Polytech Paris-Sud
Mardi 10 janvier 2011

Contrôle continu de Mathématiques – PeiP 1 S1

Durée : 2h

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun autre document que la feuille des développements limités usuels n'est autorisé.

Exercice 1 (2 points) Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée C^1 définie sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = f(x(t), y(t)).$$

On suppose que $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma'(0) = (1, 2)$ et $\nabla f(0, 0) = (3, 1)$. Calculez $g'(0)$.

Exercice 2 (3 points) On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, par

$$f(x, y) = 2\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(x).$$

Écrivez le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$. Quelle est la nature du point $(0, 0)$ (est-ce un point critique ? si oui, est-ce un minimum local, un maximum local, un point col ...) ?

Exercice 3 (7 points) On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ définie par

$$\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) - \cos(2t), \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t). \end{cases}$$

On pose $\Gamma = \{(x(t), y(t)) | t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrez que l'on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Trouvez un axe de symétrie de Γ qui permette de réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
2. Pour t dans $[0, \pi]$, calculez $x'(t)$ et $y'(t)$. Donnez le tableau de variation de x et y sur $[0, \pi]$.
3. Donnez l'équation des tangentes à Γ en $t = \pi/3$, $t = 2\pi/3$ et $t = \pi$.
4. En faisant un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de 0, trouvez la demi-tangente à Γ en $t = 0$.
5. Tracez la courbe Γ.
6. Calculez la longueur de Γ.

Vous pouvez utiliser la valeur approchée $\sqrt{3}/2 \approx 0.87$ pour le tracé.

Exercice 4 (5 points) Soit un entier $N \geq 2$. On considère N points de $\mathbb{R}^2$ notés $P_1, \ldots, P_N$, avec $P_i = (x_i, y_i)$ pour $1 \leq i \leq N$. On pose

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right).$$

Le but de l'exercice est de trouver le point de $\mathbb{R}^2$ en lequel f est minimale.

1. Montrez que f admet un unique point critique, que l'on notera P_0, et calculez les coordonnées (x_0, y_0) de ce point en fonction des (x_i, y_i).
2. Montrez que P_0 est un point de minimum local de f.
3. Montrez que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = N(x - x_0)^2 + N(y - y_0)^2 + f(x_0, y_0).$$

   Déduisez-en que P_0 est un point de minimum global de f.
4. Donnez une interprétation géométrique du point P_0.

Exercice 5 (6 points) On considère le domaine du plan

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 9\}.$$

On définit la fonction $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = xy.$$

Le but de cet exercice est de trouver le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{E}$.

1. On admet que l'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé. Montrez qu'il est borné. En citant un résultat du cours, montrez que f a bien un minimum et un maximum sur $\mathcal{E}$.
2. Montrez que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f. Quel est la nature de ce point ? Que peut-on en conclure sur les points de minimum et de maximum ?
3. On considère le paramétrage suivant pour le bord de $\mathcal{E}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 3\cos(t), \\ y(t) & = & \frac{3}{2}\sin(t). \end{array} \right.$$

   On pose $g(t) = f(x(t), y(t))$. Tracez le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
4. Déduisez des questions précédentes les valeurs minimale et maximale de f sur $\mathcal{E}$, ainsi que les points en lesquels ces valeurs sont atteintes.