Université Paris-Sud
M1 Ingénierie Mathématique
27 juin 2013

Optimisation Numérique – Examen de 2ème Session

durée : 2h, documents non autorisés

Exercice 1 (4 points)**.** On veut construire une boîte de conserve cylindrique de section circulaire d'un volume V fixé en minimisant sa surface, afin de minimiser la quantité de métal utilisé, et donc le coût de production. On note h la hauteur de la boîte et r le rayon de sa section. Le volume est alors $V = \pi r^2 h$. Pour le calcul de la surface de métal utilisé, il faut tenir compte de la surface nécessaire à l'emboutissage et l'on se donne la formule donnant la surface : $S = 2\pi r^2 + 2\pi r(h+1)$.

Montrer que le problème de minimisation de S sous la contrainte que V soit prescrit admet une solution. Trouver les valeurs optimales de (r, h) dans le cas $V = 3\pi$

Exercice 2 (4 points)**.** Pour un point $z \in \mathbb{R}^n$, on note z_i, $i = 1, \ldots, n$, les composantes de z. Soit C une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^n$ et soit p un réel supérieur strictement à 1.
a) Pour x un point de $\mathbb{R}^n$, on note J la fonction de C dans $\mathbb{R}$ qui à $y \in C$ associe $J(y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p$. Montrer qu'il existe un unique point a de C minimisant J.
b) Montrer que a est caractérisé par l'inégalité

$$\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^{p-1}(y_i - a_i) \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Exercice 3 (4 points)**.** Étant donné un point $x_0 > 0$ fixé, résoudre complètement le problème d'optimisation suivant :

$$\max \quad \left\{ \cos(x_2 + x_3) - x_1 x_2 + 2\sqrt{x_2} - \frac{1}{x_0 + x_1} \ : \ x_1 \in [x_0, 2x_0],\, x_2 \in \left[0, \frac{2}{x_1^2}\right],\, x_3 \in [x_2 - 4, x_2 + 4] \right\}.$$

Trouver en particulier la valeur du maximum et la ou les solutions (x_0, x_1, x_2, x_3). Dire dans quels cas la solution n'est pas unique.

Exercice 4 (4 points)**.** Résoudre

$$\min \left\{ \int_0^T \cos t \left(\frac{x'(t)^2}{2} + x(t) \right) dt \quad : \quad x \in C^1([0,T]),\ x(T) = a \right\},$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $T \in]0, \frac{\pi}{2}[$ sont donnés. Dès qu'un candidat à la minimisation x^* sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur.

Calculer également la valeur du minimum (ou, au moins, l'exprimer sous la forme d'une intégrale définie). Pourquoi a-t-on pris $T < \frac{\pi}{2}$?

Exercice 5 (9 points)**.** Considérer les problèmes de minimisation

$$\min \left\{ \int_0^1 \cos t \left(\frac{x'(t)^2}{2} + x(t) \right) dt \quad : \quad x \in \mathcal{A}_i \right\},$$

où $\mathcal{A}_i$ représente l'ensemble des fonctions admissibles dans ce problème d'optimisation et est donné par l'un des ensembles suivants

$$\mathcal{A}_1 = \{x \in C^1([0,1]) \ : \ x(0) = x(0.5) = x(1) = 0\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{x \in C^1([0,1]) \ : \ x(t) \geq t^2 \text{ pour tout } t \in [0,1]\}.$$

Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour approcher la résolution de ces problèmes. Justifier la convergence des méthodes choisies et discuter la vitesse de convergence.