

## Optimisation Numérique

### Examen de 2ème Session

durée : 2h, documents autorisés

**Exercice 1** (5 points). Parmi tous les triangles de périmètre prescrit égal à  $2p$ , trouver celui qui maximise la surface.

Si besoin, il est rappelé que la formule pour la surface d'un triangle dont les longueurs des cotés sont  $a, b$  et  $c$  avec  $a + b + c = 2p$  est donnée par la formule de Héron,  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ . D'autres solutions n'utilisant pas cette formule sont évidemment possibles.

**Exercice 2** (5 points). Trouver l'expression (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection  $P_K$  sur le convexe  $K \subset \mathbb{R}^2$  donné par  $K = \overline{B(0, 2)} \cap E$  où  $E$  est la bande  $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leq \sqrt{3}\}$ .

**Exercice 3** (5 points). Résoudre

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 e^{-t} \left( \frac{u'(t)^2}{2} + u(t) \right) dt \quad : \quad u \in C^1([-1, 1]), u(1) = 1 \right\}.$$

Dès qu'un candidat à la minimisation  $u^*$  sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur.

**Exercice 4** (10 points). Cet exercice se compose de deux parties

1. Soit  $A$  une matrice symétrique  $n \times n$  et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur donné. Proposer un algorithme pour résoudre le problème de minimisation

$$\min \left\{ \frac{1}{2} AX \cdot x - b \cdot x \quad : \quad x \in K \right\}, \quad \text{où } K = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n\}.$$

Donner explicitement les formules pour calculer les coordonnées  $x_i^{k+1}$  du  $(k+1)$ -ème point connaissant le  $k$ -ème.

2. Considérer les problèmes de minimisation

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 e^{-t} \left( \frac{u'(t)^2}{2} + u(t) \right) dt \quad : \quad u \in C^1([-1, 1]), u(1) = 1, -1 \leq u(t) \leq 1 \right\}.$$

Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour approcher la résolution de ces problèmes. Donner les détails des étapes de l'algorithme choisi étape par étape, en utilisant éventuellement les notations et les procédés introduits pour répondre à la première question.