Exercices d'optimisation

1. Optimisation de fonctions, Hessienne, convexité

Exercice 1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\,y\,e^{-\pi\left(x^2+y^2\right)}$$

Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature : maximum ou minimum local, point-selle, maximum ou minimum global.

Exercice 2. Soit les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4$, $g(x,y) = (x-y)^2$ et $h = f - 2\,g$.

(1) Montrer que les fonctions f et g sont convexes sur $\mathbb{R}^2$, mais que $h = f - 2\,g$ n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$.
(2) La fonction h admet-elle un minimum ou un maximum sur $\mathbb{R}^2$?
(3) Déterminer les points critiques de h, et préciser leur nature.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^4 - 2\,x^2\,y + 2\,y^2 - 2\,y\,z + 2\,z^2 - 4\,z + 5$.

(1) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$
(2) Montrer que l'expression $f(x,y,z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.
(3) En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Trouver la valeur maximale et la valeur minimale de f sur $B_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, après avoir démontré qu'elles existent.

Exercice 5. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Soit f la fonction donnée par $f(x,y) = -x - 2y - 2xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

(1) f est-elle convexe ? concave ?
(2) Démontrer que tout minimum ou maximum local de f sur T se trouve sur la frontière de T.
(3) Démontrer que f admet bien un minimum et un maximum sur T.
(4) Trouver le minimum et le maximum de f sur T.

Exercice 6. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^3 + 3\,x\,y^2 - 15\,x - 12\,y \\
f_2(x,y) &= 3\,x^3 + x\,y^2 - 3\,a\,x\,y \\
f_3(x,y) &= x^4 + y^3/3 - 4\,y - 2 \\
f_4(x,y) &= x^3 + x\,y^2 - x^2\,y - y^3
\end{aligned}
$$

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 7. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils convexes ?

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\,\} \\
A_2 &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x + y + 1/4 < 0\,\} \\
A_3 &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y + 1 < 0 \text{ ou } y \geq 0\,\} \\
A_4 &= \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 < 0 \text{ et } -2 < x + y \leq 2\,\}
\end{aligned}
$$

Exercice 8. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : (x^2-1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(1) Dessiner l'ensemble C.
(2) S'agit-il d'un ensemble compact ? convexe ?
(3) Considérer la fonction f donnée par $f(x,y) = xy$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
(4) Calculer $\inf\{f(x,y)\ :\ (x,y) \in C\}$ et $\sup\{f(x,y)\ :\ (x,y) \in C\}$.

Exercice 9. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : (x^2-1)^2 + |y| \leq 4\}.$$

(1) Dessiner l'ensemble C.
(2) S'agit-il d'un ensemble compact ? S'agit-il d'un ensemble convexe ?
(3) Considérer la fonction f donnée par $f(x,y) = x^2 + y$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
(4) Calculer $\inf\{f(x,y)\ :\ (x,y) \in C\}$ et $\sup\{f(x,y)\ :\ (x,y) \in C\}$.

Exercice 10. Optimiser les fonctions suivantes sur leurs domaines :

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^4 + 2\,y^2 + 3\,z^2 - y\,z - 23\,y + 4\,x - 5 \\
g(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \ln\left(\frac{1}{x_j}\right) \\
h(x_1,\ldots,x_n) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{x_j}
\end{aligned}
$$