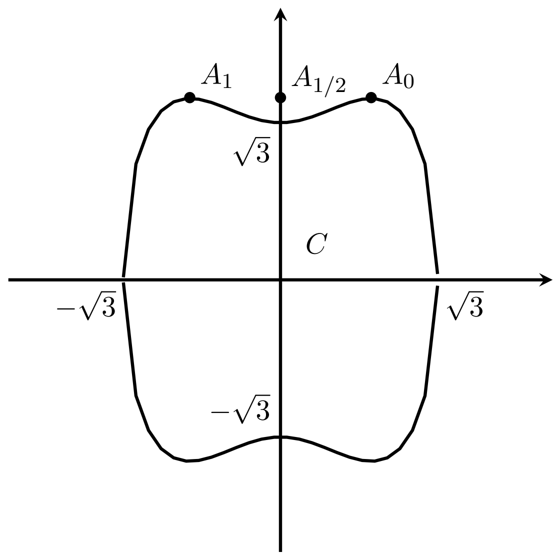
Devoir Maison d'Optimisation Numérique
—
Corrigé

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x^2-1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

1. Dessiner l'ensemble C.
2. S'agit-il d'un ensemble compact ?
3. S'agit-il d'un ensemble convexe ?
4. Considérer la fonction f donnée par $f(x,y) = xy$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
5. Calculer $\inf\{f(x,y) \,:\, (x,y) \in C\}$ et $\sup\{f(x,y) \,:\, (x,y) \in C\}$.

Solution



L'ensemble C est bien compact, puisqu'il est fermé (à cause de l'inégalité large dans la définition) et borné (pour tout $(x,y) \in C$ nous avons $|x|, |y| \leq 2$).

Il n'est pas convexe, parce que les point $A_0 = (1,2)$ et $A_1 = (-1,2)$ appartiennent à C mais leur point intermédiaire $A_{1/2} = (0,2)$ n'y appartient pas puisque $2^2 + (0^2-1)^2 = 5 > 4$.

La fonction f est continue et elle admet donc in minimum et un maximum sur C par le théorème de Weierstrass.

Si on calcule ∇f on $\nabla f(x,y) = (y,x)$. La contrainte est $g(x,y) \leq 0$ avec $g(x,y) = y^2 + (x^2-1)^2 - 4$ et $\nabla g(x,y) = (4x(x^2-1), 2y)$. Les deux fontions f et g sont bien dérivables partout (elles sont C^1). La fonction g permet d'appliquer le théorème des multiplicatuers des Lagrange parce que $\nabla g = 0$ seulement en $(0,0), (1,0)$ et $(-1,0)$, qui n'appartiennent pas à l'ensemble où $g = 0$ (le bord de C).
Les points candidats à la minimisation et à la maximisation sont donc
– les points où $\nabla f = 0$, c'est-à-dire juste $(0,0)$
– les points où le système donné par le multiplicateur de Lagrange est satisfait

$$\begin{cases} y = 4\lambda x(x^2-1), \\ x = 2\lambda y, \\ y^2 + (x^2-1)^2 = 4. \end{cases}$$

Pour résoudre le système remarquons d'abord que λ ne peut pas être nul (sinon on aurait $x = y = 0$ mais la troisième équation n'est pas satisfaite). Nous pouvons ensuite multiplier les deux premières équations entre elles après avoir réécrit la deuxième comme $2\lambda y = x$ et nous obtenons

$$2\lambda y^2 = 4\lambda x^2(x^2-1).$$

Avec la troisième équation, et en divisant par $2\lambda \neq 0$, cela donne

$$4 - (x^2-1)^2 = 2x^2(x^2-1).$$

Posons $t = x^2 - 1$. On a $t \geq -1$ et

$$4 - t^2 = 2t(t+1),$$

qui est une équation d'ordre deux dont les solutions sont

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3},$$

mais seulement $t = (-1+\sqrt{13})/3$ satisfait $t \geq -1$. On trouve alors $x = \pm\sqrt{t+1} = \pm\sqrt{(2+\sqrt{13})/3}$. En correspondance de cela, on trouve $y = \pm\sqrt{4-t^2} = \pm\sqrt{22+2\sqrt{13}}/3$. Les point sur les bords qui sont candidats à l'optimisation sont donc

$$(x,y) = \left(\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}, \pm\frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{3}\right).$$

Il est évident que les deux choix où x et y ont le même signe donnent une valeur de f égale et positive, les deux avec signes opposés égale et négative, et on compare cela avec $f(0,0) = 0$.

On a donc

$$\max_C f = \sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}} \cdot \frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{3} \qquad \min_C f = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{3}} \cdot \frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{3}.$$

Exercice 2 (5 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x_1,x_2,x_3) = |x_1| + |x_2|^2 + |x_3|^3$. S'agiti-il d'une fonction convexe ? strictement convexe ? écrire son sous-différentiel $\partial f(x)$ en tout point $x = (x_1,x_2,x_3)$.

