PeiP Polytech' Paris-Sud — 2011–2012
Orsay — S1-Math

CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°2
du Vendredi 21 Octobre 2011 - Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 2 pages et est constitué de 5 exercices indépendants.
Chaque réponse devra bien sûr être justifiée.

Exercice 1 : Questions de cours (3 pts)

1. Énoncer une version du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Donner la valeur des limites suivantes (en les justifiant) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to \pm\infty}\frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 2 (4 pts)

Déterminer les limites suivantes :

1. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x^7+3x^2-1}e^{3\ln(x^2+x)}.$$
2. $$\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}.$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

Exercice 3 (3 pts)

Déterminer les constantes a, b réelles de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

soit dérivable sur $]0,+\infty[$. Est-elle alors dérivable sur $\mathbb{R}^+$? continue sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 4 (5 pts)

Soit f la fonction à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2(x-1)^2 + 3|x-3| & \text{si } \; x \; \geqslant 0, \\ -x^3 - 2(x+1)^2 + 3|x+3| & \text{si } \; x < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est paire (c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$). La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. En déduire l'existence d'un minimum global pour f. Le déterminer. En quels points est-il atteint ? f admet-elle un maximum ?

Exercice 5 (7 pts)

Soit f la fonction à valeurs réelles définie par la formule suivante :

$$f(t) = t \ln t.$$

1. Préciser l'ensemble de définition naturel de f. Peut-on prolonger f par continuité à $\mathbb{R}^+$ tout entier ?
2. Etudier les variations de f sur son domaine de définition.
3. Donner l'allure du graphe de f en précisant sa tangente à l'origine.
4. La fonction f est-elle inversible sur $]0, +\infty[$? sur $[1, +\infty[$?
5. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, il existe un unique $t_\alpha \geqslant 0$ tel que
$$f(t_\alpha) = \alpha.$$
6. Montrer que pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$, on a $1 < t_\alpha < 2$.
   On donne $\ln(2) \simeq 0,693$.
7. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto t_\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Quelle est la limite de la fonction $\alpha \mapsto t_\alpha$ lorsque α tend vers 0 ?
9. Déterminer la limite de $\frac{t_\alpha - 1}{\alpha}$ quand α tend vers 0. Pour cela on pourra d'abord établir que
$$\lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u - 1} = 1.$$