Polytech Paris-Sud
Mardi 10 janvier 2011

Correction du contrôle 3 de Maths 1

Exercice 1 Par composition, g est C^1 et d'après la formule de dérivation des fonctions composées

$$g'(0) = \nabla f(0,0) \cdot \gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y'(0)$$

On a donc

$$g'(0) = (3,1) \cdot (1,2) = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5.$$

Exercice 2 On peut calculer directement le développement limité :

$$f(x,y) = 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) + (x + o(x))(y + o(y)) =$$
$$2 - x^2 - y^2 + xy + o(x^2 + y^2).$$

Par identification des coefficients de ce développement avec les coefficients dans la formule de Taylor, on trouve

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0, \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(0,0)$ est un point critique, et

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= -2, \\ \tfrac{\partial^2}{f}\partial y^2(0,0) &= -2, \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

Comme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(0,0) = 1^2 - (-2) \times (-2) = -3 < 0$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0,$$

le point $(0,0)$ est un maximum local pour f.

Exercice 3
1. Les fonctions x et y sont 2π-périodiques. On peut donc réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[-\pi,\pi]$. De plus, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$. La courbe Γ est donc symétrique par rapport à l'axe Ox, et on peut réduire le domaine d'étude à $[0,\pi]$
2. Soit $t \in [0,\pi]$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin(t) + 2\sin(2t), \\ y'(t) &= 2\cos(t) - 2\cos(2t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x'(t) &= 4\cos\left(\tfrac{3t}{2}\right)\sin\left(\tfrac{t}{2}\right), \\ y'(t) &= 4\sin\left(\tfrac{3t}{2}\right)\sin\left(\tfrac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

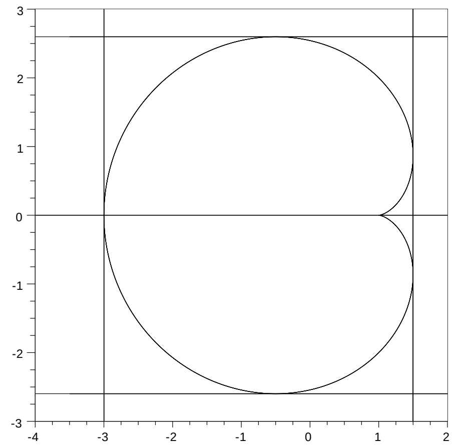


FIGURE 1 – Courbe Γ

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
$y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

3. En $t = \pi/3$, $x'(t) = 0$ donc la tangente à Γ est verticale, d'équation $x = \frac{3}{2}$. En $t = \frac{2\pi}{3}$, l'équation de la tangente est $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. En $t = \pi$, l'équation de la tangente est $x = -3$.
4. Le point (1,0), qui correspond à $t = 0$, est stationnaire. En $t = 0$ on a les développements limités

$$\begin{array}{rcccl} x(t) & = & 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - \left(1 - \frac{(2t)^2}{2} + o(t^2)\right) & = & 1 + t^2 + o(t^2), \\ y(t) & = & 2\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) - \left(2t - \frac{(2t)^3}{6} + o(t^3)\right) & = & t^3 + o(t^3). \end{array}$$

Ainsi

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^3 + o(t^3)}{t^2 + o(t^2)} \to 0 \text{ lorsque } t \to 0.$$

La courbe Γ a donc une demi-tangente horizontale en $t = 0$.
5. Voir la figure 1.
6. On note L la longeur de Γ.

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} =$$

$$\sqrt{4^2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 4^2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2} =$$

$$4\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \sqrt{\cos\left(\frac{3t}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{3t}{2}\right)^2} = 4\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

Ainsi

$$L = \int_0^{2\pi} 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 16.$$

Exercice 4 On remarque que f est polynomiale, donc en particulier de classe C^2. On peut donc appliquer les théorèmes du cours sur les extrema locaux.
1.