Solution

La fonction f est convexe en tant que somme de fonctions convexes d'une variable. Pourtant, elle n'est pas strictement convexe parce que la partie qui porte sur x_1 ne l'est pas, et elle est indépendante des deux autres. Par exemple, en prenant $f(1,0,0)$, $f(3,0,0)$ et $f(2,0,0)$ on trouve une contradiction à la stricte convexité.

En tout point (x_1,x_2,x_3) avec $x_1 \neq 0$ la fonction f est différentiable et son gradient vaut $\nabla f(x_1,x_2,x_3) = (\text{signe}(x_1), 2x_2, 3x_3^2\,\text{signe}(x_3))$.

Si on prend un point du type $(0,x_2,x_3)$ on a $p = (p_1,p_2,p_3) \in \partial f(0,x_2,x_3)$ si et seulement si

$$\forall (h_1,h_2,h_3) \quad |h_1| + |x_2+h_2|^2 + |x_3+h_3|^3 \geq 0 + |x_2|^2 + |x_3|^3 + h_1p_1 + h_2p_2 + h_3p_3.$$

En prenant $h_1 = h_2 = 0$ et $h_3 \to 0$ on trouve forcément $p_3 = 3x_3^2\,\text{signe}(x_3)$, et en prenant $h_1 = h_3 = 0$ et $h_2 \to 0$ on trouve forcément $p_2 = 2x_2$. En prenant $h_2 = h_3 = 0$ on a ensuite

$$|h_1| \geq p_1 h_1$$

qui doit être satisfaite pour tout $h_1 \in \mathbb{R}$, ce qui implique $|p_1| \leq 1$.

On sait donc que tout élément de $\partial f(0,x_2,x_3)$ est de la forme $(t, 2x_2, 3x_3^2\,\text{signe}(x_3))$ pour $t \in [-1,1]$. D'autre part, ce n'est pas difficile de vérifier, en utilisant la convexité de $x_2 \mapsto |x_2|^2$ et $x_3 \mapsto |x_3|^3$, et l'inégalité $|h_1| \geq p_1h_1$ pour tout $h_1 \in \mathbb{R}$ et tout $p_1 \in [-1,1]$, que tout vecteur de cette forme appartient bien à $\partial f(0,x_2,x_3)$.

Nous avons finalement

$$\partial f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \{(\text{signe}(x_1), 2x_2, 3x_3^2\,\text{signe}(x_3))\} & \text{si } x_1 \neq 0 \\ \{(t, 2x_2, 3x_3^2\,\text{signe}(x_3)) \,:\, t \in [-1,1]\} & \text{si } x_1 = 0. \end{cases}$$

Exercice 3 (4 points)**.** Suggérer et décrire une méthode numérique itérative efficace pour résoudre le problème de projection

$$\min \quad ||x-a|| \ : \ x \in E$$

où $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est fixé et

$$E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \leq x_{i+1} \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Pour que la réponse soit satisfaisante, il faut expliquer à chaque étape les calculs qu'on doit faire et comment les faire. Il pourrait éventuellement être utile de reformuler le problème de manière équivalente (changer variables, minimiser une fonction différente mais avec les mêmes minimiseurs...).

Solution

Il y a plusieurs possibilités qu'on ne détaillera pas complètement. Dans tous les cas, il vaut mieux remplacer $||x-a||$ avec $\frac{1}{2}||x-a||^2$.

Une possibilité est d'utiliser l'algorithme d'Uzawa pour résoudre

$$\min_x \sup_{\lambda_i \geq 0} \frac{1}{2}||x-a||^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_i - x_{i+1}).$$

Ceci donne lieu à une suite calculée comme suit

$$x^k = \text{argmin}_x \frac{1}{2}||x-a||^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^k (x_i - x_{i+1}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1^k = a_1 - \lambda_1^k, \\ x_i^k = a_i - \lambda_i^k + \lambda_{i-1}^k, \\ x_n^k = a_n + \lambda_{n-1}^k; \end{cases}$$

et ensuite on définit $\lambda_i^{k+1} = (\lambda_i^k + \rho(x_i^k - x_{i+1}^k)_+$, pour un petit paramètre ρ. La suite des x^k ci-obtenue converge alors vers le miniseur.

D'autres possibilité : réécrire le problème comme un problème de minimisation sur $(x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$, $y_i \geq 0$ et $x_i = x_1 + \sum_{j=2}^{i} y_j$, du coup cela donne

$$\min_{x_1 \in \mathbb{R}, y_i \geq 0} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(x_1 + (\sum_{j=2}^{i} y_j) - a_i \right)^2.$$

Dans ce problème l'expression de la fonctionnelle est plus difficile (mais toujours quadratique) mais la contrainte est plus simple. On peut envisager un algorithme de gradient projeté.

