Université Paris-Sud
M1 Ingénierie Mathématique
2 juillet 2012

Examen d'Optimisation Numérique – Session 2

–

durée : 2h, documents non autorisé ; attention : sujet recto-verso

Exercice 1 (6 points)**.** Considérer la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donnée par $f(x,y)=1-\cos(x)+\frac{1}{2}y^2$.
Si un point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ est donné, on considérera la fonction $(x,y)\mapsto f(x-x_0,y-y_0)$.
Nous considérons aussi l'ensemble $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\in[0,2\pi],\ -M\le y\le\cos x\}$, où $M\geq 2$ est une constante donnée.

1. B est-il convexe ? fermé ? compact ?
2. Expliquer en quoi la fonction $(x,y)\mapsto f(x-x_0,y-y_0)$ ressemble, au voisinage de (x_0,y_0), à la fonction $(x,y)\mapsto\frac{1}{2}d((x,y),(x_0,y_0))^2$, où d indique la distance Euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier que, pour tout $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, le problème $\min\{f(x-x_0,y-y_0)\ :\ (x,y)\in B\}$ admet une solution.
4. *(plus important)* Trouver la solution du problème de minimisation ci-dessus dans le cas du point $(x_0,y_0)=(\pi,1)$.
5. La solution dépend-elle de la valeur de M ? que se passerait-il si on remplaçait la condition $x\in[0,2\pi]$ dans la définition de B avec $x\in\mathbb{R}$?

Exercice 2 (5 points)**.** Étant donné un vecteur $a\in\mathbb{R}^n$ avec $||a||=1$ et un nombre $\alpha\in\mathbb{R}$, considérer les ensembles

$$A_0(a,\alpha)=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ x\cdot a=\alpha\}\quad\text{et}\quad A_+(a,\alpha)=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ x\cdot a\geq\alpha\}.$$

1. Les ensembles $A_0(a,\alpha)$ et $A_+(a,\alpha)$ sont-ils convexes ? fermés ?
2. Donner des formules pour la projection $P_{A_0(a,\alpha)}$ sur A_0 et pour la projection $P_{A_+(a,\alpha)}$ sur A_+.
3. Si a et b sont deux vecteurs unités avec $a\neq b$ et $a\neq -b$ démontrer que, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on a $A_0(a,\alpha)\cap A_0(b,\beta)\neq\emptyset$.
4. *(plus difficile)* en partant d'un point $x_0\in\mathbb{R}^n$ donné, définir deux suites

$$y_k=P_{A_0(a,\alpha)}(x_k)\quad\text{et}\quad x_{k+1}=P_{A_0(b,\beta)}(y_k).$$

Sous l'hypothèse $n=2$ et $a\neq\pm b$, démontrer que les deux suites convergent vers le seul point appartenant à $A_0(a,\alpha)\cap A_0(b,\beta)$.

Exercice 3 (5 points)**.** Résoudre le problème

$$\min\{J(f):=\int_0^1(1+t)f'(t)^2dt\,;\ f\in\mathcal{A}\},\quad\text{où}\quad\mathcal{A}:=\{f\in C^1([0,1])\ :\ f(0)=1,\ f(1)=2\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien de minimiseurs.

Exercice 4 (5 points)**.** Considérer le problème

$$\min \left\{ J(f) := \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f'(t)^2 + f(t)^2 \right] dt \,;\ f \in C^1([0,1]) \ :\ f(0) = f(1) = 0,\ f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1 \right\}.$$

1. Expliquer pourquoi la solution de ce problème ne satisfait pas l'équation $f'' = f$.
2. Donner une idée de la forme de la solution en dessinant qualitativement son graphe (montrer si elle est convexe ou concave, si elle est C^1, quelles sont ses valeurs en $0, \frac{1}{2}$ et $1 \ldots$).
3. Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour le résoudre de manière approchée. Écrire précisément la fonction qu'on veut minimiser dans la discrétisation (avec les matrices et/ou les vecteurs qui apparaissent dans cette fonction) et expliquer la méthode choisie.

Exercice 5 (4 points)**.** Étant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, trouver la solution au problème d'optimisation suivant :

$$\min \quad \sum_{t=0}^{T-1} V_t(x_t, x_{t+1}) \ :\ x_0 = x \in \mathbb{R},\ x_{t+1} \in [-1 - x_t^2, 1 + x_t^2],$$

dans le cas $T = 3$ et

$$V_0(x_0, x_1) = x_0 x_1, \quad V_1(x_1, x_2) = 12 x_1^3 x_2, \quad V_2(x_2, x_3) = 2x_2^4 - 2x_2^2 x_3 + x_3^2.$$