Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

5 juin 2008
Examen final

(seul la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (4 points)**.** Donner la définition de fonction convexe et démontrer qu'une fonction convexe $f \in C^2(\mathbb{R})$ admet un minimum global en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x_0) = 0$.

Plus difficile : démontrer la même proposition dans le cas où f est seulement dérivable en x_0 (à la place de C^2 sur $\mathbb{R}$).

Question de cours 2 (3 points)**.** Énoncer et démontrer le théorème relatif à la Formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 3 (10 points)**.** Considérer l'équation différentielle

$$f'''(x) + 2f''(x) + f'(x) = e^{-x} + x.$$

1. En trouver la forme générale des solutions.
2. Trouver la solution $\bar{f}$ qui satisfait aussi $\bar{f}(0) = \bar{f}'(0) = \bar{f}(4) = 0$.
3. Écrire le développement à l'ordre deux de $\bar{f}$ en 0 et calculer $\bar{f}''(0)$.
4. Calculer $\bar{f}'''(0)$, puis calculer (si elle existe) la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\bar{f}(x) - \cos(2x) + 1}{x^3}.$$

Exercice 4 (3 points)**.** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et f une solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + f(x) = g(x)e^{-x}.$$

Démontrer que la fonction h définie par $h(x) = f(x)e^x$ est Lipschitzienne.

Exercice 5 (4 points)**.** Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{\ln 4} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

et dire si sa valeur est supérieure, inférieure ou égale à 3/2.