Polytech' Paris-Sud
Orsay

2011–2012
S1-MathInfo

Correction du contrôle de Mathématiques n°1 (MathInfo)

Correction de l'exercice 1. (5 points)

(1) $(\mathcal{P})$ est vraie. En effet, l'application f définie par $f(x) = x^2 + \ln x + 2x + 1$ est croissante sur $[3, +\infty[$ (en fait sur $\mathbb{R}_*^+$) comme somme de fonctions croissantes. Donc pour tout réel x,

$$(x \geq 3) \Rightarrow \big(f(x) \geq f(3) = 3^2 + \ln(3) + 6 + 1 = 16 + \ln(3)\big)$$

De plus, comme $3 > \mathrm{e}$ et que $x \mapsto \ln(x)$ est croissante (sur $\mathbb{R}_*^+$), on a $\ln(3) \geq \ln(\mathrm{e}) = 1$. Ceci nous donne $(x \geq 3) \Rightarrow \big(f(x) \geq 16 + \ln(3) \geq 16 + 1 = 17\big)$.

(2) La négation de $(\mathcal{P})$ s'écrit $(\exists x \in \mathbb{R})\big((x \geq 3) \text{ et } (x^2 + \ln x + 2x + 1 < 17)\big)$. La négation de $(\mathcal{P})$ est (évidemment !) fausse puisque $(\mathcal{P})$ est vraie.

(3) La contraposée de $(\mathcal{P})$ s'écrit $(\forall x \in \mathbb{R})\big((x^2 + \ln x + 2x + 1 < 17) \Rightarrow (x < 3)\big)$. La contraposée de $(\mathcal{P})$ est (évidemment !) vraie puisque $(\mathcal{P})$ est vraie.

(4) a. La réciproque de $(\mathcal{P})$ s'écrit $(\forall x \in \mathbb{R})\big((x^2 + \ln x + 2x + 1 \geq 17) \Rightarrow (x \geq 3)\big)$.

b. Supposons que A, B et C soient telles que A $\Rightarrow$ B, B $\Rightarrow$ C et C $\Rightarrow$ A. Alors comme B $\Rightarrow$ C et C $\Rightarrow$ A, on a B $\Rightarrow$ A. Donc A $\Leftrightarrow$ B. De même B $\Leftrightarrow$ C.

c. La réciproque de $(\mathcal{P})$ est fausse.

(Par l'absurde.) Supposons qu'elle soit vraie. Considérons les assertions

$$\mathrm{A} : (\mathrm{x} \geq 3)\,, \quad \mathrm{B} : (\mathrm{x}^2 + \ln \mathrm{x} + 2\mathrm{x} + 1 > 17)\,, \quad \mathrm{C} : (\mathrm{x}^2 + \ln \mathrm{x} + 2\mathrm{x} + 1 \geq 17)$$

On a, comme en b. ci-dessus, A $\Rightarrow$ B (refaire la preuve de (1) en remarquant que $x \mapsto \ln(x)$ est *strictement* croissante) et B $\Rightarrow$ C. Si la réciproque de $(\mathcal{P})$ était vraie, on aurait C $\Rightarrow$ A et donc (en particulier) B $\Leftrightarrow$ C.

Or B et C ne sont pas équivalentes. Pour le prouver, il suffit de trouver un nombre réel x tel que $x^2 + \ln x + 2x + 1 = 17$. On peut déduire l'existence d'un tel x en regardant le graphe de f même si, pour l'établir proprement, il faudrait utiliser un raisonnement basé sur la continuité de f.

Correction de l'exercice 2. (6 points)

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

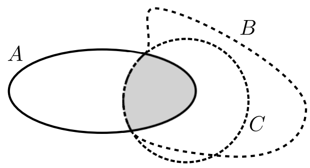
(1) Supposons $(A \cap B = A \cup B)$. Comme $A \subset A \cup B$, on a $A \subset A \cap B$ et donc $A \subset B$. De même $B \subset A$ et donc $A = B$.

