Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

5 juin 2008
Examen final

(seul la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (4 points)**.** Enoncer et démontrer le Théorème des Accroissements Finis.

En utilisant le théorème précédent, démontrer qu'une fonction dérivable est Lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

Exercice 2 (7 points)**.** On note F_n une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{(1+(x+1)^4)^n}$.
1. En intégrant par parties $F_n - F_{n-1}$, trouver une relation de récurrence entre F_n et F_{n-1} (pour $n \geq 2$). Donner les expressions de F_1, F_2, F_3.
2. On pose $I_n = \int_0^u \frac{1}{(1+(x+1)^2)^n} dx$. Ecrire la relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et donner la valeur de I_n.

Exercice 3 (4 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f est 1-périodique, c'est à dire que $f(x+1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer qu'il existe un nombre réel a tel que $f'(a) = 0$.
2. Montrer qu'il existe un nombre réel b tel que $f''(b) = 0$.

Exercice 4 (7 points)**.** Trouver la solutions du Problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = 3\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^5}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Il sera utile de se souvenir qu'un problème de Cauchy dont le membre de droite est C^1 admet toujours une et une seule solution, ainsi que d'utiliser le changement de variable $y(x) = z(x)x^n$ (l'entier n étant à chercher pour que l'expression de l'équation soit plus simple).