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2\sum_{i=1}^N (x - x_i) & = & 2\left(Nx - \sum_{i=1}^N x_i\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2\sum_{i=1}^N (y - y_i) & = & 2\left(Ny - \sum_{i=1}^N y_i\right). \end{array}$$

Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0, \end{array} \right.$$

a donc une unique solution $P_0 = (x_0, y_0)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i, \\ y_0 & = & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_i. \end{array} \right.$$

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 2N, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 2N. \end{array}$$

Comme

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 f}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -4N^2 < 0$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 2N > 0,$$

le point P_0 est un minimum local pour f.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^N \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right) = \sum_{i=1}^N \left(((x - x_0) + (x_0 - x_i))^2 + ((y - y_0) + (y_0 - y_i))^2\right) =$$

$$\sum_{i=1}^N \left((x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(x_0 - x_i) + (x_0 - x_i)^2 + (y - y_0)^2 + 2(y - y_0)(y_0 - y_i) + (y_0 - y_i)^2\right) =$$

$$N(x - x_0)^2 + N(y - y_0)^2 + \sum_{i=1}^N \left((x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2\right) + 2(x - x_0)\sum_{i=1}^N (x_0 - x_i) + 2(y - y_0)\sum_{i=1}^N (y_0 - y_i).$$

Or

$$\sum_{i=1}^{N}(x_0 - x_i) = \sum_{i=1}^{N}(y_0 - y_i) = 0.$$

Ainsi,

$$f(x,y) = N(x-x_0)^2 + N(y-y_0)^2 + f(x_0,y_0).$$

Par conséquent, $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$. $P_0 = (x_0,y_0)$ est donc un point de minimum global pour f.

4. Le point P_0 est le barycentre des points P_i.

Exercice 5

1. Soit $(x,y) \in \mathcal{E}$, on a $x^2 + y^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 9$, d'où $\|(x,y)\| \leq 3$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc borné. Comme il est aussi fermé, c'est un ensemble compact. D'après un théorème vu en cours, toute fonction continue sur un compact admet un minimum et un maximum. La fonction f est polynomiale, donc continue sur $\mathcal{E}$, elle a donc un minimum et un maximum.

2. On remarque que f est polynomiale, donc en particulier de classe C^2 sur $\mathcal{E}$. On peut appliquer les théorèmes du cours sur les extrema locaux. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x.\end{aligned}$$

L'unique point critique de f est donc (0,0). La fonction f est un polynôme en x et y de degré 2, donc elle est égale à son développement limité à l'ordre 2 en (0,0). En identifiant les coefficients du développement avec ceux de la formule de Taylor, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= 0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 1,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 0.\end{aligned}$$

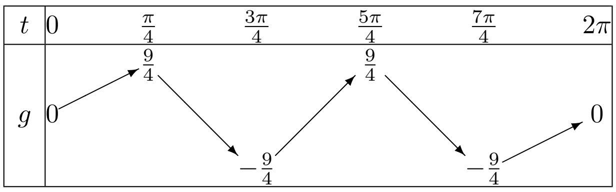
Comme

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1 > 0,$$

(0,0) est un point col. En particulier, ce n'est ni un point de minimum ni un point de maximum local. On en déduit que les points de minimum et de maximum locaux ne peuvent pas être à l'intérieur de $\mathcal{E}$ (ils seraient des points critiques). On doit donc rechercher ces points sur le bord de $\mathcal{E}$.

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{9}{2}\sin(t)\cos(t) = \frac{9}{4}\sin(2t).$$



4. Puisque f atteint son minimum et son maximum sur le bord, la minimum et le maximum de f sont égaux au minimum et au maximum de g. Le minimum de f est $-9/4$, atteint aux points $(x(3\pi/4), y(3\pi/4)) = (-3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/4)$ et $(x(7\pi/4), y(7\pi/4)) = (3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/4)$. Le maximum de f est $9/4$, atteint au points $(x(\pi/4), y(\pi/4)) = (3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/4)$ et $(x(5\pi/4), y(5\pi/4)) = (-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/4)$.