**Université Paris-Sud**
**M1 Ingénierie Mathématique**
**28 mars 2013**

# Optimisation Numérique
# –
# Examen de 1ère Session
–
## durée : 2h, documents non autorisés

**Exercice 1** (5 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$ et les ensembles $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 6\}$ et $B = \{(x, y) \in A \,:\, x^2 \leq 2\}$.

1. La fonction $f$ est-elle convexe ?
2. Les ensembles $A$ et $B$ sont-ils convexes ? Compacts ?
3. Démontrer que $f$ admet un minimum et un maximum sur $A$ et les trouver, avec les points où ils sont réalisés.
4. Démontrer que $f$ admet un minimum et un maximum sur $B$ et les trouver, avec les points où ils sont réalisés.

**Exercice 2** (6 points)**.** Considérer les fonctions $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x, y, z) = (x-1)^2 + e^y + z^2 + e^z, \quad h(x, y, z) = e^{x+y} + \sin(x+y)$$

ainsi que la fonction $f = g + h$.

1. Dire si $g$ est une fonction convexe, écrire sa matrice hessienne, dire si elle est elliptique sur $\mathbb{R}^3$ et si elle l'est sur $A = [-1, 3]^3$.
2. Dire si $h$ est une fonction convexe et/ou elliptique sur $\mathbb{R}^3$ et/ou sur $A$.
3. La fonction $f$ est-elle elliptique sur $A$ ? Son gradient est-il lipschitizien sur $A$ ? Donner une estimation, même grossière, de la constante $\alpha$ d'ellipticité de $f$ et de la constante $M$ de Lipschitz de $\nabla f$.
4. Démontrer que $f$ admet un minimum sur $B = [0, 2]^3$ et que le minimiseur est unique.
5. Suggérer une méthode numérique pour approcher le minimiseur de $f$ sur $B$ et justifier sa convergence.
6. Donner une expression récursive précise de la suite de points parcourus par la méthode suggérée à la question précédente (sous la forme $x_{k+1} = \dots, y_{k+1} = \dots, z_{k+1} = \dots$).

**Exercice 3** (5 points)**.** Résoudre complètement le problème de programmation dynamique suivant :

$$\max \quad \left\{ \sum_{t=0}^{2} V_t(x_t, x_{t+1}) + V_3(x_3) \quad x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \right\},$$

où

- $x_0 > 3$ est un point de départ fixé ;
- les fonctions $V_t$ sont définies par

$$V_0(x_0, x_1) = -x_0 x_1^2, \;\; V_1(x_1, x_2) = -3(x_2 - \sqrt{1 + x_1})^4, \;\; V_2(x_2, x_3) = 4x_2^3 x_3, \;\; V_3(x_3) = -x_3^4;$$

- les ensembles $\Gamma_t$ sont définis par

$$\Gamma_0(x_0) = [1, +\infty[, \;\; \Gamma_1(x_1) = [0, \sqrt{1 + x_1}], \;\; \Gamma_2(x_2) = [-2|x_2|, 2|x_2|].$$

**Exercice 4** (5 points)**.** Résoudre

$$\min \left\{ \int_0^1 e^t \left( \frac{u'(t)^2}{2} + u(t)^2 \right) dt \quad : \quad u \in C^1([0, 1]), \; u(0) = 1 \right\}.$$

Dès qu'un candidat à la minimisation $u^*$ sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur.

Calculer également la valeur du minimum.

**Exercice 5** (4 points)**.** Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour approcher la résolution de

$$\min \left\{ \int_0^1 e^t \left( \frac{u'(t)^2}{2} + u(t)^2 + h(t)u(t) \right) dt \quad : \quad u \in C^1([0, 1]), \; u(0) = 1 \right\},$$

quelle que soit la fonction $h \in C^0([0, 1])$. Justifier la convergence de la méthode choisie et discuter sa vitesse de convergence.