(2) a. On suppose B non-vide et on choisit $x \in B$. On a $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cup C$. Alors, *soit* $x \notin A$ et donc $x \in C$, *soit* $x \in A$ et donc $x \in A \cap B = A \cap C$ et donc $x \in C$. Par disjonction des cas, x est nécessairement dans C et on a prouvé $B \subset C$.

En échangeant les rôles de B et C dans la démonstration précédente, on obtient C $\subset$ B et donc finalement $B = C$.

b. L'hypothèse $(A \cap B = A \cap C)$ est nécessaire mais non suffisante.

On considère la situation représentée à droite. A est en trait plein, B et C en traits pointillés. $B \neq C$ et pourtant l'intersection de A et de B coïncide avec l'intersection de A et de C (c'est la partie grisée).



c. $(\mathcal{P})$ reste vraie pour $A = \emptyset$ puisque nous n'avons pas supposé A non-vide dans la démonstration ci-dessus. (En outre, pour A vide, $B = A \cup B = A \cup C = C$.)

$(\mathcal{P})$ reste vraie également quand B est vide. en effet, $A = A \cup B = A \cup C$ et donc $C \subset A$. On a donc $C = A \cap C = A \cap B = \emptyset$. Donc $C = B$.

(3) a. Si A est vide alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = \emptyset$. On obtient $A \Delta B = B \backslash \emptyset = B$.

b. Supposons que $A \Delta B = B$.

Prouvons d'abord que $A \subset B$. Soit x un élément de A, on a $x \in A \cup B$. Supposons que $x \notin B$. Alors $x \notin A \cap B$ et donc $x \in A \Delta B = B$ ce qui contredit $x \notin B$. Donc nécessairement $x \in B$ et donc $A \subset B$.

Prouvons ensuite que $B \subset \overline{A}$. Comme $A \subset B$, on a $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$. Donc $A \Delta B = B \backslash A = B \cap \overline{A}$ ce qui, avec $A \Delta B = B$, donne $B \subset \overline{A}$.

On déduit alors aisément l'inclusion $A \subset \overline{A}$, ce qui n'est possible que si A est vide.

Correction de l'exercice 3. (4 points)

(1) Soit p un nombre entier, $p \geq 2$. Soit $k \in \{1, 2, \ldots p-1\}$,

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} = \frac{(p-1)!\,p}{k!\,(p-k-1)!\,(p-k)} = \frac{p}{p-k} \cdot \frac{(p-1)!}{k!((p-1)-k)!} = \frac{p}{p-k}\binom{p-1}{k}.$$

(2) De (1), on déduit que $(p-k)\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k}$ et donc que p divise $(p-k)\binom{p}{k}$. Comme on suppose p premier et comme p ne divise pas $(p-k)$, nécessairement p divise $\binom{p}{k}$.

(3) $p \geq 2$ étant un nombre premier fixé, on note $(\mathcal{P}_n)$ l'assertion $\big(p \,|(n^p - n)\big)$.

Initialisation. $n = 1$, $n^p - n = 0$ qui est divisible par p.

Hérédité. On suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on veut montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Or, en développant $(n+1)^p$ grâce à la formule du binôme de Newton, il vient

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} n^k = \underbrace{\binom{p}{0} n^0}_{=1} + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k} n^k + \underbrace{\binom{p}{p} n^p}_{=n^p}.$$

Ceci nous donne

$$(n+1)^p - (n+1) = \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k} n^k + (n^p - n).$$

