Math 203 – Analyse et convergence II
–
Examen final, 13 mai 2016

Durée : 2h ; documents et calculettes interdits.
Chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.
Il est toujours possible d'admettre la réponse à une question précédente pour traiter les suivantes.
Le barème dépassant largement 20, il n'est pas obligatoire de traiter tous les exercices.

Exercice 1 (8 points)**.** Considérons les séries entières suivantes

$$S_0(x) := \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n, \qquad S_1(x) := \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n, \qquad S_2(x) := \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

On rappelle que la suite $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ converge vers le nombre $e = 2.718...$ Si besoin, on pourra également utiliser l'estimation explicite $\frac{e}{1+1/n} \leq a_n \leq e$ (sans besoin de la prouver).

1. Trouver le rayon de convergence de chacune de ces trois séries.
2. Préciser l'ensemble de convergence de chacune de ces trois séries.
3. Calculer la somme $S_0(x)$ dans son ensemble de convergence.

Solution.

1. La formule pour le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n b_n x^n$ est
$$R^{-1} = \limsup_n |b_n|^{1/n}.$$
Or, on a
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$
Les trois rayons de convergence sont donc $1, 1$ et $1/e$.
2. Une fois qu'on connait le rayon R de convergence d'une série, il reste juste à voir le comportement en $\pm R$. Pour ce qui est des deux premières séries, on a $R = 1$ mais le coefficient b_n tend vers 1 : donc $|b_n x^n| = |b_n|$ ne tend pas vers 0 pour $x = \pm R$, ce qui empêche la convergence de la série. Dans la dernière série, on a, en utilisant l'inégalité fournie dans le sujet, pour $x = \pm e^{-1}$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}|x|^n \geq \left(\frac{e}{1+1/n}\right)^n e^{-n} = \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \to \frac{1}{e},$$
et là aussi le terme général de la série ne tend pas vers 0, ce qui empêche la convergence. L'ensemble de convergence est donc égal, dans les trois cas, à $]-R, R[$, et donc a $]-1, 1[$ pour les deux premières séries et $]-1/e, 1/e[$ pour la dernière.
3. On connait
$$\sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$
En multipliant par x, on obient
$$\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}.$$
En prenant les primitives, on obtient
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x).$$

En ajoutant ces deux derniers résultats, on obtient

$$S_0(x) = \sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x).$$

Exercice 2 (10 points)**.** Considérons les intégrales suivantes, dépendant du paramètre $x > 0$

$$F(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{t+x}dt; \quad G(x) := \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(t+x)\sqrt{1+t^2}}dt.$$

1. Prouver que F et G sont bien définies pour $x > 0$ (c-à-d que les intégrales sont convergentes).
2. Prouver que pour tout $x > 0$ on a $0 \leq G(x) \leq 1$.
3. Prouver que la convergence des deux intégrales est normale sur chaque intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. En déduire que donc F et G sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
4. Prouver que l'on a $\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.
5. Prouver que F est une fonction C^1 sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $F'(x) = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{(t+x)^2}dt$.
6. Prouver, à l'aide éventuellement d'une IPP, que pour tout $x > 0$ on a $F'(x) = F(x) - G(x) - \frac{1}{x}$.
7. *(Question plus difficile)* Calculer $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\ln x}$.

Solution. Soient $f(t, x)$ et $g(t, x)$ les fonctions intégrandes dans la définition de f et g, respectivement.

1. Pour $x > 0$ fixé, f et g sont des fonctions continues et positives, et on a

$$f(t, x) \approx_{t\to+\infty} e^{-t}$$

et $\int_0^\infty e^{-t}dt = 1 < +\infty$, donc $f(\cdot, x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour g, on peut simplement dire que l'on a

$$0 \leq g(t, x) \leq e^{-t} \tag{1}$$

(on utilise $t \leq t + x$ and $\sqrt{1+t^2} \geq 1$). À nouveau, cela donne l'intégrabilité de $g(\cdot, x)$.

