Université Paris-Sud – Université Paris-Saclay
M1 Mathématiques Appliquées
Janvier 2016

Compléments d'Optimisation
–
Examen blanc

–

Ceci n'est qu'un exemple de sujet d'examen. Essayez de le faire en 2h
Tous les documents papier (cours, notes personnelles...) sont autorisés

Exercice 1 (6 points)**.** Trouver l'expression (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K sur le convexe $K \subset \mathbb{R}^2$ donné par $K = \overline{B(0,2)} \cup E_+ \cup E_-$, où E_+ est le triangle rectangle dont les trois sommets sont $(0,0), (1, \sqrt{3})$ et $(4,0)$ et E_- est le symétrique de E_+ par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 2 (6 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{1+|x|^2} + |x|^2$. Dire si elle est C^1, convexe, strictement convexe, elliptique et si ∇f est Lipschitzien. Si f est elliptique, calculer la constante $\alpha > 0$ d'ellipticité, et si ∇f est Lipschitzien en calculer la constante de Lipschitz.

Exercice 3 (6 points)**.** Résoudre

$$\min \left\{ \int_{-1}^{1} e^{-2t} \left(\frac{u'(t)^2}{2} + 2u(t) \right) dt \quad : \quad u \in C^1([-1,1]),\ u(1) = 1 \right\}.$$

Dès qu'un candidat à la minimisation u^* sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur. Calculer enfin la valeur du minimum.

Exercice 4 (8 points)**.** Soit $u \in C^2([0,1])$ une fonction telle que $uu'' = -1$, $u(0) = 1$, $u'(1) = 0$. Démontrer que u résout le problème de minimisation

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u'(t))^2 - \ln(u(t)) \right) dt \ : \ u \in C^1([0,1]),\, u > 0,\, u(0) = 1 \right\}.$$

Suggérer une méthode de discrétisation du problème de calcul des variations ci-dessus, et un algorithme itératif pour en approcher la solution.