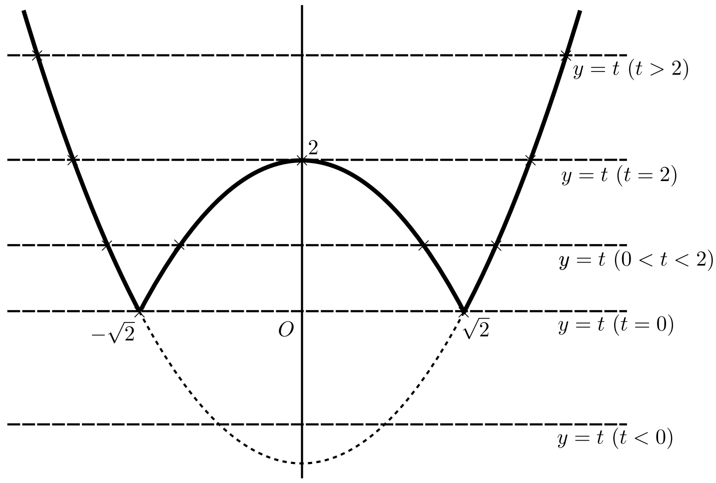
Comme p divise tous les termes de la somme du membre de droite (par (2) pour $1 \leq k \leq p-1$ et par $(\mathcal{P}_n)$ pour $n^p - n$), il divise la somme : $p|\big((n+1)^p - (n+1)\big)$ et $(\mathcal{P}_{n+1})$ est prouvée.

Conclusion. Comme $(\mathcal{P}_1)$ est vraie et que $\big((\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})\big)$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Correction de l'exercice 4. (4 points)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x^2 - 2|$.

(1) Voici son graphe (les pointillés représentent la parabole d'équation $y = x^2 - 2$) :



(2) a. On a représenté sur le graphe les différents cas de figure que l'on récapitule ici :

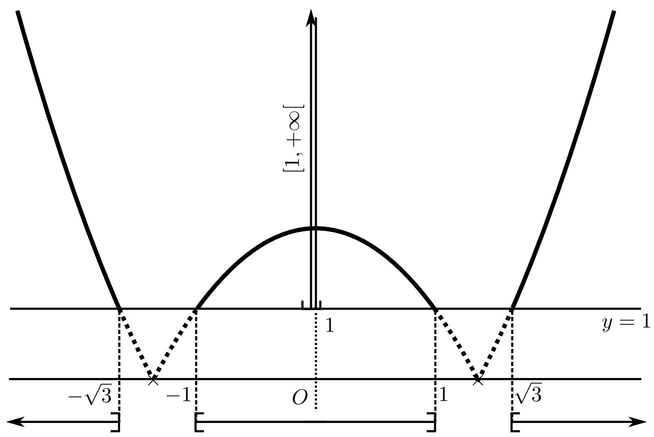
t	$t < 0$	$t = 0$	$0 < t < 2$	$t = 2$	$t > 2$
points d'intersection	0	2	4	3	2

b. f n'est pas injective, puisque pour $t \geq 0$, le nombre de points d'intersection entre son graphe et la droite d'équation $y = t$ est strictement supérieur à 1. (On aurait pu aussi, par exemple, remarquer que $-1 \neq 1$ et $f(1) = f(-1)$.)

f n'est pas surjective puisque pour $t < 0$, son graphe n'intersecte pas la droite d'équation $y = t$ (ou encore, par exemple, -3 n'a pas d'antécédent puisque f est positive).

f n'est évidemment pas bijective puisqu'elle n'est ni injective ni surjective.

(3) Pour déterminer $f^{-1}([1, +\infty[)$, on représente $[1, +\infty[$ sur l'axe des ordonnées et on repère la partie du graphe de f qui lui correspond. On reporte ensuite sur l'axe des abscisses. On trouve (voir figure) ici : $f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$. (Les valeurs précises ± 1 et $\pm\sqrt{3}$ se trouvent par le calcul.)



Correction de l'exercice 5. (5 points)

(1) Comme $\mathcal{A}(x, y)$ est l'aire du rectangle rect(x, y), $\mathcal{A}(x, y) = xy$.

