Université Paris-Sud – Université Paris-Saclay
M1 Mathématiques Appliquées
27 janvier 2016

Compléments d'Optimisation

–

Examen de 1ère Session

–

durée : 2h
tous les documents papier (cours, notes personnelles...) sont autorisés

Exercice 1 (3 points)**.** Trouver l'expression (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K sur le convexe $K \subset \mathbb{R}^2$ donné par $K = \overline{B(0,1)} \cup [-1,0] \times [-1,0]$.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{1 + |x|^4}$. Dire si elle est C^1, convexe, strictement convexe, elliptique et si ∇f est Lipschitzien. Si f est elliptique, calculer la constante $\alpha > 0$ d'ellipticité, et si ∇f est Lipschitzien en calculer la constante de Lipschitz.

Exercice 3 (8 points)**.** Considérer le problème

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \sin(t + u(t)) \right) dt \quad : \quad u \in H^1([-1,1]),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1 \right\}.$$

1. Prouver que ce problème admet une solution.
2. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème.
3. Prouver que toute solution de cette équation est en fait une fonction C^∞.
4. *Plus difficile :* prouver que la solution du problème, tout comme de l'équation d'Euler-Lagrange, est unique.

Exercice 4 (10 points)**.** Considérer le problème de minimisation

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(u'(t))^2 + f(t)u(t)) \right) dt \ : \ u \in H^1([0,1]),\ u(0) = u(1) = 0,\ u \geq \psi \right\},$$

où $f, \psi \in C^0([0,1])$ sont deux fonctions données.

1. Prouver que ce problème admet une solution.
2. Prouver que la solution est unique.
3. Prouver que $\bar{u}$ est solution si et seulement si on a

$$\int_0^1 \left(\bar{u}'(t)(u'(t) - \bar{u}'(t)) + f(t)(u(t) - \bar{u}(t)) \right) dt \geq 0$$

pour toute fonction $u \in H^1([0,1])$ telle que $u(0) = u(1) = 0$ et $u \geq \psi$.

4. Prouver que la solution $\bar{u}$ satisfait $\bar{u}'' = f$ dans l'ouvert $\{\bar{u} > \psi\}$ et qu'elle est donc C^2 dans cet ouvert.
5. Suggérer une discrétisation du problème et un ou plusieurs algorithmes pour le résoudre.