Peip Polytech' Paris-Sud — 2010–2011
Orsay — S1-Math1

Corrigé du contrôle Continu de Mathématiques n°2
du Vendredi 21 Octobre 2011

Exercice 1 : Questions de cours

1. Théorème des valeurs intermédiaires : soit f une fonction continue de $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tous $a, b \in I$, avec $f(a) < f(b)$, si $f(a) < \gamma < f(b)$, il existe $a < c < b$ tel que $\gamma = f(c)$.
2. On a
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1,$$
car on reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \mapsto \sin x$, dérivable en 0 de dérivée $x \mapsto \cos x$.
D'autre part, on a
$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|x|} \underset{\pm\infty}{\to} 0,$$
d'où
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$
Enfin, on a
$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 2

1. On écrit
$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{x^7+3x^2-1} e^{3\ln(x^2+x)} &= \frac{2x}{x^7} \times \frac{1-\frac{3}{2x}}{1+\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^7}} \times e^{3\ln x^2} \times e^{3\ln(1+\frac{1}{x})} \\ &= \frac{2x}{x^7} \times \frac{1-\frac{3}{2x}}{1+\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^7}} \times x^6 \times e^{3\ln(1+\frac{1}{x})} \\ &= 2 \times \frac{1-\frac{3}{2x}}{1+\frac{3}{x^5}-\frac{1}{x^7}} \times e^{3\ln(1+\frac{1}{x})}\end{aligned}$$
Les deux derniers termes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, on en déduit donc que :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x^7+3x^2-1} e^{3\ln(x^2+x)} = 2.$$

2. On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée : on a

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} &= \frac{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}{(x-3)(1+\sqrt{x-2})} = \frac{3-x}{(x-3)(1+\sqrt{x-2})}\\ &= -\frac{1}{1+\sqrt{x-2}} \underset{x\to 3}{\to} -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} = -\frac{1}{2}.$$

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée et on fait apparaître le terme $\frac{\sin x}{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &= \frac{\sin x}{x}\times x\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{1+x-(1-x)}\\ &= \frac{x}{2x}\times(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\times\frac{\sin x}{x}\\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\times\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 1 lorsque x tend vers 0, on a donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 1.$$

Exercice 3

La fonction f ainsi définie est clairement continue, dérivable, sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Par théorème du prolongement de la dérivée, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$\begin{cases}\lim_{1^-} f = \lim_{1^+} f,\\ \lim_{1^-} f' = \lim_{1^+} f'.\end{cases}$$

Or on a

$$\lim_{1^-} f = 1, \qquad \text{et} \qquad \lim_{1^+} f = a+b+1.$$

D'autre part, $\forall x \in]0,1[$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et $\forall x > 1$, on a $f'(x) = 2ax+b$. Il vient

$$\lim_{1^-} f' = \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \qquad \lim_{1^+} f' = 2a+b.$$

Finalement, on a f dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$\begin{cases}a+b+1=1\\ 2a+b=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=0\\ 4a+2b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-a\\ 2a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

D'autre part, f ne peut en aucun cas être dérivable sur $[0,+\infty[$ étant donné que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Par contre f est bien continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 4

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2(x-1)^2 + 3|x-3| & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x^3 - 2(x+1)^2 + 3|x+3| & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. On a, par exemple si $x > 0$, et donc $-x < 0$,

   $$f(-x) = -(-x)^3 - 2(-x+1)^2 + 3|-x+3| = x^3 - 2(x-1)^2 + 3|x-3| = f(x).$$

   De même lorsque $x < 0$. Donc f est paire. On en déduit que f est continue en 0, puisque, par parité, on a

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{u\to 0^+} f(-u) = \lim_{u\to 0^+} f(u).$$

   Comme f est clairement continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Par parité, on a encore $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f$. Or, on a, pour $x > 0$ grand

   $$f(x) = x^3 - 2(x-1)^2 + 3(x-3) = x^3\left(1 - 2\frac{(1-\frac{1}{x})^2}{x} + 3\frac{1-\frac{3}{x}}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\to} +\infty.$$

   On en déduit que

   $$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty.$$
3. Il suffit d'appliquer le théorème de Weierstrass (version limites infinies) du cours pour en déduire l'existence d'un minimum global pour f sur $\mathbb{R}$. Ces limites infinies impliquent également que f ne peut en aucun cas avoir de maximum global sur $\mathbb{R}$. Déterminons maintenant ce minimum global. Par parité, il suffit de le faire sur $\mathbb{R}^+$. Observons que f est dérivable sur $]0,3[\cup]3,+\infty[$. Si le minimum de f est atteint en un point x_0 de cet ensemble, alors $f'(x_0) = 0$. Pour tout $x \in]0,3[$, on a

   $$f'(x) = 3x^2 - 4(x-1) - 3 = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1),$$

   s'annule en $x_0 = 1$ et $x_1 = 1/3$. Or $f(1) = 7$, $f(1/3) = \frac{193}{27} > f(1)$. De même, pour tout $x \in]3,+\infty[$, on a

   $$f'(x) = 3x^2 - 4(x-1) + 3 = 3x^2 - 4x + 7,$$

   qui n'a pas de racine (car $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 7 < 0$). Enfin, on a $f(0) = 7$, $f(3) = 19$. Ainsi, on a

   $$\min_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}^+} f = \min\{f(0), f(1), f(1/3), f(3)\} = 7.$$

   Ce minimum est atteint en $-1, 0$ et 1.