2. Il suffit d'utiliser (1) et l'intégrer sur $[0, +\infty[$.
3. Pour $x \geq a > 0$ on a $|f(t, x)| \leq f(t, a)$ et la function $t \mapsto f(t, a)$ ne dépend pas de x et est intégrable. Ceci prouve la convergence normale de F. Pour G, l'estimation (1) est suffisante, parce que déjà ça ne dépend pas de x (attention : dans la question 1 on utilisé un équivalent pour f et une inégalité pour g : ce n'est pas pareil ! un équivalent signifie que la limite du ratio vaut 1, donc il y a une inégalité, mais elle est vraie à partir d'un certain t_0, qui pourrait dépendre de x ! ! Attention aussi à pas confondre $x \geq a$ avec $t \geq a$, ce qui changerait l'intervalle d'intégration et ne donnerait pas d'informations sur F et G).
4. Plusieurs solutions sont possibles. Par exemple, utilisons

$$F(x) \geq \int_0^1 f(t, x)dt \geq e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{t+x}dt = e^{-1}\left[\ln(t+x)\right]_0^1 = e^{-1}(\ln(1+x) - \ln(x)) \geq -e^{-1}\ln(x).$$

Ceci est suffisant pour dire $\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.
Autre méthode : soit $\varepsilon > 0$ fixé, et utilisons

$$F(x) \geq \int_\varepsilon^1 f(t, x)dt.$$

Sur $[\varepsilon, 1] \times [0, \infty[$ la fonction f est une fonction continue de deux variables et, l'intervalle d'intégration étant borné, on n'a pas d'intégrales impropres. Donc

$$\lim_{x\to 0^+}\int_\varepsilon^1 f(t, x)dt = \int_\varepsilon^1 f(t, 0)dt.$$

Maintenant on peut dire (en utilisant la liminf parce qu'on ne sait pas encore si la limite existe)

$$\liminf_{x\to 0^+} F(x) \geq \int_\varepsilon^1 f(t,0)dt.$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on en conclut aussi

$$\liminf_{x\to 0^+} F(x) \geq \int_0^1 f(t,0)dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{t}dt = +\infty$$

(la dernière intégrale diverge en 0).

5. Sur $[0,+\infty[\times[a,+\infty[$, la fonction f est C^1 avec

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = -\frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{(t+x)^2}.$$

Or, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\right| \leq \frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{(t+a)^2}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque

$$\frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{(t+a)^2} \approx_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}.$$

Ceci prouve convergence normale de l'intégrale de $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ et par conséquent $F \in C^1$ (sur $[a,+\infty[$) avec

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{(t+x)^2}dt.$$

6. On peut faire une IPP avec

$$u(t) = e^{-t}\sqrt{1+t^2}, \quad v'(t) = -\frac{1}{(t+x)^2}$$

et

$$u'(t) = -e^{-t}\sqrt{1+t^2} + e^{-t}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad v(t) = \frac{1}{t+x}.$$

Ceci donne

$$F'(x) = -\int_0^\infty u'(t)v(t)dt + [u(t)v(t)]_0^\infty = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\sqrt{1+t^2}}{t+x}dt - \int_0^\infty \frac{te^{-t}}{(t+x)\sqrt{1+t^2}}dt - \frac{1}{x},$$

ce qui donne le résultat cherché.

7. La limite demandée est la même de $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)e^{-x}}{\ln x}$ (parce que $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$). Or, soit $H(x) = F(x)e^{-x}$: on a $H'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)$ et, utilisant la question précédente, on a

$$H'(x) = -e^{-x}(G(x) + \frac{1}{x}).$$

Après, la solution est simple si on remarque qu'on a une forme indéterminée et on utilise la règle de l'Hôpital, ce qui nous donne

$$-1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{H'(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{H(x)}{\ln x}.$$

La réponse est donc -1.

