t)|^{7/4} \right) dt$$

et le problème de minimisation

$$\min \left\{ F(u) \ : \ u \in C^1([0,1]), \ u(1) = 16 \right\}.$$

1. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à ce problème de minimisation, avec les conditions au bord opportunes.
2. Trouver une solution $\bar{u}$ de cette équation, en la cherchant de la forme $\bar{u}(t) = At^\alpha$.
3. Justifier que $\bar{u}$ est solution du problème de minimisation, qu'elle est la seule solution du problème de minimisation et aussi la seule solution de l'équation avec ses conditions au bord.

Exercice 26. Pour $A, B \in \mathbb{R}$ donnés, démontrer que le problàme suivant admet au moins une solution

$$\min \left\{ \int_0^T \left(\frac{1}{2}|u'|^2 + \cos(u) \right) dx \ : \ u \in H^1([0,T]), \, u(0) = A, u(1) = B \right\}$$

and prouver que la solution u résout

$$\begin{cases} u'' = \sin(u) \\ u(0) = A \\ u(T) = B. \end{cases}$$

Prouver aussi que, si $T > \pi$, la solution est unique et résoudre le système ci-dessus est équivalent à minimiser. Prouver le même résultat pout $T = \pi$ aussi (plus difficile).

Exercice 27. Prouver que le problème suivant admet au moins une solution

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{p}|u'|^p - \frac{1}{r}|u|^r) \right) dx \ : \ u \in W^{1,p}([0,T]),\ u(0) = u(1) = 0 \right\}$$

dès que $p > r$ et qu'il n'admet pas de solution si $p < r$. Pour $p = r$, prouver que soit la constante nulle est solution, soit la valeur de l'inf est $-\infty$.

Exercice 28. Prouver que le problème suivant admet une solution

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'|^2 + u + e^u \right) dx + \frac{1}{2}u(1)^2 \ : \ u \in W^{1,2}([0,T]) \right\},$$

qu'elle est unique, et qu'il s'agit d'une fonction C^∞.