Exercice 5

$$f(t) = t\ln(t).$$

1. L'ensemble de définition naturel de f est $D_f =]0, +\infty[$. D'autre part, par théorème de croissance comparée, on a

$$\lim_{0^+} f = 0.$$

Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

2. On calcule la dérivée de f : pour $t \in D_f$, on a

$$f'(t) = 1 + \ln t.$$

Ainsi $f'(t) \geqslant 0$ si et seulement si $\ln t \geqslant -1$, *i.e.* $t \geqslant e^{-1}$. Donc f est croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$, décroissante sur $]0, e^{-1}]$. D'autre part, $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Ainsi, on a le tableau de variation suivant :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le taux d'accroissement de f au voisinage de 0 vaut, si $t > 0$,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln t \underset{t\to 0}{\to} -\infty.$$

Par conséquent, f prolongée par continuité en 0 n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente verticale à l'origine. Le graphe de f est donné ci-dessous Figure 1.

4. D'après (b), f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[f(1), +\infty[= [0, +\infty[$ (ceci est du au fait que, f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $f(\,[1, +\infty[\,)$ est un intervalle dont les bornes sont $f(1)$ et $\lim_{+\infty} f$). Ainsi f est inversible sur $[1, +\infty[$, et on notera g son inverse dans la suite,

$$g = f|_{[1,+\infty[}^{-1}.$$

Par contre, f n'est clairement pas injective sur $]0, +\infty[$, elle ne peut donc pas être inversible sur $]0, +\infty[$.

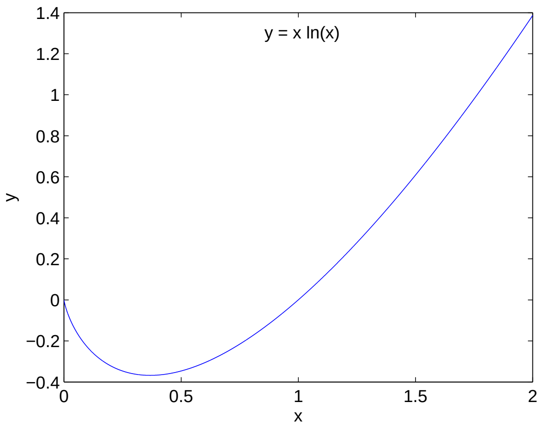

Figure 1 – Graphe de $f(t) = t \ln t$.

5. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $f(t) \leqslant 0$. Donc
$$f^{-1}\left(\,]0,+\infty[\,\right) \subset \,]1,+\infty[.$$
Il suffit alors d'appliquer la question précédente pour obtenir que, pour tout $\alpha > 0$, il existe un unique $t_\alpha > 0$ tel que $f(t_\alpha) = \alpha$, et
$$t_\alpha = g(\alpha).$$

6. Soit $\alpha \in]0,1]$. On a $f(1) = 0$ et $f(2) = 2\ln 2 > 1$. Par conséquent, f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'on a $1 < t_\alpha < 2$.

7. La croissance de la fonction $\alpha \mapsto t_\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ découle de la croissance de f. Comme f est dérivable de dérivée strictement positive sur $]1,+\infty[$, on en déduit par théorème de dérivation des fonctions réciproques que g est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée
$$g'(\alpha) = \frac{1}{f'(g(\alpha))} > 0$$
pour tout $\alpha > 0$. Ainsi g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et la fonction $\alpha \mapsto t_\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Comme g est continue sur $[0,+\infty[$ (comme fonction réciproque d'une fonction continue), on a
$$\lim_{\alpha\to 0} t_\alpha = \lim_{\alpha\to 0} g(\alpha) = g(0) = 1.$$

9. Commençons par montrer que
$$\lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1.$$

Observer qu'on a

$$\lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\ln(u)-\ln 1}{u-1}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction logarithme au voisinage de 1. Lorsque u tend vers 1, cette quantité a pour limite la valeur de la dérivée de la fonction logarithme en 1, donc comme pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \ln'(t)=1/t$, on a bien

$$\lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}=1.$$

Maintenant, comme $\lim_{\alpha\to 0} t_\alpha=1$, par composition de limites, on déduit du résultat précédent que

$$\frac{\ln t_\alpha}{t_\alpha-1}\underset{\alpha\to 0}{\to}1.$$

On peut donc écrire, en utilisant le fait que $t_\alpha\ln t_\alpha=\alpha$,

$$\frac{t_\alpha-1}{\alpha}=\frac{t_\alpha-1}{\ln t_\alpha}\times\frac{\ln t_\alpha}{\alpha}=\frac{t_\alpha-1}{\ln t_\alpha}\times\frac{1}{t_\alpha}$$

Ces deux termes tendent vers 1 lorsque α tend vers 0. Par conséquent,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{t_\alpha-1}{\alpha}=1.$$

En particulier, il existe une fonction ϵ, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle en 0, et telle que pour α proche de 0, on ait

$$t_\alpha=1+\alpha+\alpha\epsilon(\alpha).$$