Une autre solution est la suivante, inspirée par la réponse à la question 4. Prenons $\varepsilon > 0$ et écrivons

$$F(x) = \int_0^\varepsilon f(t,x)dt + B_\varepsilon(x),$$

où $B_\varepsilon(x) := \int_\varepsilon^\infty f(t,x)dt$ satisfait

$$|B_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty e^{-t}\sqrt{1+t^2}dt := C(\varepsilon).$$

Pour la partie $\int_0^\varepsilon f(t,x)dt$, on utilise

$$\int_0^\varepsilon f(t,x)dt \geq e^{-\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{1}{t+x}dt = e^{-\varepsilon}\left[\ln(t+x)\right]_0^\varepsilon = e^{-\varepsilon}(\ln(\varepsilon+x) - \ln(x))$$

ainsi que

$$\int_0^\varepsilon f(t,x)dt \leq \sqrt{1+\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon \frac{1}{t+x}dt = \sqrt{1+\varepsilon^2}\left[\ln(t+x)\right]_0^\varepsilon = \sqrt{1+\varepsilon^2}(\ln(\varepsilon+x) - \ln(x)).$$

Ceci permet de dire

$$\liminf_{x\to 0^-}\frac{F(x)}{\ln x} \geq \liminf_{x\to 0^-} e^{-\varepsilon}\frac{\ln(\varepsilon+x)-\ln(x)}{\ln x} - \frac{C(\varepsilon)}{\ln x} = -e^{-\varepsilon}.$$

À nouveau, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on trouve que la liminf vaut au moins 1. Et, ensuite,

$$\limsup_{x\to 0^-}\frac{F(x)}{\ln x} \leq \liminf_{x\to 0^-}\sqrt{1+\varepsilon^2}\frac{\ln(\varepsilon+x)-\ln(x)}{\ln x} + \frac{C(\varepsilon)}{\ln x} = \sqrt{1+\varepsilon^2};$$

ce qui permet de dire que la limsup est au plus 1. Finalement

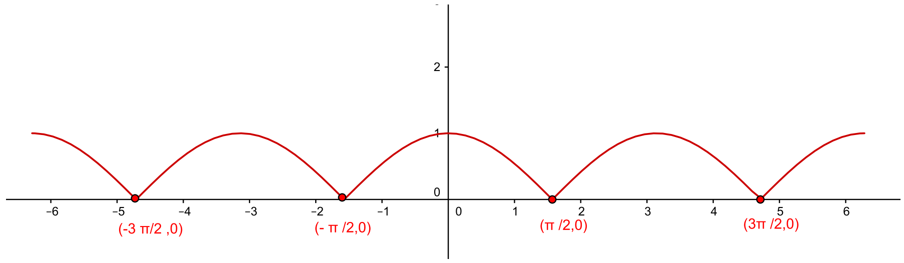
$$1 \leq \liminf_{x\to 0^-}\frac{F(x)}{\ln x} \leq \limsup_{x\to 0^-}\frac{F(x)}{\ln x} \leq 1,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 3 (10 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et prouver que f est paire et $f(x+\pi) = f(x)$ pour tout x.
2. Prouver que les c_n, coefficients de Fourier exponentiels de f, satisfont $c_n = \frac{(1+(-1)^n)}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{-inx}dx$.
3. Prouver que la série de Fourier de f est de la forme $\sum_{k\geq 0} a_{2k}\cos(2kx)$ et en préciser les coefficients.
4. Prouver que la série de Fourier de f converge uniformément vers f.
5. Écrire l'identité de Parseval concernant la série de Fourier de f et l'utiliser pour calculer
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$
6. En utilisant éventuellement la série de Fourier de f et le Théorème de Dirichlet pour $x = 0, \pi/4, \pi/2$, déterminer
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4k^2-1}, \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{4k^2-1}, \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{16k^2-1}.$$

Solution.