Elle est surjective, puisque pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$,

- soit $a < 1$, et dans ce cas, $(1, a) \in T$ et $\mathcal{A}(1, a) = a$,
- soit $a = 1$, et dans ce cas, $\mathcal{A}(2, \frac{1}{2}) = a$ (évidemment, on a $(2, \frac{1}{2}) \in T$),
- soit $a > 1$, et dans ce cas, $(a, 1) \in T$ et $\mathcal{A}(a, 1) = a$.

Elle n'est pas injective puisque, par exemple $(6, 2)$ et $(4, 3)$ sont deux éléments distincts de T qui ont la même image par $\mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}(6, 2) = \mathcal{A}(4, 3) = 12$.

Elle n'est pas bijective puisqu'elle n'est pas injective.

(2) $\mathcal{P}(x, y)$ étant le périmètre du rectangle rect(x, y), $\mathcal{P}(x, y) = 2(x + y)$.

Elle est surjective, puisque pour tout $p \in \mathbb{R}_*^+$, $\frac{p}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{2}$, avec $0 < \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{2}$. Donc si l'on pose $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{2}$ et $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{2}$, $(x, y) \in T$ et $\mathcal{P}(x, y) = p$.

Elle n'est pas injective puisque, par exemple, $(4, 1)$ et $(3, 2)$ sont deux éléments distincts de T, et $\mathcal{P}(4, 1) = \mathcal{P}(3, 2) = 10$.

Elle n'est pas bijective puisqu'elle n'est pas injective.

(3) Pour tout $(x, y) \in T$, $\mathcal{S}(x, y) = (xy, 2(x + y))$.

Montrons que $\mathcal{S}$ n'est pas surjective. Choisissons par exemple $(x, y) \in T$ tel que $\mathcal{A}(x, y) = 1$. Alors, $y = \frac{1}{x}$ et comme $y < x$, on a $x > 1$. Comme $\frac{1}{x} > 0$, $\mathcal{P}(x, y) = 2(x + \frac{1}{x}) > 2$ et on a prouvé $(\mathcal{A}(x, y) = 1) \Rightarrow (\mathcal{P}(x, y) > 2)$. En particulier, $(1, 1)$ n'a pas d'antécédent par $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ est injective. Soit $(x, y) \in T$ et $(x', y') \in T$ tels que $\mathcal{S}(x, y) = \mathcal{S}(x', y')$. En particulier $xy = x'y'$ et comme $x' \neq 0$ et $y \neq 0$, cela s'écrit $\frac{x}{x'} = \frac{y'}{y}$ et l'on appelle r cette quantité. De plus, $x + y = x' + y'$ et donc leurs carrés sont égaux: $x^2 + y^2 + 2xy = x'^2 + y'^2 + 2x'y'$. A nouveau, en utilisant $xy = x'y'$, il vient $x^2 - x'^2 = y'^2 + y^2$. On fait apparaître r :

$$x'^2 \left(\left(\frac{x}{x'} \right)^2 - 1 \right) = y^2 \left(\left(\frac{y'}{y} \right)^2 - 1 \right) \quad \text{ou encore} \quad x'^2(r^2 - 1) = y^2(r^2 - 1)$$

On en déduit que $r^2 - 1 = 0$ ou $x'^2 = y^2$. Comme x, x', y et y' sont strictement positifs, la première condition nous donne $r = 1$ et donc $x = x'$ et $y = y'$ et la seconde $x' = y$ et donc $y' = x$ (puisque $xy = x'y'$). Finalement, comme $x > y$ et $x' > y'$ la seconde possibilité est à exclure et on conclut $(x, y) = (x', y')$.

Remarque. Il existe un théorème disant que deux réels a et b sont les racines du polynôme $X^2 - (a + b)X + (ab)$. Comme ici $x + y = x' + y'$ et $xy = x'y'$, x, y et x', y' sont donc les deux racines du *même* polynôme de degré 2 et on en conclut directement que $(x, y) = (x', y')$ ou $(x, y) = (y', x')$. A nouveau, comme $x > y$ et $x' > y'$ la seconde possibilité est à exclure et l'injectivité de $\mathcal{S}$ est prouvée.