Troisième possibilité : méthode pénalisation

$$\min_x \frac{1}{2}||x-a||^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})_+^2.$$

Pour une réponse complète il serait bien d'indiquer comment calculer le x^ε optimal.

Exercice 4 (5 points)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $d(x, K) = \inf\{|x-y| \ : y \in K\}$.

1. Peut-on dire que la borne inférieure dans la définition de $d(x, K)$ est atteinte ? pourquoi ?
2. Donner un exemple d'ensemble K et de point x telle que cette borne est atteinte mais en plusieurs points $y \in K$ (un dessin pourrait suffire).
3. La fonction $x \mapsto d(x, K)$ est-elle continue ?
4. Donner un exemple où la fonction $x \mapsto d(x, K)$ n'est pas convexe.

5. Peut-on dire qu'elle convexe, si on rajoute l'hypothèse que K soit convexe ?

Solution

La borne est atteinte même si K n'est pas borné (auquel cas il serait compact) parce que la fonction que l'on minimise est coercive, et la minimisation peut se faire sur un compact, donc.

Si $K = \{A, B\}$ avec $A \neq B$ le point $(A+B)/2$ est à distance égale de A et de B, il a donc deux projections.

Pour tout y la fonction $x \mapsto |x - y|$ est Lipschitzienne de constante 1. Par conséquent, la fonction $d(x, K) = \inf\{|x - y| \ : \ y \in K\}$ l'est aussi (comme inf d'une famille de fonctions Lipschitizienne avec la même distance).

Si $K = \{A, B\}$ avec $A \neq B$, le point $(A + B)/2$ on a $d_K(A) = d_K(B) = 0$ alors que $d_K((A + B)/2) = |A - B|/2 > 0$, ce qui démontre que d_K n'est pas convexe.

Par contre, si K est convexe, considérons $x_0, x_1 \in \mathbb{R}_n$ et $y_0, y_1 \in K$ leurs projections respectives. Soit $t \in [0, 1]$. Le point $y_t = (1-t)y_0+ty_1$ appartient à K parce que K est convexe. Or, soit $x_t := (1-t)x_0+tx_1$

$$\begin{aligned} d_K(x_t) \leq |x_t - y_t| = |(1 - t)(x_0 - y_0) + t(x_1 - y_1)| \\ \leq (1 - t)|x_0 - y_0| + t|x_1 - y_1| = (1 - t)d_K(x_0) + td_K(x_1), \end{aligned}$$

ce qui montre la convexité de d_K.

Exercice 5 (5 points)**.** Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'(t)^2 + 64|u(t)|^{7/4} \right) dt$$

et le problème de minimisation

$$\min \left\{ F(u) \ : \ u \in C^1([0, 1]), \ u(1) = 16 \right\}.$$

1. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à ce problème de minimisation, avec les conditions au bord opportunes.
2. Trouver une solution $\bar{u}$ de cette équation, en la cherchant de la forme $\bar{u}(t) = At^\alpha$.
3. Justifier que $\bar{u}$ est solution du problème de minimisation, qu'elle est la seule solution du problème de minimisation et aussi la seule solution de l'équation avec ses conditions au bord.

Solution

Nous utilisons la fonction $L(t, x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + 64|x|^{7/4}$. On a

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x, v) = 16 \cdot 7|x|^{3/4} \operatorname{signe}(x), \quad \frac{\partial L}{\partial v}(t, x, v) = v,$$

ce qui nous permet d'obtenir l'équation d'Euler-Lagrange et la condition de transversalité au point $t = 0$ (en $t = 1$ la valeur est fixée), et donc le système

$$\begin{cases} u''(t) = 16 \cdot 7|u(t)|^{3/4} \operatorname{signe}(u(t)), \\ u'(0) = 0, \\ u(1) = 16. \end{cases}$$

Si on cherche une solution du type $u(t) = At^\alpha$ on doit choisir $A = 16$ pour satisfaire la dernière équation et $\alpha > 1$ suffit pour la deuxième. Pour satisfaire la première il faut imposer

$$\alpha(\alpha - 1)At^{\alpha-2} = 16 \cdot 7 \cdot A^{3/4}t^{\frac{3}{4}\alpha}$$

(le signe est positif), qui impose en particulier $\alpha-2 = \frac{3}{4}\alpha$, d'où $\alpha = 8$. On peut alors vérifier que la fonction $u(t) = 16t^8$ est bien solution de l'équation, puisque $u''(t) = 16 \cdot 8 \cdot 7t^6$ et $|u(t)|^{3/4} \operatorname{signe}(u(t)) = 8t^6$.

La fonction L étant convexe, minimiser et résoudre le système sont deux notions équivalentes ; L étant également strictement convexe, la solution du problème de minimisation est unique. On en déduit que u est la seule solution du système aussi (attention, les calculs qu'on a fait auparavant nous avaient juste dit qu'elle étaient la seule solution *de la forme* $u(t) = At^\alpha$).