M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Equations Elliptiques et Calcul des Variations

—

Examen de première session, 15 janvier 2014

Durée : 3h, tout document est autorisé

Exercice 1 (5 points)**.** Résoudre

$$\min\left\{\int_0^1 e^{2t}\left(u'(t)^2+u(t)^2\right)\,dt \quad : \quad u\in C^1([0,1]),\ u(0)=1\right\}.$$

Dès qu'un candidat u^* à la minimisation sera trouvé, il ne faudra pas oublier de justifier pourquoi il est bien un minimiseur. Calculer également la valeur du minimum.

Exercice 2 (3 points)**.** Soit $\Omega=\mathbb{R}^N\setminus\overline{B(0,1)}$ et $u\in L^1(\Omega)$ une fonction harmonique sur Ω au sens des distributions. Prouver que l'on a $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0$ ainsi que $\limsup_{|x|\to\infty}u(x)|x|^N<+\infty$. Peut-on dire $\sup_{x\in\Omega}u(x)|x|^N<+\infty$?

Exercice 3 (5 points)**.** Soit $\Omega=B(0,1)\subset\mathbb{R}^N$ avec $N>1$. Calculer

$$\inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2+u\ :\ u\in H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\ ,\ u(0)=0\right\}$$

et prouver que cette borne inférieure est un nombre réel négatif mais qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 4 (6 points)**.** Soit $u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une solution faible de $\Delta u=|\nabla u|+f(x)u$ où f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

1. Prouver $u\in H^3_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
2. Prouver $u\in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p<+\infty$.
3. En dimension $n=2$, prouver $u\in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ si l'hypothèse $f\in C^1$ est remplacée par $f\in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour un certain $p>1$.
4. Trouver un exemple où $f\in C^\infty$ mais $u\notin C^3$.

Exercice 5 (7 points)**.** Soit $\Omega=B(0,1)\subset\mathbb{R}^3$ et $p\in]1,\infty[$. Considérer le problème de minimisation suivant

$$\inf\left\{\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega|u|^p\right)^{2/p}}\ :\ u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}.$$

1. Prouver que pour $p<6$ la borne inférieure est en fait un minimum.
2. Dire si le minimiseur est unique et prouver qu'il est C^∞ à l'intérieur du domaine Ω.
3. Prouver que la borne inférieure vaut 0 si $p>6$.
4. Prouver que, pour $p=6$, la borne inférieure est strictement positive mais elle n'est pas atteinte.
5. Prouver que, pour $p=6$, la borne inférieure est la même qu'on aurait en remplaçant Ω par tout autre ouvert borné $\Omega'\subset\mathbb{R}^3$.
6. Que changerait-il en dimension supérieure à 3 ?

M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Elliptic PDEs and Calculus of Variations

—

First-session examination, January 15th, 2014

Duration : 3 hours, lecture notes and other documents are accepted

Exercise 1 (5 points)**.** Solve

$$\min\left\{\int_0^1 e^{2t}\left(u'(t)^2+u(t)^2\right)\,dt \quad : \quad u\in C^1([0,1]),\ u(0)=1\right\}.$$

As soon as a candidate u^* for the minimization has been found, do not forget to justify that it is really a minimizer. Compute also the minimal value.

Exercise 2 (3 points)**.** Consider $\Omega=\mathbb{R}^N\setminus\overline{B(0,1)}$ and let $u\in L^1(\Omega)$ be an harmonic function over Ω (in the sense of distributions). Prove that we have $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0$ and $\limsup_{|x|\to\infty}u(x)|x|^N<+\infty$. Can we say $\sup_{x\in\Omega}u(x)|x|^N<+\infty$?

Exercise 3 (5 points)**.** Take $\Omega=B(0,1)\subset\mathbb{R}^N$ with $N>1$. Compute

$$\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^2+u\ :\ u\in H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\ ,\ u(0)=0\right\}$$

and prove that the infimum is a real negative number, but that it is not a minimum.

Exercise 4 (6 points)**.** Let $u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ be a weak solution of $\Delta u=|\nabla u|+f(x)u$, where f is a C^1 function on $\mathbb{R}^n$.

1. Prove $u\in H^3_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
2. Prove $u\in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ for all $p<+\infty$.
3. In dimension $n=2$, prove $u\in W^{3,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ whenever the assumption $f\in C^1$ is replaced by $f\in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ for some $p>1$.
4. Find an example where $f\in C^\infty$ but $u\notin C^3$.

Exercise 5 (7 points)**.** Take $\Omega=B(0,1)\subset\mathbb{R}^3$ and $p\in]1,\infty[$. Consider the following minimization problem

$$\inf\left\{\frac{\int_\Omega|\nabla u|^2}{\left(\int_\Omega|u|^p\right)^{2/p}}\ :\ u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}.$$

1. Prove that, for $p<6$, the infimum is actually a minimum.
2. Discuss the uniqueness of the minimizer, and prove its C^∞ regularity in the interior of Ω.
3. Prove that the infimum is 0 if $p>6$.
4. Prove that, for $p=6$, the infimum is strictly positive but is not a minimum.
5. Prove that, for $p=6$, the infimum is the same that we would get should we replace Ω with any other bounded open set $\Omega'\subset\mathbb{R}^3$.
6. What about higher dimension than 3 ?