Examen Blanc d'Equations Elliptiques et Calcul des Variations

–

Elliptic PDEs and Calculus of Variations Homework

–

Ce sujet veut donner une idée de ce que pourra être l'examen du 15 janvier. Son barème dépasse largement 20 - et il sera de même à l'examen - à vous de choisir sur quels exercices vous concentrer (ou alors vous pouvez toucher à tous les exercices).

This homework aims at giving an idea of the possible exercises in the examination of January 15th. The total score is much more than 20, it is up to you to decide whether to concentrate on some exercises or on all of them. The same will happen at the examination.

Exercice 1 (5 points)**.** Considérer, pour $i = 0, 1$, le problème de minimisation

$$(P_i) \quad \min\left\{\int_0^1 W_i(u'(t))\,dt \;:\; u \in H^1([0,1]),\, u(0) = 0,\, u(1) = A\right\},$$

où $W_0(y) = (|y| - 1)_+^2$ (c-à-d, le carré de la partie positive de $|y| - 1$) et $W_0(y) = (|y| - 1)^2$. Prouver que (P_0) admet au moins une solution quelle que soit la valeur de A. Déterminer les valeurs de A pour lesquelles il y a unicité de la solution et les trouver toutes. Prouver que (P_1) admet une solution (et la trouver) si et seulement si $|A| \geq 1$.

Consider, for $i = 0, 1$, the following minimization problem

$$(P_i) \quad \min\left\{\int_0^1 W_i(u'(t))\,dt \;:\; u \in H^1([0,1]),\, u(0) = 0,\, u(1) = A\right\},$$

where $W_0(y) = (|y| - 1)_+^2$ (i.e., the square of the positive part of $|y| - 1$) and $W_0(y) = (|y| - 1)^2$. Prove that (P_0) admits a solution whatever the value of A. Determine the values of A providing uniqueness and find all the solutions. Also prove that (P_1) admits a solution (and find it) if and only if $|A| \geq 1$.

Exercice 2 (3 points)**.** Soit A une matrice symétrique définie positive $n \times n$ fixée et, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, définissons l'ellipse

$$E(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; A(x - x_0) \cdot (x - x_0) \leq r\}.$$

Supposons qu'une fonction continue $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la propriété suivante : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ on a

$$u(x_0) = \frac{1}{|E(x_0, r)|} \int_{E(x_0,r)} u(x)dx,$$

où $|E(x_0, r)|$ est la mesure de Lebesgue de $E(x_0, r)$ (et à droite on a donc la moyenne sur cet ellipse). Trouver une équation elliptique à coefficients constants $\nabla \cdot (B\nabla u) = 0$ satisfaite par u, en reliant la matrice B à la matrice A.

Given a symmetric and positive-definite $n \times n$ matrix A, for each point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and each radius $r > 0$ we define the ellypse

$$E(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; A(x - x_0) \cdot (x - x_0) \leq r\}.$$

Suppose that a continuous function $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is such that for every $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$ it holds

$$u(x_0) = \frac{1}{|E(x_0, r)|} \int_{E(x_0,r)} u(x)dx,$$

where $|E(x_0, r)|$ is the Lebesgue measure of $E(x_0, r)$ (which means that the right-hand side is the average on the same set). Find an elliptic equations with constant coefficients $\nabla \cdot (B\nabla u) = 0$ solved by u, and explain how to find B from A.

Exercice 3 (6 points)**.** Soit $f \in L^2([0,1])$ donnée. Considérer fonctionnelle $J : L^2([0,1]) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$J(u) := \int_0^1 \left[t(u'(t))^2 + \frac{(u(t)-1)^2}{t} + f(t)u(t)\right] dt$$

(avec $J(u) = +\infty$ si $u \notin H^1_{loc}(]0,1[)$ ou si $t(u'(t))^2$ ou $(u(t)-1)^2/t$ ne sont pas intégrables sur $[0,1]$).

1. Prouver que J est semi-continue inférieurement par rapport à la convergence faible L^2.
2. Prouver qu'il existe une solution au problème $\min\{J(u) : u \in L^2([0,1])\}$.
3. Soit $g(x) = (x-1)^2$; prouver que pour toute suite $(u_n)_n$ avec $J(u_n) \leq C$ la suite $(g \circ u_n)_n$ est bornée dans $BV([0,1])$.
4. Prouver que toute fonction u telle que $J(u) < +\infty$ est continue sur $[0,1]$ et satisfait $u(0) = 1$.

Let $f \in L^2([0,1])$ be given. Consider the functional $J : L^2([0,1]) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by

$$J(u) := \int_0^1 \left[t(u'(t))^2 + \frac{(u(t)-1)^2}{t} + f(t)u(t)\right] dt$$

(with$J(u) = +\infty$ if $u \notin H^1_{loc}(]0,1[)$ or if $t(u'(t))^2$ or $(u(t)-1)^2/t$ are not integrable on $[0,1]$).

1. *Show that J is lower semi-continuous for the weakL^2 convergence.*
2. *Prove that there exist a solution to the problem $\min\{J(u) : u \in L^2([0,1])\}$.*
3. *Define $g(x) = (x-1)^2$; show that for any sequence $(u_n)_n$ with $J(u_n) \leq C$ the sequence $(g \circ u_n)_n$ is bounded in $BV([0,1])$.*
4. *Show that any function u such that $J(u) < +\infty$ is actually continuous on $[0,1]$ and satisfies $u(0) = 1$.*

Exercice 4 (5 points)**.** Soit $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ donnée par $\rho(x) := \frac{1}{1+|x|}$. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $u \in H^1_0(\Omega)$ une fonction non-négative. On prolonge u par 0 en dehors de Ω ; on peut donc définir $\rho * u$ par convolution sur tout $\mathbb{R}^N$. Supposons que

$$\nabla \cdot ((\rho * u)\nabla u) = f,$$

où $f \in C^\infty(\Omega)$. Prouver $u \in C^\infty(\Omega)$ (régularité à l'intérieur seulement).

Let $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ be given by $\rho(x) := \frac{1}{1+|x|}$. Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and $u \in H^1_0(\Omega)$ a non-negative function. Extend u with value 0 outside Ω ; we can define $\rho * u$ by convolution on the whole $\mathbb{R}^N$. Suppose that we have

$$\nabla \cdot ((\rho * u)\nabla u) = f,$$

where $f \in C^\infty(\Omega)$. Show $u \in C^\infty(\Omega)$ (only interior regularity).

Exercice 5 (7 points)**.** Étant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un carré ouvert et $f \in L^2(\Omega)$, considérons le problème

$$\min\Big\{\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2} + f\ln(u) \ :\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega),\ u > 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u = 1 \text{ sur } \partial\Omega\Big\}.$$

Prouver que ce problème admet une solution $u \in H^2(\Omega)$.

Given $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ an open square and $f \in L^2(\Omega)$, Consider the problem

$$\min\Big\{\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2} + f\ln(u) \ :\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega),\ u > 0 \textit{ in } \Omega \textit{ and } u = 1 \textit{ on } \partial\Omega\Big\}.$$

Show that this problem admits a solution $u \in H^2(\Omega)$.