Devoir Maison d'Optimisation Numérique

Essayez de le faire en deux heures max.
Si vous voulez qu'il soit corrigé, déposez-le dans le casier de F. Santambrogio
au plus tard le mercredi 19 mars à 18h30.

Exercice 1 (6 points)**.** Soient $(x_i, y_i)_{i=1,2,3,4}$ quatre points donnés de $\mathbb{R}^2$. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \prod_{i=1}^{4} \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - 1\right)_+ = 0\right\}$$

(rappelons que $(t)_+ := \max\{t, 0\}$ indique la partie positive d'un nombre $t \in \mathbb{R}$).

1. Dessiner l'ensemble C dans le cas où $x_i = \pm 1, y_i = \pm 1$ (les quatre points étant $(\pm 1, \pm 1)$).
2. S'agit-il d'un ensemble compact ?
3. S'agit-il d'un ensemble convexe ?
4. Décrire et dessiner l'ensemble convexe K minimal parmi ceux qui contiennent C.
5. Donner une formule (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + xy + y^2 \leq 1\right\}$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = 2xy + y^2$.

1. Prouver que A est compact et convexe.
2. Est-ce que f est une fonction convexe ?
3. Prouver que la fonction f admet un minimum et un maximum sur A.
4. Déterminer les valeurs du minimum et du maximum, ainsi que les points où ils sont réalisés.

Exercice 3 (5 points)**.** Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x + \sqrt{1 + ||x||^2},$$

où $||x||$ indique la norme Euclidienne du vecteur x.

Prouver que f est une fonction elliptique et déterminer des coefficients α et M (en termes des valeurs propres de A) tels que f soit $\alpha-$elliptique et ∇f soit $M-$Lipschitzien. Suggérer un algorithme pour approcher la solution du problème de minimisation de f sur $\mathbb{R}^2$, en donner la description explicite (une formule explicite pour x_{k+1} en fonction de x_k et, s'il y a des paramètres à choisir, en donner une valeur admissible) et justifier de sa convergence en s'appuyant sur les résultats vus en cours.

Exercice 4 (6 points)**.** Résoudre

$$\min\left\{\int_0^1 e^{\frac{3}{2}t}\left(u'(t)^2 + u(t)^2\right) dt \quad : \quad u \in C^2([0,1]),\ u(0) = 1\right\}.$$

Dès qu'un candidat u^* à la minimisation sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur. Calculer également la valeur du minimum.