Devoir Maison d'Optimisation Numérique

Essayez de le faire en deux heures max.
Si vous voulez qu'il soit corrigé, déposez-le dans le casier de F. Santambrogio
au plus tard le mardi 17 mars à 18h30.

Exercice 1 (7 points)**.** Étant donné un nombre $r \in]0,1[$, soit $C \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble donné par

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+1+z^2 \le r^2\}.$$

1. Prouver que l'ensemble C est compact.
2. S'agit-il d'un ensemble convexe ?
3. Dessiner l'ensemble C.
4. Trouver les valeurs du maximum et du minimum de la fonction $f(x,y,z) := x+z$ sur C.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer l'ensemble $A = \overline{B(a,2)} \cap \overline{B(b,2)} \cap \overline{B(c,2)} \subset \mathbb{R}^2$, où $a = (0,0)$, $b = (1,\sqrt{3})$ et $c = (-1,\sqrt{3})$.

1. Prouver que A est compact et convexe.
2. Donner une expression pour la projection sur le convexe A, et dessiner comment cette projection agit sur les différents points du plan.

Exercice 3 (6 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) := \cos\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) + \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

1. Prouver que f est elliptique et que ∇f est Lipschitzien.
2. Trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ où $\nabla f(x) = 0$.
3. En déduire la valeur de $\min\{f(x) \,:\, x \in \mathbb{R}^n\}$.
4. Suggérer un algorithme pour résoudre $\min\{f(x) \,:\, x \in K\}$ où $K = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \ge \pi\}$.
5. Donner les détails de l'algorithme choisi et de ses itérations.

Exercice 4 (6 points)**.** Résoudre

$$\min\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2}u'(t)^2 + u(t)\sqrt{t}\right)dt \quad : \quad u \in C^1([0,1]),\ u(0)=0\right\}.$$

Dès qu'un candidat u^* à la minimisation sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur. Calculer également la valeur du minimum.