1. Tout d'abord, la fonction f s'écrit comme la composée des deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto |x|$. La fonction f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel , on rappelle que $\cos(-x) = \cos(x)$ (la fonction cos() est paire) et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$. On en déduit que $f(-x) = |\cos(-x)| = |\cos(x)| = f(x)$ et $f(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)| = f(x)$. On a montré ainsi que f est paire et π-périodique.
Voici la représentation de f sur le segment $[-2\pi, 2\pi]$.

2. La fonction f est continue et 2π-périodique. Ses coefficients de Fourier complexes s'écrivent pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$ pour n'importe quel a réel. On choisit par exemple $a = -\pi/2$. On a donc, en faisant le changement de variable $t = x - \pi$ et en utilisant le fait que f est π-périodique :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+\pi)e^{-in(t+\pi)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)e^{-inx}\,dx + (e^{-i\pi})^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{(1+(-1)^n)}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{-inx}\,dx
\end{aligned}$$

3. On a, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = 2\,Re(c_n) = \frac{(1+(-1)^n)}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n = -2\,Im(c_n) = \frac{(1+(-1)^n)}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin(nx)\,dx$. Comme la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire, elle est impaire et les coefficients b_n sont nuls (c'est un résultat du cours qu'on vient de redémontrer). Il est d'autre part évident que si n est impair, la quantité $1+(-1)^n$ est nul et donc les a_{2k+1} sont nuls pour tous les entiers $k \geq 0$. La série de Fourier de f s'écrit alors (sans présager pour le moment de sa convergence) $S(f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}\cos(2kx)$. On calcule maintenant tous les a_{2k}. Comme $b_{2k} = 0$, on a $a_{2k} = 2c_{2k}$ pour $k \geq 1$ et bien sûr $a_0 = c_0$.

On calcule donc les c_{2k}. Comme $\cos(x)$ est ≥ 0 sur $[-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)e^{-i2kx}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)e^{-i2kx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{ix}+e^{-ix})e^{-i2kx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{-i(2k-1)x}+e^{i(2k+1)x})\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{e^{-i(2k-1)x}}{-i(2k-1)}+\frac{e^{i(2k+1)x}}{i(2k+1)}\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{(-i)^{2k-1}-i^{2k-1}}{-i(2k-1)}+\frac{i^{2k+1}-(-i)^{2k+1}}{i(2k+1)}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{2(-1)^{k+1}}{2k-1}+\frac{2(-1)^{k}}{2k+1}\Big) \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \quad \text{et, pour tout } k \geq 1, \quad a_{2k} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}.$$

4. On a vu que f est continue sur $\mathbb{R}$ et π-périodique. Comme f restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ est la fonction cos qui est de classe C^1, la fonction f est donc C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ du fait de sa π-périodicité. On peut donc utiliser le théorème de Dirichlet qui affirme alors que la série de Fourier $S(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f. On constate alors que pour tout x réel $|a_{2k}\cos(2kx)| \leq |a_{2k}| = 4/(\pi(4k^2-1))$. Comme $4/(\pi(4k^2-1)) \sim_{k\to+\infty} 1/(\pi k^2)$, le critère de Riemann dit que la série $\sum_{k\geq 1} 4/(\pi(4k^2-1))$ converge et donc la série de Fourier $S(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Parseval dit alors que

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx.$$

On calcule $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{4\pi}[x+\frac{\sin(2x)}{2}]_{-\pi}^{\pi} = 1/2$. On a donc, grâce à la question 3,

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{16}{\pi^2(4k^2-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

6. L'application directe du résultat de la question 4 permet de calculer les différentes sommes demandées.
Pour $x = 0$, du fait que $f(0) = 1$, on obtient

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, du fait que $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos(2k\pi/4) = \cos(k\pi/2)$ qui vaut 0 si $k = 2j+1$ et $(-1)^j$ si $k = 2j$, on obtient

$$\sum_{j\geq 1}\frac{(-1)^j}{16j^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, du fait que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, on obtient

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$